切ったり貼ったり
— デーンの定理とその周辺 —

坂井 公 (筑波大学 数理物質科学研究科)

1　虫食いテーブルクロス

「あなた！大変よ，大変」

晴天に恵まれた春のある日，高校 3 年生の花子が，受験勉強などそっちのけで，居間のソファーに深々と腰掛けてマンガを読んでいると，別室で家具や衣類を冬物から夏物へ転換する作業にいそしんでいた母親がやって来て，大声を上げた。大学で数学を教えている父親は，講義の準備と称して書斎にこもっていたが，面倒くさそうに書斎へ続く扉から顔だけのぞかせて，

「え，騒々しいな。一体何だい？」

仕事で忙しそうなふりをしているが，父が携帯ゲーム機を書斎に持ち込むのを，花子は目撃していた。音を殺してこっそり遊んでいたに違いない。母もうすうす気づいているようだが，今はそれどころでなく，

「テーブクロスよ。気に入ってたのに……虫に食べられちゃったのよ。それにもうこの柄のものは売ってないのよ」

「ああ，それね。今のテーブルには大きすぎると言ってたじゃないか。切って使えばちょうどいいんじゃないのか」

「だめよ。虫食いが大きすぎて。切ったりしたら，縦も横も今の 1/3 になっちゃうわ」

母の手にあるテーブルクロスを見ると，確かにそれは無残にも四隅を大きくかじられ，ほとんど赤十字のマークのような形をしていた。父もそれを見てあきれ顔をしていたが，やがて，何か思いついたらしく，

「まてよ。テーブルの大きさはどんなだったかな？」

「一辺がちょうど 1 メートルの正方形よ」

「で，そのテーブルクロスの大きさは？」

「もとは一辺 1.5 メートルほどの正方形だったのよ。今は面積だって，やっとその半分くらいね」

「ふむふむ，模様はただの格子柄だし……ちょっと貸してごらん」

父は，母の手からクロスをもぎ取るようにして，書斎に走りこんだ。

花子がのぞいてみると，あいかわらず，書斎はパソコンなどの電子機器や部品でいっぱいで，とても数学者のものとは思えない。ドライバやペンチだけでなく，のこぎり・ハンマー・かんなまで，ほとんど開かれた形跡のない数学の専門書の隣に散らばっている。父は，ゲーム機のスイッチを切り，物差しと鋏を拾い上げて，なにやら工作を始めた。

見ていても仕方がないので，ソファーに戻り，マンガの続きを読んでいると，やがて父が嬉々として書斎から出てきて，母を呼んだ。花子は，父が広げて持っているものを見て驚いた。さっきのクロスのようだが，虫食いの跡はどこにもなく，大きさも形もちょうどテーブルにピッタリだ。ただ，格子縞がやや斜めに走っている。呼ばれてやって来た母もびっくりして，

「その柄の布地，どこかに隠してあったの？」

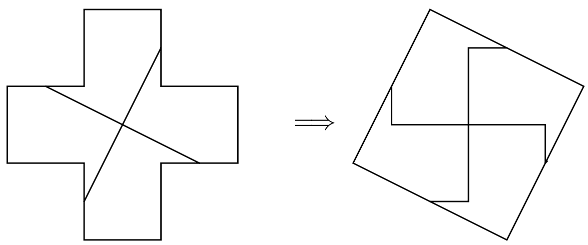
「違うさ。……そうか，遠くからだと分からないようなら，貼り合わせもまあまあうまく行ったということだな」

「え，パッチワークということ？なるほどね。でも，その形にするには大変だったでしょう？」

「そうでもないさ。大きく 4 つに切って，もう一度貼り合わせただけだから。虫がきれいな十字の形

に食ってくれていたので，無駄な断片もほとんどでなかったよ。格子縞を合わせるのにちょっと苦労したけどね。花子，どういうふうに切ったか分かるかい？」

花子は，紙と鉛筆を手にし，あれこれ考えてみた。しばらくして降参すると，父は満足そうにうなずいて「こうするのさ」と図を書いた。

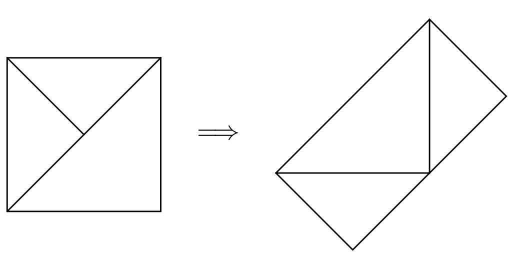


花子は，ちょっと感心した。だが，悔しいので「ふん，こんな問題，入試には出ないわよ」と負け惜しみを言っていると，いつのまにか別室に行って戻って来た母がさっきと色合いだけ違う同じ柄の十字形クロスを広げて，

「実は，この柄はもう手に入らないだろうと思って，色違いをもう 1 枚買っておいたのよ，重ねてしまっておいたら，両方とも同じようにかじられてしまったの。で，この前，応接用テーブルを買ったでしょ。あれのクロスでいいのがなっかたのよ。今，測ってみたら，縦が 70 cm ちょっとで横がそのちょうど 2 倍の長方形。ね，面積はほぼ同じだから，正方形のクロスをパッチワークで作れるなら，長方形だって……」

