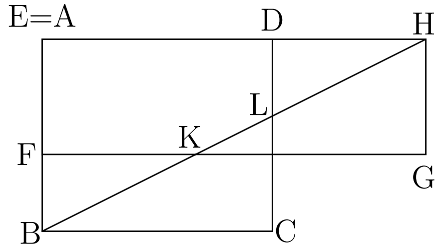
切ったり貼ったり
— デーンの定理とその周辺 —
問題への解答例

問題 1. 下図において 2 つの長方形 ABCD と EFGH の面積が等しいとする。直線 BH が各長方形の辺と交わる点を K と L とすると，$\triangle\mathrm{BCL} \equiv \triangle\mathrm{KGH}$，$\triangle\mathrm{BKF} \equiv \triangle\mathrm{LHD}$ を証明せよ。



解答例:　明らかに問題の四つの三角形はすべ相似だから，$\mathrm{BL} = \mathrm{KH}$，$\mathrm{BK} = \mathrm{LH}$ を示せばよい。面積に関する条件より $\mathrm{AB} \cdot \mathrm{AD} = \mathrm{AF} \cdot \mathrm{AH}$ である。ゆえに $\mathrm{AF} : \mathrm{AB} = \mathrm{AD} : \mathrm{AH}$ だから，$\triangle\mathrm{AFD}$ と $\triangle\mathrm{ABH}$ は相似であり，従って FD と BH は平行である。よって，四角形 FBLD と FKHD は，ともに平行四辺形だから

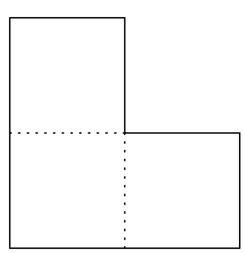
$$\mathrm{BL} = \mathrm{FD} = \mathrm{KH}$$

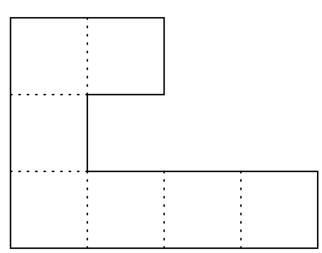
である。また，

$$\mathrm{BK} = \mathrm{BL} - \mathrm{KL} = \mathrm{KH} - \mathrm{KL} = \mathrm{LH}$$

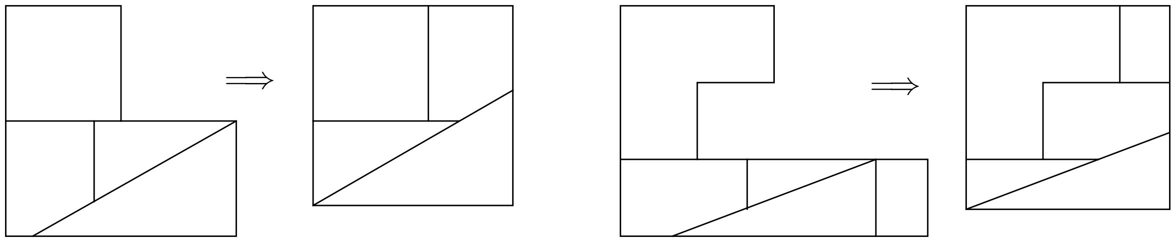
でもある。

問題 2. 下は正方形をいくつか集めてできた図形である。切り貼りして，それぞれ形を正方形にせよ。





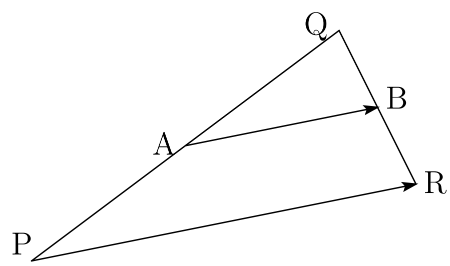
解答例:



断片数はそれぞれ最小と思うが，もっと断片数の少ない解をみつけた方は，電子メールで `ksakai@math.tsukuba.ac.jp` まで連絡されたい。

問題 3. 平面上の図形を，最初は点 A を中心にして対称に移動し，続いて点 B を中心にして対称に移動すると，結局，A から B の方向に AB の 2 倍の距離だけ平行に移動することを証明せよ。

