数理的ヒラメキで解くパズル（解答編）

筑波大学 数理物質系 数学域
坂井 公

ここに挙げるのは一つの解答例である。より柔軟な発想をもって望めば，さらに素晴らしい解答が得られるかもしれない。そういうのを思いつかれたら，御一報頂けるとうれしい。

問題 1 (互いを割り切らない数の集合)**.**
（a）$1, 2, \ldots, 99$ という数の集合から 50 個の数を選び，そのどの 2 つも，一方が他方を割り切るというようなことがないようにしてほしい。（b）同じような性質を持つ 51 個の数を選ぶことができないことを証明してほしい。

解答例

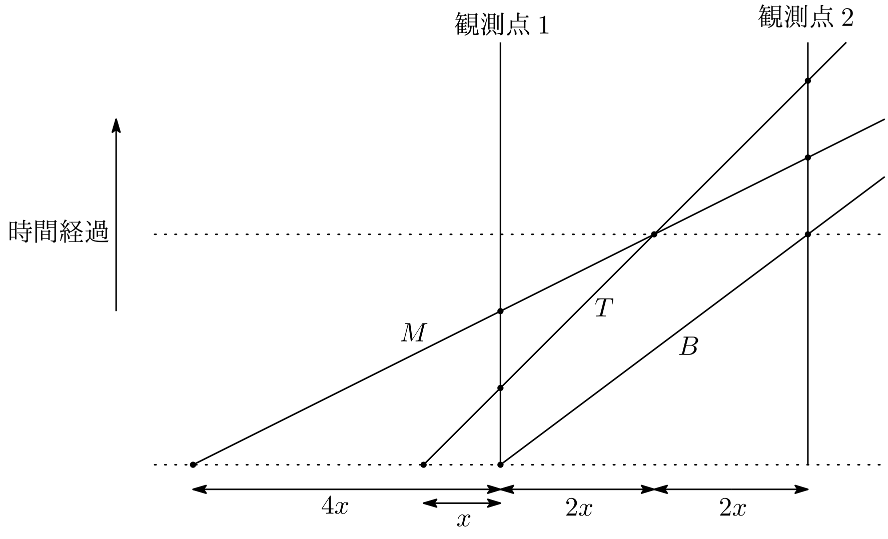
（a）50，51，...，99 という 50 個の数を選ぶと良い。

（b）1 から 99 までの整数の集合を次のようにグループ分けする。まず，$G_1 = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64\}$ である。次に $G_3 = \{3, 6, 12, 24, 48, 96\}$ である。以下，同様に奇数 k に対して $G_k = \{k, 2k, 4k, \ldots\}$ と定める。すると，1 から 99 までの整数の集合は $G_1, G_3, \ldots, G_{99}$ という 50 個のグループに分かれるが，そこから 51 個の数を選べば，そのうち 2 つの同じグループから選ばざるを得ない。この 2 つの数は，明らか一方が他方を割り切る。

問題 2 (等間隔で通過するバスとトラックとオートバイ)**.**
バスとトラックとオートバイがこの順番で，動かない観察者の前を等しい時間間隔をおいて通り過ぎる。その 3 台は道路の先の方にいる別の観察者の前を，前と同じ時間間隔をおいて通り過ぎるが，そのときはバス，オートバイ，トラックの順だ。オートバイの時速がトラックの 2 倍だとしたら，バスの時速はトラックの何倍か。

解答例

B で表したバスが最初の観察者の前を通り過ぎてからの 3 台の乗り物の動きを図示しよう。



トラック T は，速度 v として，そのとき最初の観察者から x マイル離れていたとする。その時点でオートバイ M は最初の観察者から $4x$ マイル離れている。なぜなら，トラックが x マイル走り最初の観察者の前を過ぎるときには，x/v 時間が経過しているからだ。よって，さらに x/v 時間経過してから最初の観測者の前を通過するので，それまでに $(x/v + x/v) \times 2v = 4x$ マイル走る必要がある。

今度はバスが 2 番目の観察者の前を通り過ぎるときの，それぞれの乗り物の位置を考えよう。

このとき，オートバイは 2 番目の観察者から $x/v \times 2v = 2x$ マイル離れたところにいる。トラックはその距離を進むのにオートバイの 2 倍の時間がかかるのだから，このことは，その時点でオートバイとトラックは同じ地点にいることを意味する。

バスが最初の観察者の前を通り過ぎた時点で，トラックはオートバイより $3x$ マイル先行していたから，オートバイがトラックに追いついたこの時点では，それからトラックは $3x$ マイル，オートバイは $6x$ マイル進んでいる。よって，2 人の観察者のあいだの距離は $4x$ マイルで，バスはその距離を，トラックが $3x$ マイル移動するのと同じ時間で移動する。したがってバスの速度はトラックの 4/3 倍だ。

【解答 2】 t を乗り物が観察者の前を通り過ぎるときの共通の時間間隔としよう。オートバイは最初の観察者のところにはトラックの t 時間後に着き，2 番目の観察者のところにはトラックの t 時間前に着く。よってオートバイは，2 人の観察者のあいだの距離をトラックより $2t$ 時間短い時間で移動する。オートバイはトラックの 2 倍の速度で移動するから，2 人の観察者のあいだの距離を半分の時間で進む。よって 2 人の観察者のあいだの距離を進むのにトラックは $4t$ 時間かかり，オートバイは $2t$ かかったはずだ。

さて，バスは最初の観察者の前をトラックの t 時間前に通り過ぎ，2 番目の観察者の前をトラックの $2t$ 時間前に通り過ぎる。トラックは 2 人の観察者のあいだの距離を進むのに $4t$ 時間かかるから，バスは同じ距離を進むのに $3t$ 時間かかることになる。したがって，バスの速度はトラックの $\frac{4}{3}$ 倍である。

問題 3 (廊下を覆う敷物)**.**
廊下が何枚かの長方形の敷物で完全に覆われている。それぞれの敷物の幅は廊下の幅と同じだ。敷物は重なっていることもある。(a) 敷物を何枚か取り除いて，取り除かなかった敷物の位置は変えずに，廊下のどの場所をとっても敷物で覆われていて，なおかつ 3 枚以上の敷物で覆われている箇所がどこにもないようにできることを証明せよ。(b) さらに敷物を何枚か取り除いて，残った敷物が互いにまったく重ならないようにして，それでも廊下の半分以上が覆われているようにすることができることを証明せよ。