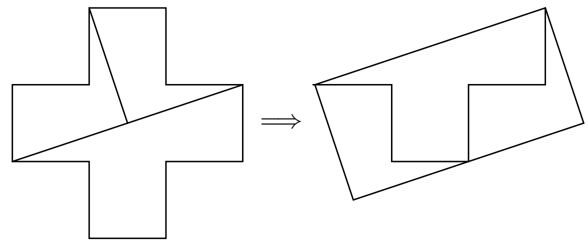
花子が名誉挽回とばかりに割り込んだ。

「それなら簡単よ。まず，さっきみたいに正方形にしてから……」とさらさらと図を書いて「ほら，こうすればいいでしょ」



「ほう，うまいな」と父がのぞき込んだ。それから少し考えて，

「しかも，最初の十字形から通して考え，無駄な切れ目を避けると， 3 つに切るだけですむ。こうさ」



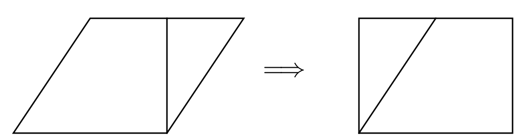
その結果に満足して，母は作業の続きをしに戻って行ったが，花子は，図を眺めていて，ふと疑問が浮かんだ。

「ねえ, パパ，面積が同じ図形なら，こうやって切り貼りをすることで，いつでも一方から他方へ変換できるのかしら」

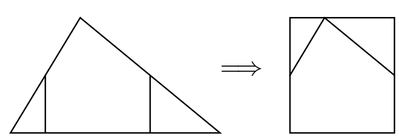
2　分割合同

「なかなか面白い問題に気がついたな。そういう 2 つの図形を互いに**分割合同**だって言うのさ。模様がある場合にその模様まで合うようにするのは無理だけど，模様がない場合は，面積が同じだと分割合同なことが多いよ。どんな図形もそうかどうかは，ちょっと考えてごらん」

「うーん。平行四辺形の面積が底辺かける高さになるのは，こういう変形ができるからよね。



小学校で習ったわ。三角形も

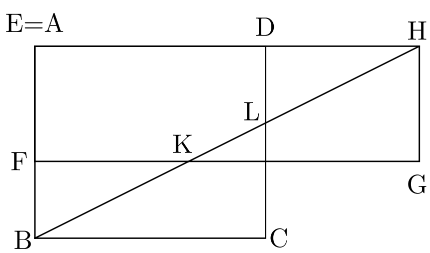


とすれば長方形になる。ということは，面積の同じ長方形同士が分割合同なら，三角形や平行四辺形は，長方形経由でいつも互いに分割合同ね。だけど……」

花子は同面積の長方形を 2 つ描き，切り方をいろいろ考えてみた。

「うーん，うまく行かないわ。ねえ，長方形同士だと，いつもうまく行くとは限らないんでしょ」

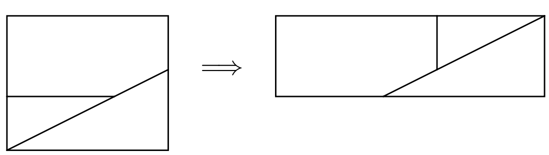
「そうか。ちょっと難しかったかな。2 つの長方形を ABCD と EFGH とするよ。図のように，頂点 A と E を通る辺が重なるようにして置くのさ。そこで，B と H を結ぶ直線を描き，各長方形の辺との交点を K と L とする。



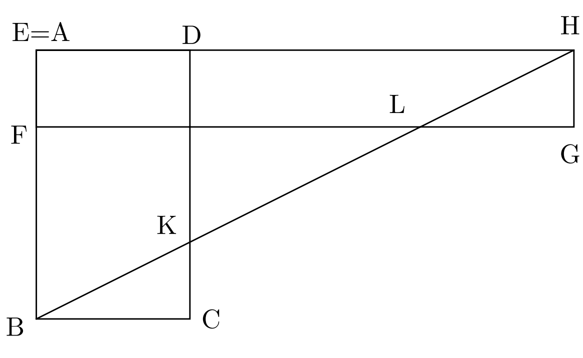
すると，元の長方形が同じ面積なら，三角形 BCL と KGH，三角形 BKF と LHD がそれぞれ合同になる。

問題 1. これを証明せよ。

あとは，こうして線に沿って長方形を切り貼りするだけさ。簡単だろ」



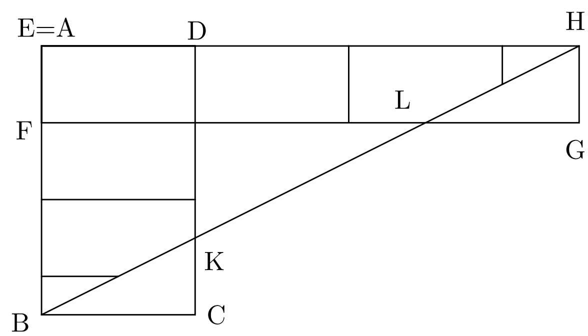
「うーん。確かにね。……あ，でも，ちょっと待って。ほら。片方が妙に細長いと，こんな風に K や L が重なっている部分の外へ行っちゃうから，そんなにうまく切れないよ」