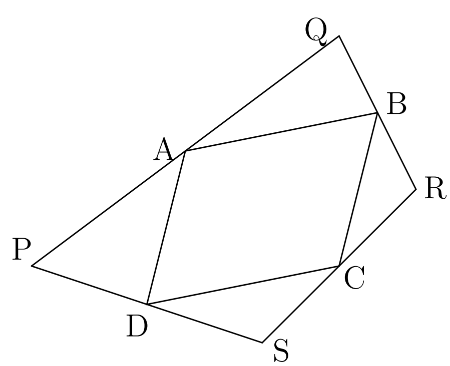
解答例: 平面上の点 P を任意にとり，P の A に対する対称点を Q，Q の B に対する対称点を R とする。このとき A は PQ の中点，B は QR の中点だから，図から分かるようにベクトル PR はベクトル AB の 2 倍である。



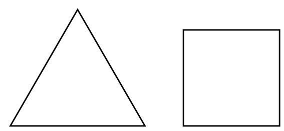
P を最初にどこにとっても，この関係は変わらないので，すべての点が AB 方向に AB の 2 倍の距離だけ移動する。

問題 4. 平面上の図形に，点 A，B, C を中心にする対称移動を続けて行っても，1 回の対称移動をしたのと同じことになる。この対称移動の中心はどういう点になるか？

解答例: この対称移動の中心を D とすると，D は AC の中点に対して B と対称である。つまり ABCD は平行四辺形である。実際，点 P を任意にとり，A，B，C を中心に次々に対称移動を行った結果を Q，R，S とする。また D を線分 PS の中点とする。このとき AB, PR, DC は平行，AD，QS, BC は平行だから，ABCD は平行四辺形である。

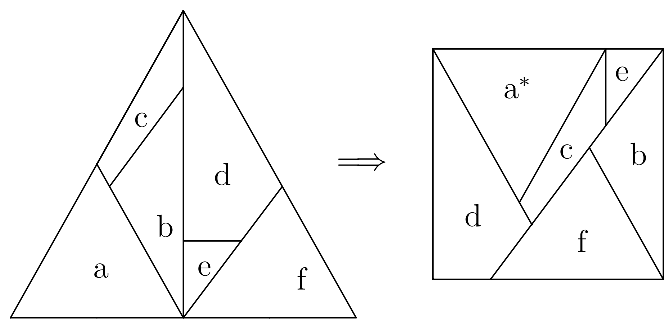


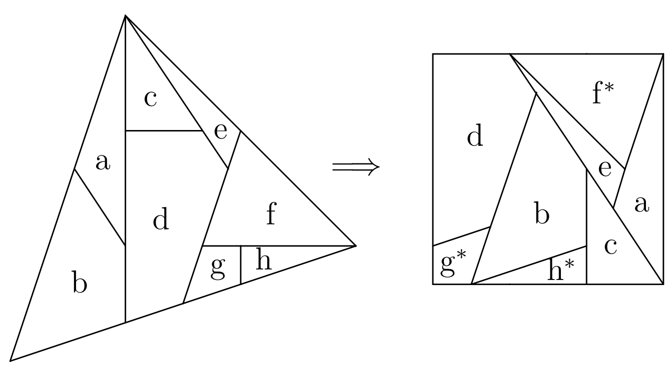
問題 5. 図のように置かれた同面積の正三角形と正方形が，互いに点対称分割合同であることを切り貼りによって示せ。



正三角形を 15° 回転しても，やはり互いに点対称分割合同であることを切り貼りによって示せ。

解答例:



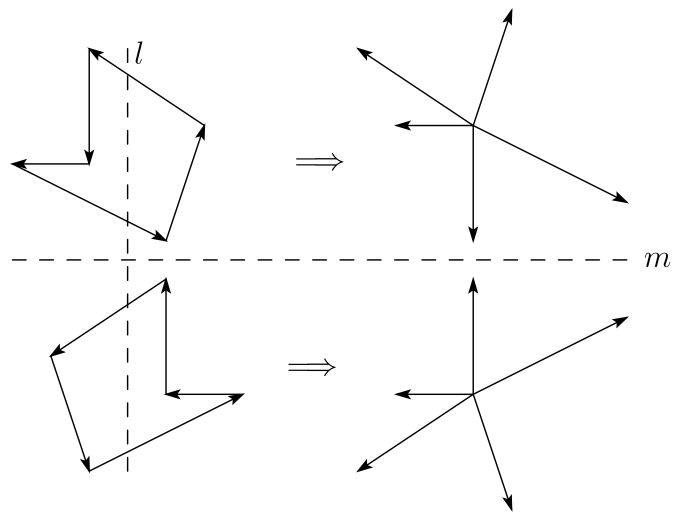


x^* は，x を 180° 回転した図形を表す。もっと断片数の少ない解をみつけた方は，電子メールで `ksakai@math.tsukuba.ac.jp` まで連絡されたい。