解答例

(a) 廊下が左から右へと延びていると考えよう。床のどこかが 3 枚（以上）の敷物で覆われているとする。その場所を覆っている敷物のうち，左端がいちばん左側にきているものと，右端がいちばん右にきているものを残して，それ以外を全部除去しよう。その 2 つが同じ敷物なら，その 1 枚だけを残す。そうしても残した敷物で床全体は覆われたままだ。こうして余分な敷物を取り除いていくことで，どの場所もせいぜい 2 枚で覆われている状態に到達できる。

(b) 問題 (a) より，3 枚以上の敷物で覆われている場所は床のどこにもないと仮定することができる。また，ほかの敷物ですっかり覆われている，もしくはほかの敷物の上に全体が載っている敷物も取り除くことができる。さて，敷物に通し番号を振ろう。いちばん左側の敷物を 1 とするところから始める。廊下の左端に届いている敷物は 1 枚しかなく，それが 1 番になる。この 1 番に接しているか 1 番の一部に重なって敷物はただ 1 枚で，それが 2 番になる。このように続けていくと，奇数番の敷物どうしが重なることもなければ，偶数番の敷物どうしが重なることもない。しかし全部の敷物をあわせると廊下全体を覆われる。もしも偶数番の敷物全部で覆っているのが廊下の半分未満であり，奇数番の敷物全部で覆っているのも廊下の半分未満ならば，敷物全部でも廊下を覆うことはできない。従って，残った敷物で廊下の半分以上を覆うように奇数番の敷物全部か偶数番の敷物全部かを取り除くことが可能である。

問題 4 (101 匹の牛の群れ)**.**
101 頭の牛の群れがあり，それぞれの牛の重さは整数ポンドとする。どの牛でも 1 頭を群れから取り除くと，残りの牛は 50 頭ずつの 2 つの集団に分けることができて，2 つの集団の牛の重さの合計が等しくなる。このとき，どの牛の重さも同じであることを証明しなさい。

解答例

それぞれの牛から同じポンド数を差し引いても，問題の仮定は変わらない。つまり，どの牛を群れから取り除いても，重さが同じになる 50 頭ずつの 2 集団に分けることができる。そこでいちばん軽い牛を選んで，その重さを分をそれぞれの牛の重さから差し引くことにしよう。すると，重さ 0 ポンドの牛と，そのほかの牛 100 頭となる。

同じ重さの 2 つの集団に分けることができるのだから，残り 100 頭の重さの合計は偶数である。奇数の重さの牛はいるだろうか？ もしいたら，その牛を群れから除き，かわりに重さ 0 の牛を入れると，100 頭の重さの合計は奇数になってしまい，同じ重さの 2 つの集団に分けることはできないから，どの牛の重さも偶数ポンドだ。そこで，問題をもう一度変更して，すべての重さを 2 で割ると，上と同じ議論が適用できて，またしても重さが奇数の牛はいないと結論できる。そうしたらまた 2 で割り，... ということを続けるが，すべての重さは 0 でないかぎり，ずっと 2 で割り続けることはできないから，牛はみな同じ重さなのである。

問題 5 (桁数の合計)**.**
2 つの数 2^{2002} と 5^{2002} を通常の 10 進数に展開したとき，その桁数の合計はいくつだろうか？

解答例

2^{2002} の桁数を m，5^{2002} の桁数を n で表すとしよう。$n+m$ を求めたい。2 つの数の積をとると 10^{2002} となり，これは 2003 桁である。どんな正の整数 k に対しても 10^k は $k+1$ 桁の最小の数であるということが役に立つ。

n は 5^{2002} の桁数だから，$10^{n-1} < 5^{2002} < 10^n$ が得られる。なぜなら 10^n の桁数は $n+1$ で 5^{2002} の桁数よりも多いから 10^n の方が大きい。同じように考えて，$10^{m-1} < 2^{2002} < 10^m$ である。2 つの不等式をかけると $10^{m+n-2} < 10^{2002} < 10^{m+n}$ が得られ，よって $m+n-2 < 2002 < m+n$ となる。したがって $m+n = 2003$ となり，桁数の合計は 2003 とわかる。

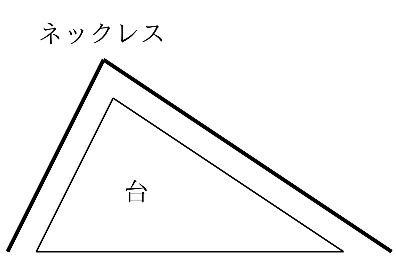
問題 6 (見えない点)**.**
1 枚の紙に目に見えないインクで点が 1 つ打ってある。また同じ紙に普通のインクで四角形が 1 つ描いてある。その点が四角形の内部にあるかどうか知りたいのだが，点が見える特殊なメガネをかけている人がいて，直線を 1 本引くと線のどちら側に見えないインクの点があるかを教えてくれる。もし点が直線上にあれば，そう教えてくれる。目に見えない点が四角形の内部にあるかどうかを確実に知るには，最低何本の直線を引く必要があるだろうか。

解答例

直線を 4 本引いて点が四角形の内部にあるかどうかを判定するのは簡単だ。正方形の各辺に沿って線を引けば良い。しかし，3 本の直線だけ判定することもできる。それには最初の線を四角形の対角線に沿って引き,。四角形を 2 つの三角形に分けるようにすれば良い。こうすると，点がある可能性は，その 2 つの三角形のどちらかだとわかる。あとは，ここの残り 2 辺に沿って線を引けば，点が正方形の内側にあるか外側にあるかがわかる。もし点が最初の線の上にあったら，どうすれば良いかは，自分で考えられたい。