「それは問題ない。EFGH を横に何等分かして縦に貼り合わせ，正方形に近い形にしてから，さっきの方法を使ってもいいけど，こうしたほうが簡単かな？」

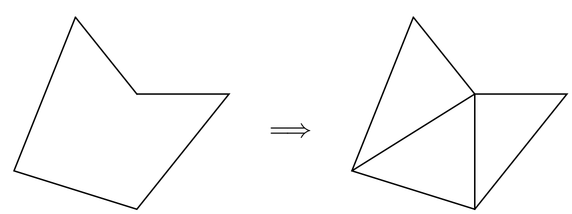
父は，さっきの花子の図に線を何本か描き足して，

「ほら，これでいい。どう切り貼りするかは，図を見れば分かるだろう」



花子は，しばらく図を見ていたが，やがてうなずき，

「つまり，長方形同士は面積が同じなら分割合同というわけね。……あれ，そしたら，どんな図形でも，面積が同じなら互いに分割合同じゃない。だって，どんな図形も，例えばこんなふうにして，

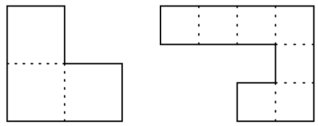


三角形に分割できるでしょ[1]。で，三角形は，どれも長方形に変えられる。そんでもって，今のやり方を使うと長方形の横幅を好きに変えられるわけよね。ということは，各三角形を横幅一定の長方形に変えて，次々につなぎ合わせれば，一つの長方形になるということじゃない。早い話がどんな図形も同じ面積の長方形と分割合同で，しかも長方形の横幅は好きにできる」

「お，やるね。すごい，すごい。ゆえに同面積の図形同士はどれも，長方形経由で分割合同ということになる。これでさっきの疑問は解決だね」

[1] このことは直感的には明らかだが，厳密な証明は，(たとえば参考文献の [3] にあるように) かなり難しい。興味のある人は，自分で証明を考えてみるといい。

問題 2. 下は正方形をいくつか集めてできた図形である。切り貼りして，それぞれ形を正方形にせよ。



花子が少しいい気分になっていると，またいつの間にか戻って来て話を聞いていた母親が後ろから口を挟んだ。

「難問解決おめでとう。ちょうどいい応用問題があるのよ」

「いいわよ。もう，何でもござれよ」と言う花子に「はい，これ」と母が手渡したのは，何の変哲もない無地の長方形の布だ。

「え，これが応用問題？どういう形にしたいのかしらないけど，簡単すぎるんじゃない」

ところが，母が黙って指差したものを見て，花子は絶句した。居間で小物置きに使っている丸いテーブルだ。

「あれのクロスをパッチワークで作れって言うの？」

「だって，その布は幅 50cm で長さはその 3 倍と少しなのよ。テーブルは半径が 50 cm に少し足りないだけ。さっき，面積が同じならって，言ってたじゃない」

「そりゃ，面積がほぼ同じだってことは暗算でもわかるけど……」

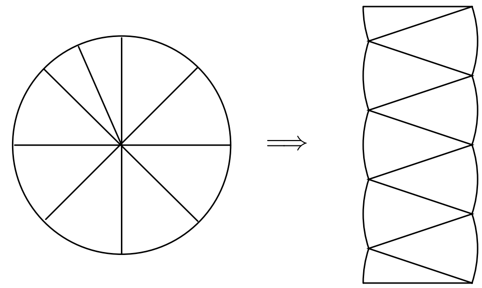
父が割り込んできた。「ははは，さっき証明したのは『ボヤイ-ゲルヴィンの定理』と言うんだけど，確かに同面積の図形なら何でもというわけには行かないね。有限個の三角形に分割する必要があるから，同面積の『多角形』と言い直したほうがいい」

しかし，父は布とテーブルを交互に見て，

「うん。でも，これなら結構うまくいくかもしれないぞ。花子，円の半径が r のとき，面積がどうして πr^2 になるのか，学校で図を使って説明を受けたことはないかい？」

「あったかもしれないけど，覚えてないわ」

「では，こういうのはどうだい。



円を放射状に切って扇形をたくさん作り，交互の向きに積むのさ。長方形に近い形ができるだろ。横幅は円の半径 r だし，縦は円周のほぼ半分 πr だ。円を細かく切れば，正確な長方形にいくらでも近づくということは，円の面積は長方形と同じで πr^2 ということだ」

