トポロジーから見たトーリック多様体論

大阪市立大学　　枡田幹也

トーリック多様体論とは？

代数幾何　　　　　組合せ論

基本事実１

$$\{\text{複素}\, n\, \text{次元 toric varieties}\} \overset{1:1}{\Longleftrightarrow} \{\text{実}\, n\, \text{次元扇 (fan)}\}$$

　コホモロジー，特性類，非特異性，コンパクト性など，toric variety のすべての幾何学的性質は，対応する扇から読み取れる．

基本事実２

$$L \to M \quad \Longrightarrow \quad \text{moment map } \Phi_L\colon M \to \mathbb{R}^n$$

ample line bundle　　$\Phi_L(M)$： 格子凸多面体

1. トーリック多様体

定義. toric variety
$\Longleftrightarrow$
normal algebraic variety of $\dim_{\mathbb{C}} = n$ with $(\mathbb{C}^*)^n$-action having a dense orbit.

toric <u>manifold</u> := コンパクト非特異 toric variety

例. $(g_1, \dots, g_n) \in (\mathbb{C}^*)^n$

(1) $(\mathbb{C}^*)^n \curvearrowright \mathbb{C}^n$
$(z_1, \dots, z_n) \mapsto (g_1 z_1, \dots, g_n z_n)$

一般に, $(\mathbb{C}^*)^n$ の忠実な複素 n 次元表現

(2) $(\mathbb{C}^*)^n \curvearrowright \mathbb{C}P^n$
$[z_0, z_1, \dots, z_n] \mapsto [z_0, g_1 z_1, \dots, g_n z_n]$

例 (Hirzebruch surface)**.**

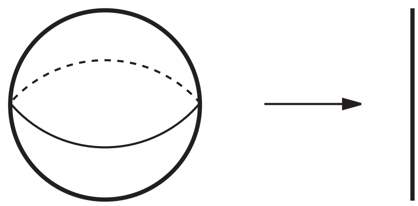
$\gamma \to \mathbb{C}P^1$ Hopf line bundle, m 自然数

$P(\gamma^m \oplus \underline{\mathbb{C}})$ $\mathbb{C}P^1$ bundle over $\mathbb{C}P^1$

$T^n = (S^1)^n \subset (\mathbb{C}^*)^n \curvearrowright M$: a toric manifold

M/T^n : n次元単純凸多面体

例 1. $\mathbb{C}P^1/S^1 \cong I$.



$$(\mathbb{C}P^1)^n/T^n = (\mathbb{C}P^1/S^1)^n \cong I^n \quad (n\text{-cube})$$

例 2. $\mathbb{C}P^n/T^n \cong n$単体.

例 3. Hirzebruch surface$/T^2 \cong$ 四角形

======================

単純凸多面体 $\Longleftrightarrow$ 単体的凸多面体

Q 単純 $\to Q^*$ 単体的 $\to$ 扇 $\to M$ $(M/T^n = Q)$

注. M は射影的 toric orbifold

2. 凸多面体の面数

P: n次元単体的凸多面体

$f_i(P) :=$ Pにおけるi単体の数　$(0 \leq i \leq n-1)$

$(f_0, f_1, \ldots, f_{n-1})$　（Pの）f-vector

(1)　オイラー数 $\Longrightarrow \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i f_i + (-1)^n = 1$

(2)　$f_0 \geq n+1$

古典的問題． f-vector たちを特徴付けよ．

$$\begin{aligned} h_0 t^n + h_1 t^{n-1} + \cdots + h_n \\ := (t-1)^n + f_0 (t-1)^{n-1} + \cdots + f_{n-1} \end{aligned}$$

によって定義される

$$(h_0, h_1, \ldots, h_n) \quad h\text{-vector}$$

を考えると都合がよい．$h_0 = 1, h_1 = f_0 - n, \ldots.$

$$\begin{aligned} (1) \Longleftrightarrow h_n = h_0 \\ (2) \Longleftrightarrow h_0 \leq h_1 \end{aligned}$$

g-**定理** (Billera-Lee, Stanley, 1980).