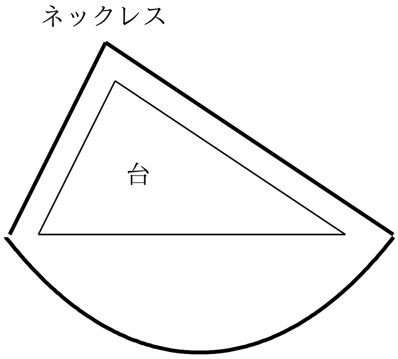
2 本の直線では足りない。それは，2 本の直線では有界領域を区切ることができないからだ。2 本の直線をどのように引いても，ある角で交差する 2 本の半直線に挟まれた非有界領域（あるいは 2 本の平行線に挟まれた非有界領域）の内部のどこにでも点がくる可能性がある。従って，四角形の内部に点があった場合,「内部にある」と確実に言い切る手段は,（たまたま点が 2 本の直線の交点であった場合を除き）存在しない。もちろん，正方形の外にあった場合は，運がよければ「外にある」と言い切れることがある。

問題 7 (無造作に掛けられたネックレス)**.**
下図のように断面が三角形の台があり，ネックレスの鎖が掛けられている。台は左面の傾斜が右面の傾斜より急である。もし，台と鎖の間の摩擦がまったくなかったとしたら，鎖は左右どちらかに滑り落ちるだろうか？それとも安定なままだろうか？もちろん，鎖はどこもまったく均質であるとする。



解答例

台を持ち上げ，さらに図のように鎖を輪にして垂らした状況を考えて見よう。

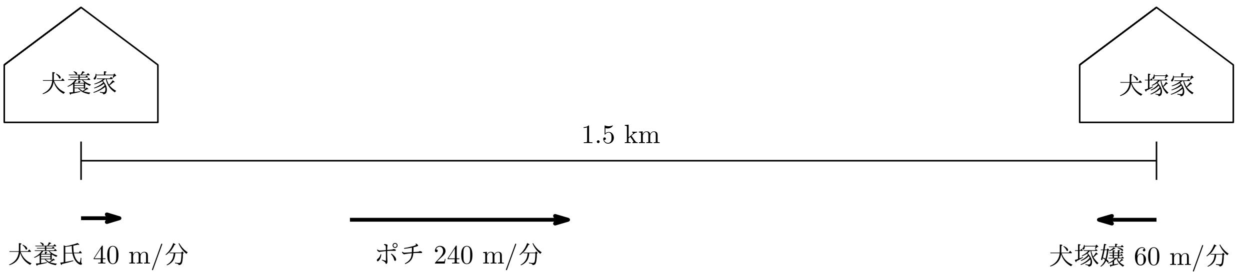


垂れている部分はもちろん対称である。従って上の台に載っている部分が釣り合っていなければ，鎖は左右どちらかに回転してしまうが，永久運動は不可能だから，そんなことはありえない。

問題 8 (犬と散歩)**.**
犬養氏は，毎朝，飼い犬のポチを連れて犬塚家のほうへ散歩する。犬塚嬢も同時刻にスタートし，犬養家にほうに向かって散歩する。両家はちょうど 1.5 km 離れており，犬養氏はゆっくりと分速 40 m で，犬塚嬢はそれよりは少し速く分速 60 m で歩いていく。

ポチは，スタートするやいなや，喜び勇んで分速 240 m で駆け出し，犬塚嬢のところまで来ると，くるりと向きを変え同じ速度で飼い主のほうに戻っていく。そして，犬養氏のところまで戻ると，再び向きを変え，また犬塚嬢に向かって走っていく。

こうして，ポチは，飼い主と犬塚嬢が出会うまでの間，2 人の間を分速 240 m で行ったり来たりする。ポチの走る距離は延べで何 m になるだろうか？



解答例

犬養氏と犬塚嬢が出会うのは，散歩を始めてから

$$1500/(40+60) = 15$$

分後である。その間，ポチは分速 240 m で走り続けているので，その延べ距離は

$$240 \times 15 = 3600$$

メートルである。

問題 9 (壷と百円玉と五十円玉)**.**
壷の中に百円玉を 49 枚，五十円玉を 99 枚入れる。壷をよく振ったあと，コインを次々に取り出していく。一方のコインが全部取り出されたあと，壷の中に残ったコインを全部もらえるとしたら，その期待値は何円くらいになるだろうか？

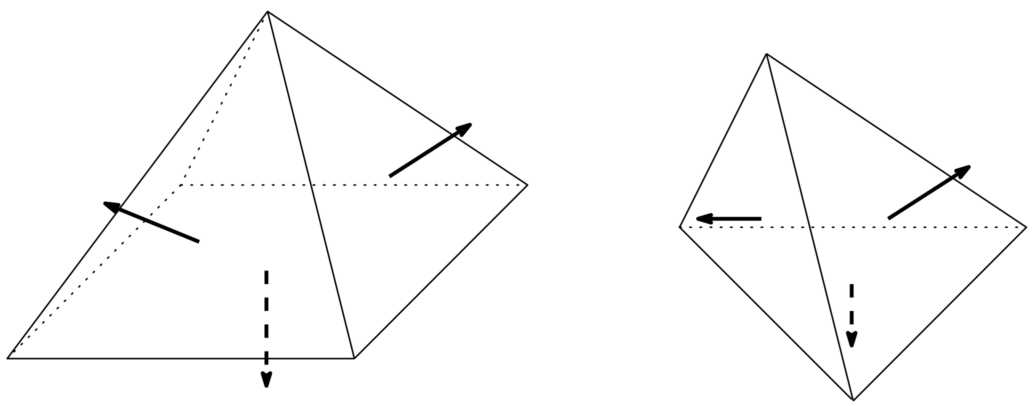
解答例

百円玉が残った場合，五十円玉が残った場合，それぞれ何枚残るかの確率を計算しようとすると面倒である。ここは 1 枚のコインに着目するといい。それが残る確率は，五十円玉の場合，取り出されるのが他のどの百円玉よりも後になればいいから，1/50 である。百円玉の場合，取り出されるのが他のどの五十円玉よりも後になればいいから，1/100 である。**期待値の加法性**により，問題の答えは各コインが残ることで得られる期待値を加えればよいから，

$$50 \times \frac{1}{50} \times 99 + 100 \times \frac{1}{100} \times 49 = 148$$

である。

問題 10 (面に垂直なベクトル)**.**
下のようなピラミッド型の多面体とそれを半分にした多面体を考えよう。ピラミッドの側面は正三角形とする。多面体の外側に向かうベクトルで，各面に垂直で大きさがその面の面積に比例するものを考える。このときそのベクトルの総和をそれぞれの多面体について計算してほしい。