「なるほどね。あ，でもパパが言いたいのは，そんなことではなくて……」

「そう，この切り方のことさ。逆にその布を……そうだな，1000 ぐらいの細長い三角形に切り分けて，丸く配置すれば……」

突然，母の手が伸びて，布をひったくった。「や，やっぱりいいわ。何も真ん丸でなくていいのだから，ほかのでちょうどいいのがあるかもしれないし……それより，そろそろ食事の支度をしようかしら」

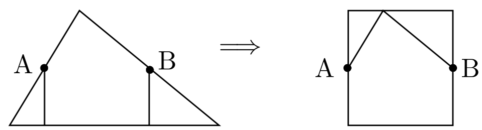
布を大事そうにかかえて，母は逃げるように台所に向かった。

3　点対称と平行移動

これで，しばらくは母が新しい問題を持ち込むことはなさそうだ。花子は，書き散らした図を集めてゴミ箱に捨てようとしたが，見ていてふと別の疑問が湧いてきた。

「ねえ，パパ，さっきの虫食いクロスは柄までキチンと合わせられたじゃない。大きな模様が描いてあるなら，切り貼りしたらメチャになるに決まっているけど，ああいう細かい格子模様や木目みたいな縞模様なら，方向さえ合わせれば，それなりに見えるでしょ。

で，例えば，この図なんだけど



2 つの三角形をそれぞれ点 A と B を中心に 180° 回転してるだけだから，縞や格子の方向は変わらないでしょ。他の図なんか，回転もさせないで，ただ，ずらしているようなのばかりだわ」

「お，面白いことに気がついたな。つまり，模様の方向がそろった切り貼りで分割合同になるかという問題だね。そういうのを考えるには，人によって解釈に食い違いが生じたりしないように，問題を厳密に定義して置いた方がいい。そういうのを問題の定式化って言うんだけど，答えを考える場合にも役に立つことが多い。今の問題の場合，模様の方向が変わらないというのが条件だけど，これはどういうことかな？」

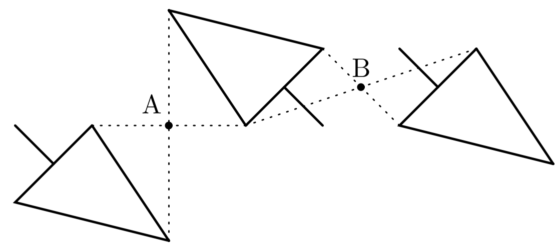
「簡単よ。断片を動かすとき回転させちゃいけないってことでしょ。あ，180° の回転は例外だけど……あれ，格子模様によっては 90° も OK ね。どうしよう？」

「そう。そうやって条件を整理することも，定式化の大切な役目だ。そうだね。今は縞模様だけにして 90° の回転はダメということにしておこう。裏返しにするのはどうする？」

「え，考えもしなかったけど，裏に同じ模様があるとは限らないから禁止ね。それに，そんなことしなくてもうまく行くと思うわ」

「さあ，どうかな？とにかく，これで整理された。『2 つの同面積の多角形がある。一方をいくつかに分割して，各断辺を 180° 回転と平行移動で動かして貼り合わせるだけで，もう一方が作れるか』という問題だ。だけど，もうちょっと整理して置いた方がいいな。ええと，180° 回転するというのは，ある点を中心にして点対称の位置に図形を移動するということだけど，これを最初は点 A を中心，次には点 B を中心にという具合に 2 度続けてやったらどうなる？」

花子は，実際に図を描いて動かしてみた。



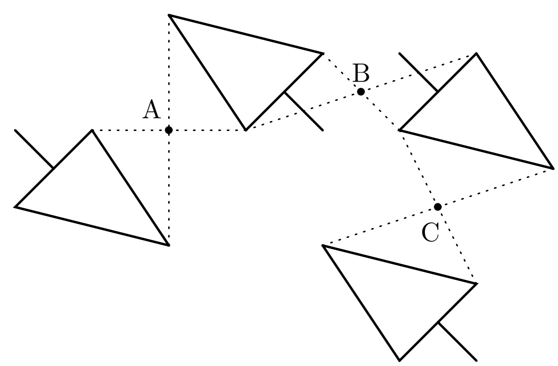
「驚いたわ。どの図形も A から B のほうに平行に移動するのね。しかも，移動距離は線分 AB の 2 倍くらい」

問題 3. 上の花子の観察を証明せよ。

「その通り，必ずそうなるのさ。ついでだから，点対称移動を 3 度続けるとどうなるかも考えてごらん。これは，平行移動のあとに点対称移動，あるいは点対称移動のあとに平行移動をするのと同じことだよね」

花子は，また，図を描いてみた。

「ふーん，今度はただの点対称移動になるみたい」



問題 4. この対称移動の中心はどういう点になるか？

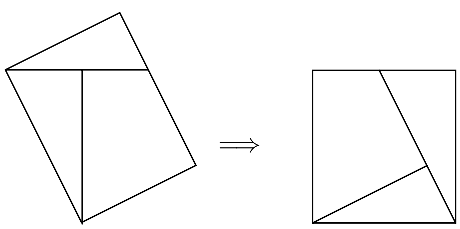
「そう。つまり，点対称移動は，何回繰り返しても，平行移動と点対称移動以外にはならないのさ。逆に平行移動は点対称移動 2 回の繰り返しで作れることが分かった。ということは，断片を動かす基本操作としては点対称移動だけを考えればいい。そこで，断辺に分割して点対称移動を繰り返して互いに移り合うことができる 2 つの図形を**点対称分割合同**と呼ぶことにしよう。そうすると今考えている問題は『同面積の多角形は互いに 点対称分割合同か？』といい直せる。