整数ベクトル$(h_0, h_1, \dots, h_n)$ $(h_0 = 1)$が，
ある単体的凸多面体Pのh-vector

$\Longleftrightarrow$

次がすべて成立

(1) $h_i = h_{n-i}$ $(\forall i)$. (Dehn-Sommerville eq's)

(2) $h_0 \le h_1 \le \cdots \le h_{[n/2]}$

(3) $h_{i+1} - h_i \le (h_i - h_{i-1})^{\langle i \rangle} \quad (1 \le i \le [n/2] - 1)$

自然数 a, i に対して，

$$a = \binom{a_i}{i} + \binom{a_{i-1}}{i-1} + \cdots + \binom{a_j}{j}$$

$(a_i > a_{i-1} > \cdots > a_j \geq j \geq 1)$ と展開し，

$$a^{\langle i \rangle} = \binom{a_i + 1}{i+1} + \binom{a_{i-1}+1}{i} + \cdots + \binom{a_j + 1}{j+1}$$

例えば，$a = 28, i = 4$ ならば

$$28 = \binom{6}{4} + \binom{5}{3} + \binom{3}{2}$$

より

$$28^{\langle 4 \rangle} = \binom{7}{5} + \binom{6}{4} + \binom{4}{3} = 40$$

証明． ($\Longleftarrow$ Billera-Lee)
($\Longrightarrow$ Stanley)
$\exists M$ (projective toric orbifold) s.t. $M/T^n = P^*$.

$$h_i(P) = b_{2i}(M)$$

- Poncaré Duality $\Longrightarrow$ (1)
- Hard Lefschetz $\Longrightarrow$
  $\exists \omega \in H^2(M)$ s.t.
  $$\omega^i \cup \colon H^{n-i}(M) \cong H^{n+i}(M) \quad \Longrightarrow (2)$$
- $R^* := H^*(M)/(\omega)$: R^2で生成される次数つき有限代数

$$\dim R^{2i} = b_{2i} - b_{2i-2} = h_i - h_{i-1}$$

Macaulay の結果 $\Longrightarrow$ (3)

注意．

単体的凸多面体 P の境界は，S^{n-1} 上の単体分割を与えている．

S^{n-1} 上の単体分割から，f-vector, h-vector が定まるが，それらの特徴付けは未解決.

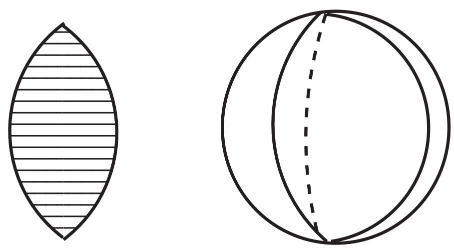
3. トーラス多様体

定義. T^n 作用をもつ $2n$ 次元 C^∞ 閉多様体を torus manifold と呼ぶ.

例． $S^{2n}(\subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{R})$ 上の T 作用として,

$$(z_1, \ldots, z_n, y) \to (g_1 z_1, \ldots, g_n z_n, y)$$

S^{2n}/T^n は次の図のような角付き多様体．位相的には n 次元球.



S^4/T^2 S^6/T^3

K: S^{n-1} の単体的セル分割

f-vector, h-vector 同様に定義.

例． K: ２つの２単体を境界で貼り合わせたもの
$(f_0, f_1, f_2) = (3, 3, 2)$,

$$\begin{aligned} &h_0 t^3 + h_1 t^2 + h_2 t + h_3 \\ &\qquad = (t-1)^3 + 3(t-1)^2 + 3(t-1) + 2 = t^3 + 1 \end{aligned}$$

ゆえ，$(h_0, h_1, h_2, h_3) = (1, 0, 0, 1)$.

定理. 整数ベクトル $(h_0, h_1, \ldots, h_n)$ $(h_0 = 1)$が，
S^{n-1}のある単体的セル分割Kのh-vector

$\Longleftrightarrow$

次がすべて成立.

(1) $h_i = h_{n-i}$ $(\forall i)$.
(2) $h_i \geq 0$ $(\forall i)$.
(3) $h_i > 0$ $(\forall i)$ または $\sum_{i=0}^{n} h_i$ が偶数.