ピラミッド　　ピラミッド半分

解答例

多面体を空中に浮かせて，中に高圧の空気を入れたと考えてみるといい。多面体は内部から空気圧を受けるが，各面が受ける力は，その面に垂直外向きで大きさが面積に比例する。もし，その力が釣り合っていないと多面体が動き出してしまう。

問題 11 (壷とチップ)**.**
次のような賭けを考えよう。

A，B が自分の色のチップを決め，何枚かずつ壷の中に入れる。そして第三者に，目をつむって中から 1 枚取り出してもらう。次にもう 1 枚取り出し，それが最初のと同じ色ならば，さらにもう 1 枚取り出してもらう。こうして違う色のチップが出てくるまで続け，違う印のチップが出てきたら，1 ラウンド終了である。

最後に出てきた違う色のチップは壷に戻して，よく壷を振る。このラウンドを何度も繰り返し，壷から最後のチップが出てきたとき，それが自分の色だったら勝ちというものだ。

最初に A が a 枚，B が b 枚のチップを最初に入れたとき，それぞれの勝率はどうなるか?

解答例

取り出したチップを壷に戻すことなしに単純に最後のチップの印で決めるなら，A，B の勝率がそれぞれ $\dfrac{a}{a+b}$ と $\dfrac{b}{a+b}$ であることは明らかだが，違う印のチップが出てきたときにそれを壷に戻すことで状況がガラッと変わる。

もちろん $a>0, b=0$ のときは確実に A の勝ち，$a=0, b>0$ のときは確実に B の勝ちである。ところが，$a>0, b>0$ のときは，意外なことに，a と b の値によらず，勝率はともに 1/2 なのだ。

この枚数に無関係に勝率が一定になるという結論は，最初に取り出されたチップがどちらであるかに応じた確率を計算し，数学的帰納法を駆使しても得られるが，考える時点を一足飛びに先に進めることで，ほとんど計算なしで導くことができる。

勝者が決まる最後のラウンドを考えてみよう。この時点では，壷の中には同じ印のチップしか入っていない。では，その 1 つ前のラウンドでは，どうであったかというと，2 種類のチップが入っていたが，一方のチップだけが先に全部取り出されてしまったことになる。このとき，どちらの種類のチップが残りやすいかという確率を考えてみよう。これは，厳密に言えば，2 種類のうち一方が他方よりすべて先に取り出されるという場合の条件付き確率であるが，明らかに，一方の印のチップがすべて他方よりも先に取り出される可能性と，すべて他方よりも後に残される可能性は等しいから，この可能性は 5 分 5 分だ。厳密に計算するなら，このとき壷に残っている 2 種のチップの枚数をそれぞれ i と j とすれば，

条件なしの場合，どちらも確率 $\dfrac{i!j!}{(i+j)!}$ で起こる。

問題 12 (引きつけ合うコイン)**.**
互いに引きつけ合う力を持つコインが 101 枚ある。最初に 2 つの壷に 1 枚ずつ入れておき，他の 99 枚は，1 枚ずつ壷へ向けて放り投げる。

コイン同士が引きつけ合う力によって，投げたコインは各壷に入っているコインの枚数に比例した確率で，その壷の中に落ちる。すなわち，左の壷に a 枚，右の壷に b 枚のコインが入っているなら，それぞれの壷に入る確率は $\dfrac{a}{a+b}$ と $\dfrac{b}{a+b}$ である。

99 枚のコイン投げが終わった後に，少ないほうの壷に入っているコインの枚数の期待値はいくつだろうか？

解答例

左の壷の中のコイン枚数には 1 枚から 100 枚までの可能性があるが，驚いたことにそのどれもが等確率で生ずる。当然，1 枚から 50 枚までなら左の壷のほうがコインが少ないが，51 枚以上ならば右の壷のコインが少なく，その枚数は 50 枚から 1 枚までだ。そのいずれも均等な確率で生ずるなら，その枚数の期待値は明らかに 25.5 枚である。

問題は，左の壷のコイン数の分布が一様だということだ。そのことは数学的帰納法で証明できるが，次のように考えると，もっと簡単に示される。

99 枚の黒いカードと 1 枚の赤いカードを次のようにシャッフルすることを考える。最初の赤いカードをテーブルに置く。次に黒いカードを 1 枚取り，カードの上か下かに等確率で差し込む。さらにもう 1 枚カードを取り，今の 2 枚の山のどこかに差し込む。差し込み箇所は 3 箇所あるが，そのうちの 1 つを等確率で選ぶ。こうして，99 枚の黒いカードすべてを，すでにできている山のどこかにランダムに差し込んで最終的に得られた山を考える。

この山が，100 枚のカードを完全にシャッフルしたものと変わらないことは明らかだろう。従って山の中での赤いカードの位置はどこでも等しくありうる。

ここで，差込の各フェーズにおいて，赤いカードより上に $a-1$ のカードがあり，下に $b-1$ のカードがあった場合を考えよう。このとき，赤いカードより上の挿入位置は a 箇所あり，下の挿入位置は b 箇所ある。従って，新しいカードが赤いカードより上に入る確率は $\dfrac{a}{a+b}$ であり，下に入る確率は $\dfrac{b}{a+b}$ である。

つまり，このカードの実験は，壷の実験を事実上再現したものになっている。従って，最初から入っていた 1 枚ずつを除いて，コインの 2 つの壷への分かれ方は，黒いカードの上下への分かれかたに等しいので，まったく均等に生ずる。

問題 13 (サイコロの全部の目が出るまで)**.**
普通のサイコロを何度も振ることを考える。全部の目が出るためには最低でも 6 回振ることが必要だが，平均では，そのために何回サイコロを振ることが必要だろうか？

解答例

まず，念のため，ある目 A が出る確率が p の場合に A が出るまでにサイコロを振る平均回数は $1/p$ であることを確認しておこう。

明らかに，A 以外が n 回続く確率は $(1-p)^n$ である。だから，$n-1$ 回続けて A 以外が出て，n 回目に A が出た場合の回数が n であるから，上の期待値は