問題 6. 布地の両面に同じ矢がすり模様があるとすれば，裏返すという操作が一定方向の軸に対してなら許される。その裏返し操作で周ベクトル図はどう変化するか？

解答例: 図形の裏返しに使った軸を l とすると，周ベクトル図は l に直交する軸 m を中心

に裏返る。図で確認すると次のようになる。



問題 7. 平行移動のほかに一定方向の直線を対称軸にして多角形を裏返す操作が許されたとしたら，同面積の多角形はどれも分割合同になるだろうか (ヒント: 周ベクトルのうち対称軸に対して垂直なものだけを考えよ)？

解答例: 例えば対称軸が垂直方向の場合，前問で見たように水平方向の周ベクトルは，裏返しても全く変化しない。従って，水平方向の辺を持つ三角形は，その辺に関する周ベクトルを平行移動や垂直な軸での裏返しで消すことができないので，長方形と分割合同になることがない。逆に，水平方向の裏返しで互いに消しあえるような周ベクトルを持つ多角形は，垂直な反転を使うと長方形と分割合同になることがある。

より精密に述べるなら，垂直軸での反転と平行移動で長方形に分割合同な多角形は，どれも，垂直軸に対称な周ベクトル図を持つことが，次のようにして分かる。今，多角形 P_0 を m 個の多角形 $P_1, \ldots, P_m$ に分割して，$P_1, \ldots, P_k$ は垂直反転し，$P_{k+1}, \ldots P_m$ はそのままで，平行移動することにより長方形に変形できるとする。各多角形 P_i の周ベクトル図を v_i とすると，条件より

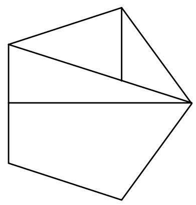
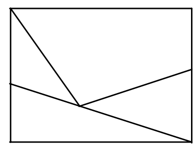
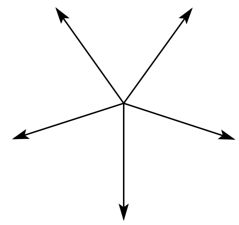
$$v_0 = v_1 + \cdots + v_k + v_{k+1} + \cdots + v_m, \quad 0 = v_1^* + \cdots + v_k^* + v_{k+1} + \cdots + v_m$$

が成り立つ。ただし，0 は長方形の周ベクトル図，すなわちゼロベクトル図ををあらわし，v^* は周ベクトル図 v を水平反転した周ベクトル図を表す。よって

$$v_0 = (v_1 + \cdots + v_k + v_{k+1} + \cdots + v_m) - (v_1^* + \cdots + v_k^* + v_{k+1} + \cdots + v_m) = (v_1 - v_1^*) + \cdots + (v_k - v_k^*)$$

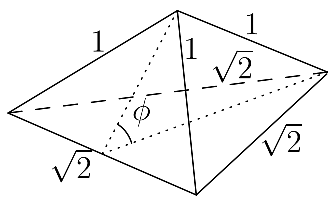
となるが，どんな周ベクトル図 v についても $v - v^*$ が垂直軸に対称になることは容易に分かるので，その和で書ける v_0 もまた垂直軸に対称でなければならない。たとえば下図 (a) のように置かれた正五角形は，4 片に分けるだけで，垂直反転と平行移動で長方形と分割合同であるが [図 (b)]，そのためには，元の正五角形が (c) のように垂直軸に対称な周ベクト

ル図を持つ必要がある。

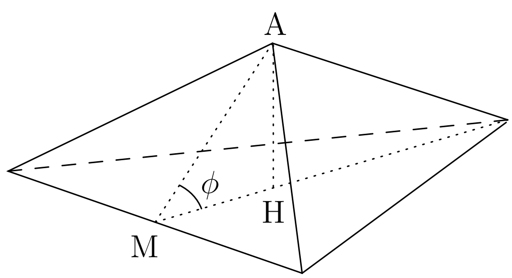
(a)  (b)  (c) 

同様に，多角形 P と Q が垂直反転分割合同ならば，v, w を P, Q の周ベクトル図とすると，$v - w$ が垂直軸に対称でなければならない。

問題 8. 立方体の角を切り落とした図のような三角錐の底面と側面のなす角 ϕ について $\cos\phi$ を求めよ。それを用いて ϕ が $360°$ の有理数倍でないことを証明せよ。



解答例: 三角錐の頂点 A から底面におろした垂線の足を H，底辺の中点を M とすると，



H は底面の正三角形の重心だから，$\mathrm{MH} = \sqrt{2} \times \sqrt{3}/2 \times 1/3 = 1/\sqrt{6}$ である。また，明らかに $\mathrm{MA} = 1/\sqrt{2}$ である。よって

$$\cos\phi = \frac{\mathrm{MH}}{\mathrm{MA}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