証明のアイデア. $(\Longrightarrow (3))$
$\exists$ torus manifold M s.t. $\partial(M/T)^* = K$とする.

$$h_i(K) = b_{2i}(M)$$

$$\begin{array}{ccc} H_T^{2n}(M) & \xrightarrow{\mathrm{Ind}_T} & H_T^0(pt) = \mathbb{Z} \\ \downarrow & & \downarrow = \\ H^{2n}(M) & \xrightarrow{\mathrm{Ind}} & H^0(pt) = \mathbb{Z} \end{array}$$

Atiyah-Bott-Berline-Vergne formula より

$$\mathrm{Ind}_T(w) = \sum_{p \in M^T} \frac{w|_p}{e^T(\tau_p M)} \in \mathbb{Z}$$

次の(1),(2)をみたす$w \in H_T^{2n}(M)$を探す.

(1) $H_T^2(M)$の元のn次多項式
(2) $w|_p = \pm e^T(\tau_p M) \in H_T^{2n}(pt)$

このようなwが見つかれば，ある$h_i = 0$のとき，
$|M^T|$は偶数．一方

$$|M^T| = \chi(M) = \sum b_{2i}(M) = \sum h_i(K)$$

4. 基本事実 2

M : toric manifold
$L \to M$: T-複素直線束

$$H^0(M;L) = \sum_{u:\text{weight}} m_L(u) t^u \quad (m_L(u) \in \mathbb{Z})$$

問題． $H^0(M;L)$（または $m_L(u)$）を求めよ.

例. r : 自然数

$$L := (\mathbb{C}^2 \backslash \{0\}) \times \mathbb{C}/\sim \quad \to \quad \mathbb{C}P^1.$$

$(z_0, z_1, w) \sim (hz_0, hz_1, h^r w) \ \ (h \in \mathbb{C}^*)$

$[z_0, z_1, z_0^{r-k} z_1^k] \xleftarrow{s_k} [z_0, z_1] \ \ (0 \leq k \leq r)$ は切断

$$H^0(\mathbb{C}P^1; L) = \mathbb{C}s_0 \oplus \mathbb{C}s_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}s_r$$

$\mathbb{C}P^1$ 上の T^1 作用を $[z_0, z_1] \to [z_0, gz_1]$ とすると，上の分解は固有空間分解.

局所的な考察

自明束 $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}^n$.

切断は,

$$(z, f(z)) \longleftarrow z \qquad (f(z) \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n])$$

ゆえ

$$H^0(\mathbb{C}^n; \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}) = \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$$

$\mathbb{C}^n$ 上の T-作用として

$$(z_1, \ldots, z_n) \to (g_1 z_1, \ldots, g_n z_n)$$

を取ると,

$$\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n] = \bigoplus_{b_1 \geq 0, \ldots, b_n \geq 0} \mathbb{C} z_1^{b_1} \cdots z_n^{b_n}$$

は固有空間分解.

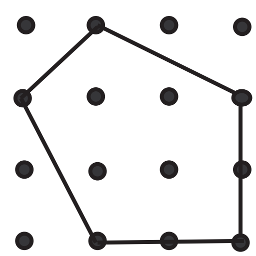
$L \to M$ に対して，∃ モーメント写像

$$\Phi_L\colon M \to \mathrm{Lie}(T)^* = \mathbb{R}^n$$

θ : T-不変な L の接続形式

$$\langle \Phi_L, X\rangle = i_{\underline{X}}\theta \quad (X \in \mathrm{Lie}(T))$$

L : ample $\Longrightarrow \Phi_L(M)$: 格子凸多面体



定理 (Well-known). L : *ample*
$\Longrightarrow$

$$H^0(M;L) = \sum_{u\in\Phi(M)} t^u$$

特に

$$\sharp(\Phi(M)) = \dim_{\mathbb{C}} H^0(M;L) = \int_M e^{c_1(L)}\,\mathrm{td}(M)$$

5. Ehrhart 多項式

定理 (Ehrhart (1956))**.**
P：n次元格子凸多面体，q：自然数
$\Longrightarrow$

$$\#(qP) = a_n q^n + a_{n-1} q^{n-1} + \cdots + a_1 q + a_0$$

$$a_n = \mathrm{vol}(P), \quad a_{n-1} = \frac{1}{2}\mathrm{vol}(\partial P), \quad a_0 = 1$$