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(1-p)^{n-1}p = 1/p$$

となる。

上の級数の計算を面倒だと思う人もあろうが，次のように考えると直感的にもわかる。最初に大きな数 n を決めておき，この試行を毎日 1 回ずつ行う。サイコロを振った総回数が n に達したところでやめるとしよう。その場合，(大数の法則により) A が出た回数は全部で pn 回くらいだから，この試行には大体 pn 日かかる。従って，サイコロを振った回数は，1 日当たりでは平均 $n/pn = 1/p$ である。

さて，元の問題，つまり全部の目が最低 1 回ずつ出るまでの平均回数を求める場合に，ポンイトとなる考え方は，新たな目が出てから次の新たな目が出て来るまでを一段階とすることだ。例えば既に 1–4 の目が出ていて，5–6 が出ていない場合，次に 5–6 の目のどれかが出るまでにサイコロを振る回数の期待値は，先の考察により，6/2 であることがわかる。同様にまだ出ていない目が n 種類ある場合，次にそのどれかが出てくるまでにサイコロを振る回数の期待値は $6/n$ である。全部の目が出るまでには，まだ出ていない目の種類数が $6 \to 5 \to \cdots \to 0$ と段階的に下がっていくので，各段階の期待値を合算して，平均

$$\frac{6}{6} + \frac{6}{5} + \cdots + \frac{6}{1} = 14.7$$

回振れば，すべての目が 1 回は出る。

問題 14 (忘れて来た座席指定券)**.**
1000 人入りの劇場は満席だった。そこへ先頭を切って入場して来た客は，自分の座席指定券を忘れてきたことに気がついたが，会場係りに聞くのも面倒なので適当な席に勝手に座ってしまった。その後に入場して来た観客は，もちろん自分の席に着いたが，すでに自分の指定席を占拠されてしまった人は，これまた空いている席に適当に座ってしまった。

こうして，後続する観客たちは，自分の席がまだ空いていればその席に座ったが，そこが先に来た客に占拠されていれば，そのときまだ空いている席の 1 つにデタラメに座っていった。さて，最後に入場した客が自分の席に座れる確率は一体どのくらいだろうか？

解答例

最後の客が自分の席に座れる確率はきっかり 1/2 である。

このことを示すのは，会場の収容人数に関する数学帰納法でも可能だろうが，次の事実に気がつけば，大袈裟な推論に頼らなくても，簡単に証明できる。

その事実とは，最後の客（Z とする）が座るのは，最初の客（A とする）に指定されていた席か，自分の席のどちらかだということである。そもそも最初に A が座ったのが，A 自身の席であれば，全員が自分の席に着き何の問題も起こらない。また，A が座ったのが Z の席ならば，Z を除く全員が自分の席に着き，Z は A の席に着くことになる。そこで，A が座ったのが B の席だったとしよう。その場合，B が入場するまでは，皆，自分の席に着く。B は自分の席がふさがっているのをみて，適当に座ることになるが，それが A の席であれば，そこでねじれは解消し，あとは全員が自分の席に座る。B が Z の席に座れば，その後，Z 以外は自分の席に着き，Z は A の席に着くことになる。仮に B が C の席に座ったとすると，同様に C が入場するまでは皆，自分の席に着き，C が入って来たときにまた同じことが繰り返される。

こうして，途中がどうであろうと，Z が座るのは A の席か Z 自身の席であり，どちらに座るかは，どちらの席が先にふさがるかだけで決まる。自分の席を奪われた人がランダムに席に着くなら，A と Z の席のどちらが先にふさがるかは五分五分である。

問題 15 (天秤と分銅での計量)**.**
普通の天秤がある。分銅を 5 個用意して，0 グラムから 1 グラム刻みで隙間なくなるべく多くの種類の重さを量りたい。どういう重さの分銅を用意するのが最善だろうか？

量るときに，分銅は計量したいものと同じ皿に載せても反対側の皿に載せてもよいものとする。

解答例

1，3，9，27，81 グラムの分銅を用意すれば，0 グラムから 121 グラムまでを 1 グラム刻みで隙間なく量ることができる。

思考錯誤でもこの答えに辿りつくことは可能だが，3 進法を利用すると系統的に考えることができる。ただし，数字は 0，1，2 を用いるのではなく，-1，0，$+1$ (以下では `-`，`0`，`+`と表記）を用いる。こうすると 5 桁の 3 進数で -121 から $+121$ までの整数が隙間なく表せる。たとえば `+0--+` は

$$3^4 - 3^2 - 3 + 1 = 81 - 9 - 3 + 1 = 70$$

を表す。逆に 45 は `+--00` で表される。これを計量に利用して，数字 `+` に該当する分銅を計量したいものとは反対の皿に，数字 `-` に該当する分銅を計量したいものと同じ皿に載せて量れば，目的が達せられる。たとえば，45 グラムを量りたいなら，81 グラムの分銅を反対側に，27 グラムと 9 グラムの分銅を量りたいものと同じ側に載せればよい。

問題 16 (贋金判定問題)**.**
警察が金貨偽造団のアジトを手入れし，金貨がたくさん入った袋を 5 袋押収した。袋の中身は，全部が贋物であるか，全部が本物であるか，どちらかだとわかっている。本物の金貨 1 枚は 10 グラムであり，贋物はそれより 0.1 グラム少ない 9.9 グラムである。

0.1 グラム単位で 1 キログラムまで計れる精密な量りで，ただ 1 回計量することにより，各袋の金貨の真贋をすべて決定せよ。

解答例

2 進法を利用すると良い。

便宜上，袋に 0 から 4 までの番号を振る。0，1，2，3，4 番の袋からそれぞれ金貨を 1，2，4．8，16 枚を取り出し，それらをまとめて計量する。全部本物なら 310 グラムになるはずだが，贋金が混じっているとそれより軽くなるので，その程度でどの袋が偽であるかがわかる。

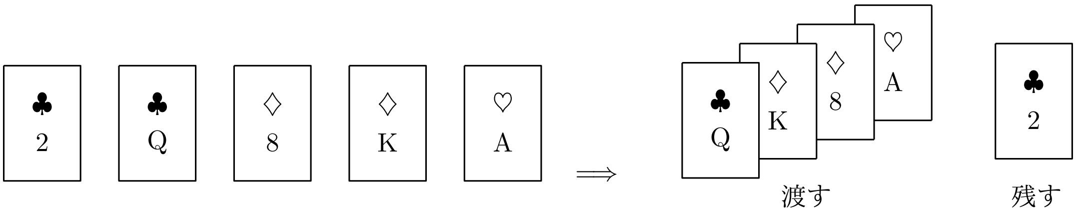
たとえば 308.9 グラムだったとすると，本来より 1.1 グラム軽いので贋金が 11 枚混じっている。11 は 2 進法で 01011 だから，0 番，1 番，3 番は贋物の袋で，2 番，5 番は本物の袋だと判定できる。