花子がさっき言ったように，底辺が平行で高さの等しい同面積の三角形と長方形は，点対称分割合同だ。それと向きのそろった 2 つの長方形も点対称分割合同だったね。うん，うまく行きそうだけど，一般の多角形を相手にするとき，何か問題がないかな？」

「えーと。最初に三角形に分割して，それぞれを横幅一定の長方形にするのよね。あ，そのとき長方形の向きがそろっていないと，幅が一定でも貼り合わせられないわ。逆に，長方形の向きさえそろえられれば，横幅は自由になるわけよね。それを積み重ねるのは平行移動だし……そうよ，それさえできれば，一定の向きに置いた一定幅の長方形を経由して両方の多角形は点対称分割合同よ。つまり，長方形の向きを 点対称分割合同で自由に変えられるかどうかだけが問題なんだわ。……あ，ちょっと待ってね」

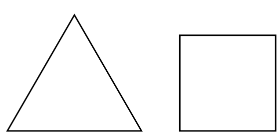
花子は，新しい紙を持ってきて，猛然と図を描き始めた。

「まず，こう切って。それからこう切れば……



やったわ。平行移動だけで長方形の向きが変えられるじゃない」

問題 5. 図のように置かれた同面積の正三角形と正方形が，互いに点対称分割合同であることを切り貼りによって示せ。



正三角形を 15° 回転しても，やはり互いに点対称分割合同であることを切り貼りによって示せ。

「お，だいぶ慣れてきたな。そうだね。これで，多角形は，面積が等しければ，点対称分割合同だということが分かった。この結論は『ハドヴィゲール-グリュールの定理』と呼ばれてる。そこでだ。例えば，矢がすり模様なんかだと矢羽根に向きがあるので 180° 回転すると反対向きにになっちゃうだろ。だから，ちょっと難しくなるけど，……」

4　周ベクトル図

「分かってるわ。パパが怪しげな用語を持ち出して来たときから，魂胆は見え見えなのよね。点対称移動はなし。平行移動だけで，同じことができるかって言うんでしょう。言ってみれば，**平行分割合同**かどうかね。うーん……今の点対称分割合同の話で点対称移動が必要だったのは，三角形から長方形への変換だけだったから，問題はそこだけよね」

花子は，また紙と鉛筆を握って考え始めたが，しばらくしてため息をついた。

「ダメね。どうしてもいくつかの断片は回転させる必要があるみたい。かといって，何か巧妙なやり方がないとは限らないし……いいわ，マンガも読みたいし，降参よ」

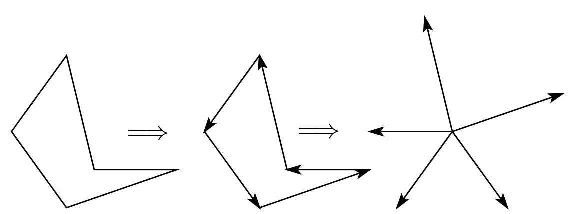
父は満足そうにほほえんだ。

「うん，これはちょっと難しいからな。実は，同面積というだけでは多角形同士は 平行分割合同にはならないのさ」

「え，どうしてそんなに確信が持てるの？誰かが天才的なやり方を見つけないとも限らないでしょ」

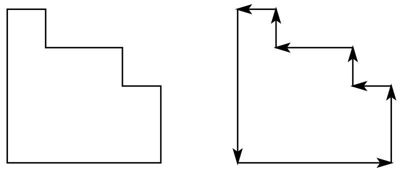
「どんな天才にも絶対に不可能であることを厳密に証明するのこそ，数学の醍醐味さ。

多角形の辺に矢印をつけて，反時計回りに多角形をグルッと一周するようにするよ。こういう矢印のついた線分をベクトルと言うのは知ってるね。それで矢印が同じ一点から出るように図を書き直す。例えばこんな具合だ。



名前があった方がいいね。右の放射状の図を左の多角形の**周ベクトル図**と呼ぶことにしよう」

「ふーん。でも，ほら，こんな階段状の図だと，同じ方向のベクトルがたくさん出て来るから，重なって見にくくなるわよ」



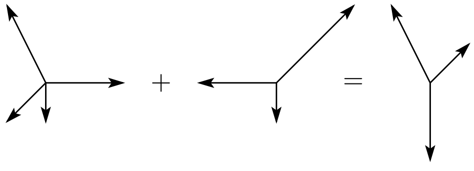
「そういうのは足し合わせて長いベクトルにしちゃうんだ。それだけじゃないよ。向きが反対のベクトル同士は打ち消し合う。つまり長い方から短い方を引いちゃう。そうするとこの階段の周ベクトル図はどうなる？」