である。次に ϕ が $360°$ の有理数 p/q 倍 (p は整数，q は正の整数) だとすると，矛盾することを示す。$q\phi = 360p°$ より，$\cos q\phi = \cos 360p° = 1$ である。ところが，正の整数 q に対して，$\cos q\phi$ は $n/(\sqrt{3})^q$ (n は 3 で割り切れない整数) の形になることが数学的帰納法によって次のように示され，従って整数にはなりえない。$q = 1, 2$ の時は，$\cos\phi = 1/\sqrt{3}$，$\cos 2\phi = 2(\cos\phi)^2 - 1 = -1/3$ より，明らかである。$\cos(q-1)\phi = m/(\sqrt{3})^{q-1}$，$\cos q\phi = n/(\sqrt{3})^q$ とすると，三角関数の和と積の交換公式より，

$$\cos(q+1)\phi + \cos(q-1)\phi = 2\cos q\phi\cos\phi$$

だから,

$$\cos(q+1)\phi = 2\cos q\phi\cos\phi - \cos(q-1)\phi = \frac{2n}{(\sqrt{3})^{q+1}} - \frac{m}{(\sqrt{3})^{q-1}} = \frac{2n-3m}{(\sqrt{3})^{q+1}}$$

により $\cos(q+1)\phi$ も同じ形をしていることが分かる。(n が 3 で割り切れないから $2n-3m$ も 3 で割り切れない。)

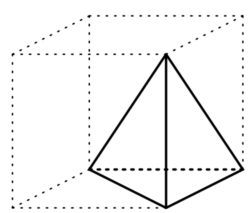
問題 9. f が

$$f(\alpha+\beta) = f(\alpha) + f(\beta), \quad f(360^\circ) = 0$$

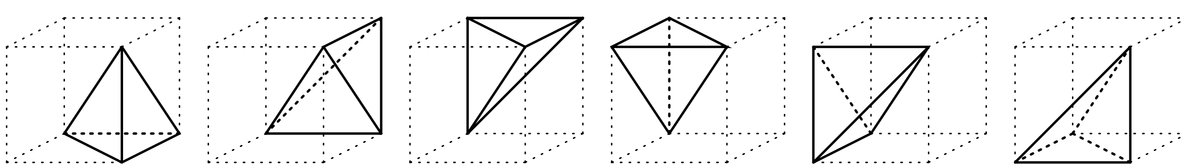
を満たすとする。q が有理数なら $f(q\alpha) = qf(\alpha)$ であることを示せ。よって，α が 360° の有理数倍であれば，$f(\alpha) = 0$ である。

解答例:　まず $f(\alpha) = f(0+\alpha) = f(0)+f(\alpha)$ より，$f(0\alpha) = f(0) = 0 = 0f(\alpha)$ である。さらに自然数 n に対して，$f(n\alpha) = f((n-1)\alpha+\alpha) = f((n-1)\alpha)+f(\alpha)$ だから，数学的帰納法により $f(n\alpha) = nf(\alpha)$ が証明できる。負の整数 $-n$ に対しては $0 = f((-n)\alpha+n\alpha) = f((-n)\alpha)+f(n\alpha)$ より，$f((-n)\alpha) = -f(n\alpha) = (-n)f(\alpha)$ である。最後に一般の有理数 $q = m/n$ (m は整数，n は正の整数) に対しては，$nf((m/n)\alpha) = f(n(m/n)\alpha) = f(m\alpha) = mf(\alpha)$ より，$f(q\alpha) = f((m/n)\alpha) = (m/n)f(\alpha) = qf(\alpha)$ である。

問題 10. 立方体から切り出した下図のような三角錐を 6 つ集めて立方体にするにはどうすればいいか？また，この三角錐について，各辺の長さとその辺を挟む 2 つの面がなす角度のリストを作るとどのようになるか？



解答例:　問題の三角錐を立方体の対角線の周囲に，鏡に映すように展開していくと，下図のような位置に配置される。これをそのまま合わせれば，元の立方体が復元する。



辺の長さと角度のリストは,

$$\langle\sqrt{3},60^\circ\rangle, \langle\sqrt{2},90^\circ\rangle, \langle\sqrt{2},90^\circ\rangle, \langle 1,90^\circ\rangle, \langle 1,45^\circ\rangle, \langle 1,45^\circ\rangle$$

であることが図より分かる。角度はすべて 360° の有理数倍である。