問題 17 (カード当て)**.**
ボブに見えないところで，(ジョーカーを除いた) トランプ 52 枚 1 組から観客がカードを 5 枚を選び出し，それを

アリスに渡す。アリスはその中から 1 枚を選んで手もとに残し，他の 4 枚をボブに渡す。ボブは，渡されたカードを見て，アリスが手もとに残したカードが何であるかを正しく推測するという。このマジックの種はどうなっているだろうか？

解答例

このマジックをやる上で，一番簡単な方法は，次のようなものだ。カードは 5 枚だから，そのうち 2 枚は同じスート[1] だ。その 2 枚のランクが x と y だったとしよう。ランクは，A (エース) が K (キング) に続き循環していると考えると，x と y はどちらかの方向に高々 6 隔たっているだけだ。x がその隔たりで見て「上」のカードとしよう。アリスは x を選び出し，手渡す 4 枚の先頭を y にする。さらに残りの 3 枚の並びを利用して隔たりを伝えるのだ。



たとえば，1 組のカードの順を，通常通り，♣A ♣2 . . . ♣K ◇A . . . ◇K ♡A . . . ♡K ♠A . . . ♠K の順と決めたとしよう。3 枚のカードが，たとえば ♣5 ♣J ◇3 のように昇順に並んでいたとすると，この順を「小中大」と呼び，隔たり 1 を表すものと約束する。さらに順「小大中」は隔たり 2 を表し,「中小大」は 3,「中大小」は 4,「大小中」は 5,「大中小」は 6 を，それぞれ表すものと約束すれば，アリスは選び出したカードの情報をボブに完全に伝えることができる。

具体例を 1 つ挙げよう。観客が選んだ 5 枚が ♣2 ♣Q ◇8 ◇K ♡A だとする。♣ が 2 枚あり，ランクは 2 と Q だ。Q と 2 では，2 が「上」のランクであり，Q から K, A, 2 と数えると，2 までの隔たりは 3 である。そこで，アリスは ♣2 を自分の手もとに残し，♣Q のうしろに，他のカードを「中小大」の順に並べることで隔たりが 3 であることを伝える。つまり，カードを ♣Q ◇K ◇8 ♡A の順に並べてボブに渡せば，ボブはカードの並びを見て，アリスの手もとのカードが ♣2 であることが分かる。

問題 18 (注視しあうラグビー選手たち).
15 人のラグビー選手たちがグラウンドにいる。各選手は，自分の一番近くにいる選手の動きから目を離さないように言われている。

このとき，どの 2 人の距離も，それぞれ違う場合には，誰にも動きが監視されない選手が必ず存在することを証明せよ。

解答例

選手の数が奇数の 15 人にあることがポイントである。

根拠を述べるには，最短距離にいる 2 人に着目するのが簡単だろう。どの 2 人の距離も，それぞれ違うという条件があるので，他のどの 2 人の距離もそれより遠いから，最短距離の 2 人は互いに監視しあうことになる。この 2 人の選手のどちらかが，他の誰かから監視されていれば，その選手は 2 重の監視を受けることになる。監視するものも，監視を受けるものも同数なのだから，1 人が 2 重の監視を受ければ，必ず監視を受けない者が生ずる。

そこで最短距離の 2 人は互いに監視しあうだけで，他からの監視を受けないとしよう。その場合，この 2 人はいないものとして，残りの 13 人だけで考えても同じことである。この 13 人の中で最短距離にいる 2 人に着目して同様に考えれば，結局，11 人の場合に帰着される。こうして，2 人ずつ組にして取り除いて行けば，全体で奇数人なので，最後に 1 人残るが，この選手は誰の監視も受けない。

[1] ♣，◇，♡，♠ の 4 種にわかれた各組をスートと呼ぶ

問題 19 (兵士たちの行進).
城の前では，毎日正午に兵士たちによるパレードが行なわれる。城門前の通りの東西両端に守衛所があり，それはちょうど 400 メートル離れている。その間に 20 人の兵士たちが適当な間隔で並び，正午になると一斉に左右どちらかに歩き出すのだ。兵士たちはゆっくりと全員が同じ速度で歩き，2 人の兵士が鉢合わせすると，2 人ともそこでくるりと向きを変え，逆方向に同じ速度で進む。ただし，どちらかの守衛所まで辿り着いたら，その兵士の行進は終わりで守衛所に入って休む。

ある日，王が閲兵していると，一人の兵士があまりに早く守衛所に辿り着いてさっさと休憩に入ったことがあった。そこで，王は，全員になるべく長く行進を続けさせる方法はないかと考えた。

王の期待に答えて，最初の兵士が守衛所に入るのをなるべく遅くするには，兵士を初めにどのように配置し，それぞれをどちらの方向に歩かせればよいだろうか？ただし，大勢が固まって歩くのは美観を損なうので，最初, 兵士たちは互いに 15 メートル以上離れた位置からスタートするものとする。

解答例

全員に行進を続けさせられる最長時間は，距離にして 265 メートル分である。

この問題では，個々の兵士の動きを追うと，混乱して何がなんだか分からなくなるが，兵士を全体として眺めると，話は極めて簡単になる。2 人の兵士は鉢合わせすると向きを変えると言っているが，ただすれ違ったとしても，個々の兵士を区別しない限り，全体としての動きは変わらないことがポイントだ。

初期配置では，兵士間は 15 メートル以上なければならないので，一人目を東の守衛所の位置に，それ以降は 15 メートルづつ空けて 10 人を配置する。同様に西の守衛所の位置から 15 メートルづつ空けて残りの 15 人を配置する。そこで，正午と同時に，東に配置したした兵士は西に，西に配置したした兵士は東に行進させればいい。