「えーと，横向きのベクトルは，階段の上辺 3 つと下辺で，互いに打ち消し合うし，縦向きもそうだから，あれ，無くなっちゃった。……やーだ。要はベクトルを足し算するのよね。多角形を一周するんだからゼロになるの当たり前じゃない。ほら，さっきの図だって，学校でやったようにちゃんとベクトルの足し算すればゼロになるわよ」

「おや，学校で習ったこともたまには身に付いてるんだな。でも，ここは話が違うのさ。向きが同じか反対のベクトルをつないだりキャンセルしたりする以外は，そのまま図に描く」

「変なの」

「ここからが話の核心だ。周ベクトル図同士の足し算と言うのを考えるよ。これは簡単だ。方向の同じベクトル同士はつなぐ。反対なら互いに打ち消し合う。方向が同じでも反対でもなければほっとく。例えば



というわけだ。互いに平行でないベクトルは無数にあり，足し算をするときにそれらは無関係として扱うから，周ベクトル図の集団は，数学的に難しく言うと『無限次元実ベクトル空間』の例になるんだけど，今はそんなことはいい。大切なのは，分割や点対称移動，平行移動との関係だ。多角形を点対称移動すると，周ベクトル図はどう変わる？」

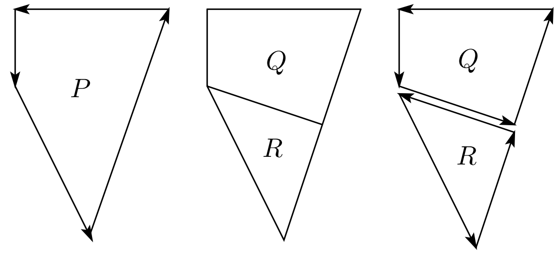
「そんなの簡単よ。全部のベクトルが逆向きになるんだから，周ベクトル図も 180° 反転するわ。ついでに答えておくけど，平行移動しても周ベクトル図は，変わるわけないわね。当たり前よ」

問題 6. 布地の両面に同じ矢がすり模様があるとすれば，裏返すという操作が一定方向の軸に対してなら許される。その裏返し操作で周ベクトル図はどう変化するか？

「そうさ。次は分割だ。今，多角形 P があるとして，それを Q，R という 2 つの多角形に分割したら，P，Q，R の周ベクトル図の関係はどうなるかな？」

「ははあ，パパが周ベクトル図同士の足し算なんてものを持ち出した思惑が分かって来たわ。P の周ベクトル図は，Q と R の周ベクトル図の和になるって言うんでしょ。

でも，どうしてかしら……あ，そうか。P を Q と R に分けている辺を考えると，その辺に関する周ベクトルは，Q と R では反対向きなのね。だから，両方の周ベクトル図を足すとそこの部分は打ち消しあう。一方，P で考えるとそんな辺はそもそもないのだから，初めから周ベクトル図には出てこない。それと，P の 1 つの辺が Q と R で 2 つに分かれている場合，それらの辺に関する周ベクトルの向きは，全部同じだから，Q と R の分を足すと P の分に戻る」



「ははは，読まれちゃったか。でもご名答だ。で，元の問題に戻るけど……」

「あ，分かったような気がするわ。つまり，多角形をどう分割しても，各断片の周ベクトル図の総和は，元の多角形の周ベクトル図になるってことよね。それでもって，平行移動しても周ベクトル図は変わらないのだから，互いに 平行分割合同な多角形って，同じ周ベクトル図を持たなきゃいけない」

「そう。もう分かったろう。平行四辺形の周ベクトル図は，どれもさっきの階段図形と同じでゼロだ。もちろん長方形もそうだ。一方，三角形の辺はどれも平行でないから，周ベクトル図はゼロではない。よって，三角形と長方形は 平行分割合同ではあり得ない」

「確かにね。でも，そうでないと聞いてかえって安心したわ。ママがね，矢がすりのいい布地を手に入れたって言ってたのよ。気の早いことに，私が大学を卒業するときの晴れ着がどうのって。そんなの 5 年近くも先でしょ。虫に食われちゃうのは確実よ。そこにパパが登場して来て，パッチワークで晴れ着を作ってくれても，ちょっとねえ……」

「お，面白いじゃないか。つぎはぎで，しかも，ところどころ矢の向きが反対っていうのも斬新かもしれない。是非，そういうのにしたらどうだ。それに分からんぞ。そういう布地なら，回転はだめだけど，裏返しにするって手が使えるかもしれないし。

問題 7. 平行移動のほかに一定方向の直線を対称軸にして多角形を裏返す操作が許されたとしたら，同面積の多角形はどれも分割合同になるだろうか (ヒント: 周ベクトルのうち対称軸に対して垂直なものだけを考えよ)？