証明． P に対し，$\exists$ ample $L \to M$ s.t. $\Phi_L(M) = P$.

$$\#(P) = \dim_{\mathbb{C}} H^0(M; L) = \int_M e^{c_1(L)} \operatorname{td}(M)$$

$L \rightsquigarrow L^q$ のとき，$P \rightsquigarrow qP$.

$$\#(qP) = \int_M e^{c_1(L^q)} \operatorname{td}(M)$$

$$e^{c_1(L^q)} = e^{qc_1(L)} = 1 + c_1(L)q + \cdots + \frac{c_1(L)^n}{n!} q^n + ..$$
$$\operatorname{td}(M) = 1 + \operatorname{td}_1(M) + \operatorname{td}_2(M) + \cdots + \operatorname{td}_n(M)$$

$$\int \frac{c_1(L)^n}{n!} = \int_M e^{c_1(L)} = \operatorname{vol}(P) \quad \text{(Duistermaat-Heckmann)}$$
$$\int_M \operatorname{td}_n(M) (= \text{Todd genus of } M) = 1$$

定理 (Ehrhartの相互律).

$$\#((qP)^\circ) = (-1)^n \#(-qP)$$

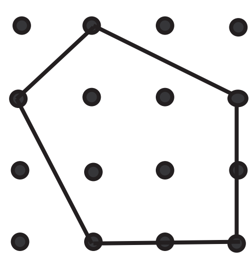
Serre duality

$$H^i(M; L)^* \cong H^{n-i}(M; L^* \otimes \wedge^n TM^*)$$

から従う.

定理 (Pick (1899)). P：格子多角形
$\Longrightarrow$

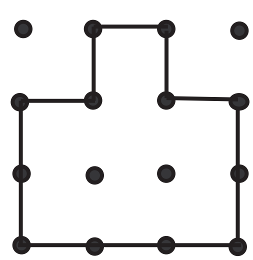
$$\#(P) = \mathrm{Area}(P) + \frac{1}{2}\#(\partial P) + 1.$$



$\mathrm{Area}(P) = 13/2$

$\#(P) = 11$

$\#(\partial P) = 7$



6. Khovanskii-Pukhlikov formula

Ehrhartの定理

$$\#(P) \Longrightarrow \#(qP) \Longrightarrow \mathrm{vol}(P)$$

Khovanskii-Pukhlikov formula

$$\mathrm{vol}(P) \Longrightarrow \mathrm{vol}(P(\mathbf{h})) \Longrightarrow \#(P)$$

$$P = \{u \in \mathbb{R}^n \mid \langle u, v_i \rangle \leq a_i\}$$

$\mathbf{h} = (h_1, \ldots, h_d) \in \mathbb{R}^d$に対し

$$P(\mathbf{h}) := \{u \in \mathbb{R}^n \mid \langle u, v_i \rangle \leq a_i + h_i\}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{td}(\partial/\partial\mathbf{h}) &:= \prod_{i=1}^{d} \frac{\partial/\partial h_i}{1 - e^{-\partial/\partial h_i}} \qquad \text{(Todd operator)} \\ &= \prod_{i=1}^{d} \big(1 + \frac{1}{2}\partial/\partial h_i + \frac{1}{12}(\partial/\partial h_i)^2 + \ldots\big) \end{aligned}$$

定理 (Khovanskii-Pukhlikov (1993)).

$$\mathrm{td}(\partial/\partial\mathbf{h})\,\mathrm{vol}(P(\mathbf{h}))\big|_{\mathbf{h}=0} = \#(P)$$

7. トポロジーから見た一般化

M : torus manifold

$L \to M$: 任意の T-複素直線束（C^∞ カテゴリー）

Riemann-Roch index

$$RR^T(M,L) = \sum_{u:\text{weight}} m_L(u) t^u \in R(T)$$

定理 (Karshon-Tolman, Karshon-Grossberg, M)**.**
$m_L(u) \in \mathbb{Z}$ はモーメント写像 $\Phi_L \colon M \to \mathrm{Lie}(T)^*$ で記述できる.