鉢合わせしてもすれ違うだけだとすると，中央に近い 2 人の兵士は $400 - 15 \times 9 = 265$ メートル歩いたところで守衛所に到達する。鉢合わせしたときに反転する場合でも，全体の動きは同じだから 265 メートル分歩いたところで 2 人の兵士が休憩に入る。違うのはその 2 人が最初両端にいた兵士だということだけである。中央の兵士をこれ以上守衛所から離すことは不可能だから，265 メートル分の時間以上には全員行進を続けさせることはできない。

問題 20 (兵士たちによるパトロール).
毎晩 10 時から翌朝の 6 時までは，10 人の兵士たちが城の周囲に歩哨にたち，パトロールをしている。城の周りをぐるっと廻る全長 4 キロメートルの周遊路がありそこを巡回するのだが，前門のパレードのときと同様に，2 人の歩哨が出会うと両者ともそこで反対に向きを変え進み続ける。どの兵士も歩く速度は常に一定で時速 4 キロメートルである。

真夜中の 12 時ちょうどに一人の兵士が城門の前を通過したとする。同じ兵士が 1 時ちょうどに再び城門の前を通過する確率はどのくらいだろうか？

ただし，兵士たちが最初に歩き出す位置と方向は全くランダムであるとする。

解答例

確率は約 0.248 である。

前問と同様に考えると，鉢合わせしたときに反転してもすれ違っても，兵士全体としての動きは変わらないので，1 時間後に城門前を同じ方向に通過する兵士がいることは間違いない。問題は，その兵士が 12 時の兵士と同じである確率だ。

説明を分かりやすくするために，12 時に城門前を通過した兵士を 0 番とし，反時計回りに 1 から 9 までの番号を兵士に振ろう。さらに，各兵士に，自分の名前を書いた名刺を持たせ，他の兵士と出会ったときその名刺を交換させると，物事が分かりやすくなる。明らかに，どの名刺も，兵士同士がどこで何回出会おうとちょうど一時間後に周遊路を 1 周してもとの位置に戻ってくる。

兵士 0 (と名刺 0) が 12 時に城門を通過したとき反時計回りだったとし，そのとき時計回りに動いていた兵士が k 人だったとしよう。名刺 0 は，自分と同じ方向に進む名刺とは決して出会うことがないが，逆方向に周る名刺とは 1 周する間にちょうど 2 回出会う。名刺同士は，出合った時に必ず交換されるから，名刺 0 は合計で $2k$

回交換されることになる。

さて，ここでもう一つ重要なことは，10 人の兵士の配置を眺めたとき，互いの距離は変わっても順番は決して変わらないことである。つまり，反時計回りに見て，0，1，2，……，9 という順はいつまでたっても保たれる。

名刺 0 は反時計回りに動くのだから，兵士 0 から 兵士 1， 兵士 1 から兵士 2 へと順に受け渡されて行くしかない。とすれば，$2k$ 回の交換後に名刺 0 を持っている兵士の番号は明らかで，それは $2k \bmod 10$ である。

こんどは，兵士 0 が 12 時に城門を通過したとき時計回りだったとしよう。先と同様にそのとき時計回りだった兵士の数を k とする。この k 人には兵士 0 自身も含まれる。先と同様に考えると，名刺 0 は，時計回りに周遊し，$2(10-k)$ 回交換される。従って，1 周後に名刺 0 を持つ兵士の番号は $-2(10-k) \bmod 10 = 2k \bmod 10$ である。

以上により，名刺 0 は，兵士 0 の最初の向きに関係なく，1 周後には $(2k \bmod 10)$ 番の兵士の手にあることになる。午前 1 時に城門の前を通るのは，当然この兵士だが，それがエースであるのは $2k \bmod 10 = 0$ の場合，つまり，$k = 0, 5, 10$ の場合である。最初，各兵士の動く向きはランダムと仮定したので，時計回りの兵士の数が 0 または 5 または 10 となる確率は，n 人から i 人を選ぶ組合せの数 $\binom{n}{i}$ を用いて

$$\frac{1}{2^{10}}\left(\binom{10}{0}+\binom{10}{5}+\binom{10}{10}\right)=\frac{127}{512}$$

と書け，その値は約 0.248 である。

ついでながら，午前 1 時に城門前を通る兵士が奇数番である可能性はなく，2 番と 8 番の可能性はともに

$$\frac{1}{2^{10}}\left(\binom{10}{1}+\binom{10}{4}\right)=\frac{1}{2^{10}}\left(\binom{10}{6}+\binom{10}{9}\right)=\frac{220}{1024}=\frac{55}{256},$$

4 番と 6 番の可能性はともに

$$\frac{1}{2^{10}}\left(\binom{10}{2}+\binom{10}{7}\right)=\frac{1}{2^{10}}\left(\binom{10}{3}+\binom{10}{8}\right)=\frac{165}{1024}$$

であることが，同様に分かる。

問題 21 (みんな一緒に緑に変身！).
カメレオンたちが変身練習をしている。ところが，このカメレオンたちは不器用で，体色を赤，青，緑の 3 色に変えられるだけだ。しかも，1 匹だけでは変色できなくて，色違いの 2 匹 1 組が体をぶつけ合うと，2 匹共もうひとつの色に変わる。つまり，赤と青の 2 匹は緑に，青と緑の 2 匹は赤に，緑と赤の 2 匹は青に変身できる。

今，カメレオンは，赤が 2 匹，青が 6 匹，緑が 40 匹だった。全員が青になることは可能だろうか？あるいは，赤，緑，どの色でも皆が同じ色になることはできるだろうか？赤が 4 匹，青が 6 匹，緑が 40 匹だったなら，皆どれか同じ色になることはできるだろうか？

解答例

赤が 2 匹，青が 6 匹のとき，それを全部緑にできるかと少し考えてみると，他に緑が何匹いてもなかなかうまくいかないことに気がつく。そこで不可能だろうと予想して，その証明を探すことになるが，こういうときに有効な数学的手段が何らかの不変量である。つまり，カメレオンが何回変身しても変わることのない量を何か見つけ，それが，緑だけになった場合とは異なることを示せばいい。

この問題では，3 で割り切れるかどうかが手がかりになる。赤，青，緑のカメレオンの数を r, b, g とし，それらを組にした (r, b, g) というベクトルを考えると，2 匹の変身により，そのベクトルは $(r-1, b-1, g+2)$ か $(r-1, b+2, g-1)$ か $(r+2, b-1, g-1)$ に変わる。