まあ，そんな先のことはさておき，実は，多角形同士が 平行分割合同であるための必要十分条件は，周ベクトル図と面積が等しいことなんだよ」

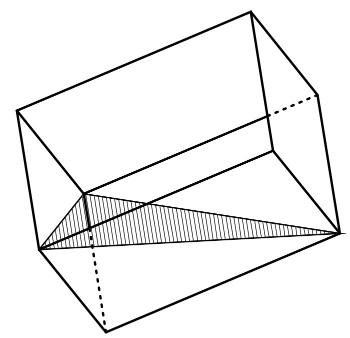
「なるほどね。でも，その証明はいいわ。もう，だいたい分かったし，疲れちゃったもの」

5　6 分の 1 升

父の残念そうな顔を尻目に，花子が再びマンガを手にしたやさき，台所から声がした。

「ねえ，花子，お米を研ぐのを手伝って。1/6 升よ」

ここで「イヤ」と言うと，かえってマンガの続きにさしつかえるという判断から，花子は素直に台所に直行し，1 升マスを使って器用に 1/6 升の米を量った。これは，父の伝授によるもので，マスの底面の対角線と上面の頂点を通る面 (下図の斜線の面) が水平になるようにマスを傾け，水や米を盛るのだ。



米を研ぎ終わって，居間に戻って来ると，ふと新しい疑問が頭をよぎった。

「ねえ，パパ，あの 1/6 升の量り方だけど，元のマスと比べると，底面積が半分で高さの等しい三角錐だから体積が 1/6 って言うのはわかるのよ。でも，そもそも角錐や円錐が角柱や円柱の 1/3 といわれても？……あ，バカにしないでね。数学の時間に積分の応用でやったから，理屈では分かってるのよ。でもね，図で見てパッと納得できなのかなと思って……例えば，円錐は無理としても，三角錐なら同じのを 3 つ持って来て，底面積と高さが同じ三角柱を組み立てられるとか」

「できないかい？考えてごらん」

花子は，図を描いて考えてみたが，できそうもないことはすぐに分かった。

「ダメね」

「切り貼りしたらできないかい？」

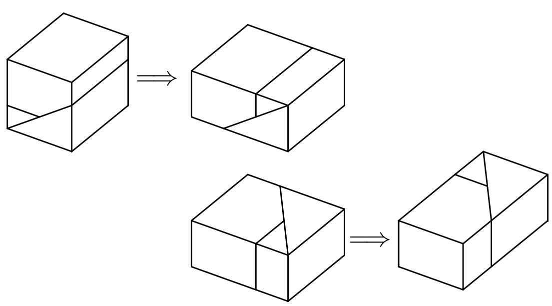
「さっきの問題の立体版よね。それも考えたんだけど，立体の切り貼りを考えるのはややこしくて……うーん，でも平面でうまくいくんだから，立体でもできると思うわ。ただどうやればいいのか」

「さっきみたいに基本とする図形を決めて，順を追っ

て考えたら」

「そうね。まず，基本図形はなんと言っても直方体ね。そうすると角柱は，……ああ，これは簡単ね。底面は多角形なのだから，それに垂直な面で切れば，底面を長方形にできる。ということは，全体は直方体になるわ。

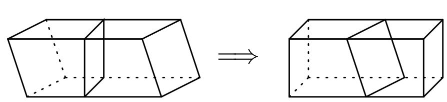
次は，寸法は違うけど体積が同じ直方体同士ね。高さが同じなら，やっぱり底面だけ合わせれば済むのだけど……あ，そうか。直方体は，3 方向どっちからみても条件は同じなんだから，先に高さを合わせちゃえばいいのよ。次に奥行きと幅を合わせる。こんな具合ね。



ということは，角柱は，体積が同じならどれも分割合同ね。まず，直方体に変形しちゃって，今のやり方で幅・高さ・奥行きを調整すればいいから」

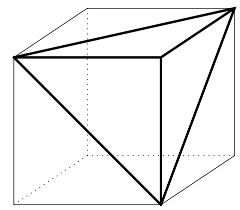
「角柱ったって，たとえば平行六面体みたいに傾いてるのもあるよ」

「平行六面体って，ひしゃげた箱みたいな形のやつでしょ。大丈夫よ。平面のときの平行四辺形と同じで，柱の向きに垂直な面で切ってつなぎ直せばいいもんね。



でも，角錐が問題なのよね。三角形のときみたいに，断片のいくつかを回転させれば，直方体になるような気がするんだけど……うーん……できないわ……どうすればいい，パパ？」

「分からないだろ。実は，それについては，デーンの定理というのがあるのさ。話を簡単にするため，一辺の長さが 1 の立方体を考えるよ。それを 3 頂点を通る平面で切ってできる図のような三角錐を考える。

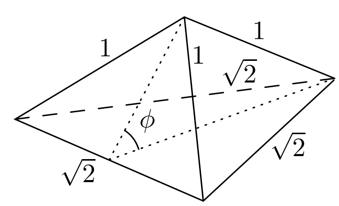


この三角錐が 6 つあるとき，それらを合わせたものと元の立方体が分割合同かというと……」

父は，うまく話題に載ってきた娘を相手に，再び得々と講義をし始めた。花子は,「しまった」と思ったがちょっと興味もあるので，マンガをあきらめ，講義に聴き入ることになった。

要点は，こういうことだった。

多面体の辺全部を適当に並べて，それぞれの長さ l とその辺を挟む 2 つの面のなす角 α の対 $\langle l, \alpha \rangle$ のリストを作る。上の立方体の場合，各面はどれも垂直に交わり，12 辺全部が長さ 1 だから，対 $\langle 1, 90^\circ \rangle$ が 12 個並んだリストになる。一方，問題の三角錐の場合，立方体を切ってできた新しい面と元の立方体の面が交わる角度を ϕ とすると，対 $\langle 1, 90^\circ \rangle$ と対 $\langle \sqrt{2}, \phi \rangle$ が 3 つずつ並んだリストになる。



問題 8. $\cos\phi$ を求めよ。それを用いて ϕ が 180° の有理数倍でないことを証明せよ。

今，2 つの多面体が分割合同とし，それぞれについて，辺の長さと角度の対をリストにしたものを $\langle l_1, \alpha_1 \rangle, \langle l_2, \alpha_2 \rangle, \ldots, \langle l_r, \alpha_r \rangle$ と $\langle m_1, \beta_1 \rangle, \langle m_2, \beta_2 \rangle, \ldots, \langle m_s, \beta_s \rangle$ とする。このとき，条件

$$f(\alpha + \beta) = f(\alpha) + f(\beta), \quad f(180^\circ) = 0$$

を満たすように各角度 α に対して実数 $f(\alpha)$ を割り当てると，$l_1 f(\alpha_1) + l_2 f(\alpha_2) + \cdots + l_r f(\alpha_r)$ と $m_1 f(\beta_1) +$

$m_2 f(\beta_2) + \cdots + m_s f(\beta_s)$ は，必ず等しくなることが示される。

問題 9. q が有理数なら $f(q\alpha) = qf(\alpha)$ であることを示せ。よって，α が 180° の有理数倍であれば，$f(\alpha) = 0$ である。

ここで，問題の三角錐 6 つと，元の立方体とが分割合同だと仮定し，それぞれのリストを上の関係に当てはめると，どんな割り当て f に対しても

$$0 = 12f(90^\circ) = 18f(90^\circ) + 18\sqrt{2}f(\phi) = 18\sqrt{2}f(\phi)$$

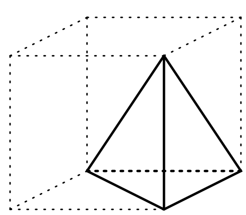
が成立しなければならない。ところが，ϕ が 180° の有理数倍でないことから，$f(\phi) \neq 0$ となる割り当て f が存在することが示される。これは矛盾だから，立方体と問題の三角錐 6 つは分割合同ではあり得ない。

父の講義が終わり，花子が定理の結論を受け入れたときには，外はもう暗くなっていた。母が台所から顔を出した。

「随分，熱心にやってたじゃない。もういいんでしょ。ご飯できてるわよ」

夕食のテーブルについた父は，ビールを自分でグラスに注ぎながら，大きめのサイコロ形に切ってその隣に添えられた豆腐を妙に熱心に眺めている。

冷やっこは好物だから，少しもらおうと箸を出しかけた花子をさえぎって，父は，やおらナイフを取り，図の太線のように三角錐を豆腐から器用に切り出した。



「うん，これならいいぞ。どうだ，花子。この三角錐なら，さっきのと違って 6 つ集めれば立方体が作れる。だから，角錐が角柱の 3 分の 1 だということも納得がいくだろ」

問題 10. この三角錐を 6 つ集めて立方体にするにはどうすればいいか？また，この三角錐について，先のような辺の長さと角度のリストを作るとどのようになるか？

花子は，あきれてしばらく母と顔を見合わせていたが，悦に入っている父親の隙をみて，豆腐の三角錐をつまみ上げ自分の口に運び，一気に呑み込んだ。

「ああ，おいしかった。パパのビールのつまみは，まだ 6 分の 5 もあるからこれくらいはいいわよね」

父親は，ポカンとして皿を見つめていたが，やがて自分が崩した豆腐の残骸を舐めながら，寂しくビールをすすり始めた。

参考文献

[1] 「天書の証明」アイグナー + ツィーグラー 著，蟹江幸博 訳，シュプリンガー・フェアラーク東京，2002 年

[2] 「面積と体積」ボルチャンスキー + ロプシッツ 著，木村君男 + 銀林浩 + 筒井孝胤 訳，東京図書(株)，1994 年

[3] 「高校生に贈る数学 III」志賀浩二 + 砂田利一 著，岩波書店，1996 年

[4] 「分割の幾何学　デーンによる 2 つの定理」砂田利一 著，日本評論社，2000 年

[5] 「数学者シャーロックホームズ」瀬山士郎 著，日本評論社，1996 年