このままでは分かりにくいが，赤と青の匹数の差を考えると，その差は，$r-b$ か $r-b-3$ か $r-b+3$ になるので，元と同じか ± 3 だけ変動することになる。従って，変身を何度繰り返しても，この差の値の変動量は 3 の倍数である。もし，皆が緑色，すなわちベクトルが $(0, 0, r+b+g)$ になることがあったとすれば，$r-b$ と $0-0=0$ の差は 3 の倍数でなければならない。$r=2$，$b=6$ で始めた場合，$r-b=-4$ で，これは 3 の倍数ではないから，皆が緑になることはできない，赤や青になろうする場合も同様で，$b=40$ の場合，$40-2=38$，$40-6=34$

が 3 の倍数ではないので，赤や青一色になることもできない。一方 $(4,6,40)$ から始まった場合，$40-4=36$ が 3 の倍数なので，青一色になることは可能である。

一般に初期状態が (r,b,g) で $r \equiv b \pmod 3$ ならば，初めから一色しかない場合を除いて，必ず皆が緑になることができる。同様に，$b \equiv g \pmod 3$ なら赤，$r \equiv g \pmod 3$ なら青になることが可能である。

問題 22 (スパゲティの輪)**.**
スパゲッティが皿に盛ってある。全部で 20 本だということで，どう絡まっているかごちゃごちゃしてわからないが，端の数は確かに 40 ある。これらの端をでたらめに 2 つずつ繋いで行くとき，平均幾つくらいのスパゲッティの輪ができるだろうか？輪は互いに絡まっていてもかまわない。

解答例

スパゲッティが 1 本なら，もちろん輪は必ず 1 つだけできる。

スパゲッティが 2 本なら，輪は 1 つか 2 つだ。元の 2 本の端同士を正しく繋げば輪は 2 つになり，違う端同士を繋げば輪は 1 つになるが，その確率はそれぞれ 1/3 と 2/3 なので，結局，平均では $2 \times 1/3 + 1 \times 2/3 = 4/3$ 個の輪ができる。

しかし，この調子で 20 本の場合を考えるのは厄介である。ここでちょっと頭をひねるとうまい考え方にたどり着く。

今，スパゲッティは n 本だとして，端の 1 つと別の端のとを繋いだとしよう。それが同じ 1 本の端同士ならば輪が 1 つでき，$n-1$ 本のスパゲッティが残る。では，もし繋いだのが異なるスパゲッティの端としたら？ このときはつながった 2 本をまとめて少し長くなった 1 本のスパゲッティと考えると，やはり $n-1$ 本のスパゲッティが残っているのと変わらない。つまり, 最初に繋いだのだのが，同じ 1 本の端同士であろうとなかろうと，その後の状況は $n-1$ 本のスパゲッティがあるのと変わらないということだ。

最初に繋いだのが同じ 1 本の端同士である確率は，$1/(2n-1)$ であり，その場合，そうでない場合より輪が 1 つ多くできる。つまり，スパゲッティ n 本でできる輪の個数の期待値は，$n-1$ 本の場合より，$1/(2n-1)$ だけ多い。したがって，20 本の場合，求める期待値は

$$\frac{1}{39}+\frac{1}{37}+\cdots+\frac{1}{3}+\frac{1}{1}$$

となり，約 2.48 である。

問題 23 (カードの反転)**.**
トランプのカード (ジョーカーを入れずに 52 枚) が裏向きに並べてある。子供が一人来て，すべてのカードを表にして去って行った。次の子供が来て，左から数えて偶数番目のカードだけを裏に戻して去って行った。さらに，3 人目の子供が来て，左から数えて 3 枚目毎にカードをひっくり返して去った。こうして，子供が次々にやってきて，n 人目の子供は左から数えて n の倍数番目のカードの表裏を反転させて去って行った。さて 52 人目の子供が去った後で，表になっているカードの枚数は何枚だろうか？

解答例

左から n 番目のカードは n の約数の個数と同じ回数だけ反転する。従って，それが最後に表になるためには，n は奇数個の約数を持たねばならない。n が平方数以外であれば，約数は必ず対になるので，その個数は偶数個である。つまり，最後に表になっているカードは平方数番目のみであり，52 までには 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49 という 7 つの平方数があるので，表向きのカードは 7 枚である。

(もし最初に N 枚のカードがあり，N 人の子供が来た場合，最後に表になっているのは $\left\lfloor \sqrt{N} \right\rfloor$ 枚である。)

問題 24 (奇妙な小切手帳)**.**
金満家の伯父が太郎と次郎の 2 人兄弟に奇妙な小切手帳をくれた。小切手帳は 50 枚綴りで，各小切手には既に額面が書いてある。2 人で交代に，この小切手帳から表裏どちらか外側の一枚を切りとり，現金化して使っていいと言う。

伯父は，太郎から先に使い始めるように指示したが，まだ各小切手の額面を調べないうちに，太郎は「やったね。俺のほうが少なくともお前以上には使える。50 枚綴りで良かったよ。51 枚ならそうはいかないこともあるからな」と次郎に言った。

いったいこの太郎の言葉の根拠はどこにあるのだろうか？

解答例

小切手が全部で偶数枚であるというのがポイントである。小切手に順に番号を振り，i 番目の小切手の額面を A_i としよう。太郎の戦略としては，奇数番の合計 $S = A_1 + A_3 + \ldots + A_{49}$ と偶数番の合計 $T = A_2 + A_4 + \ldots + A_{50}$ を調べ，$S \geqq T$ なら常に奇数番の小切手を使うようにすればいい。太郎が使ったあと，外側はどちらも偶数番であるから，次郎は偶数番の小切手しか使えない。これを繰り返すと，結局，太郎が使う総額は S，次郎が使う総額は T ということになる。逆に $S < T$ なら，太郎は偶数番の小切手を使うようにすればいい。

小切手が奇数枚の時，この戦略はなりたたない。実際，たとえば高額面の小切手が 1 枚だけあり，あとは全部 1 円だったとすると，高額面の小切手が最初から端にない限り，太郎にはそれを手に入れることができない。

また，上の戦略は小切手が遇数枚の場合でも，必ずしも太郎に最大の利益を保証するものではない。たとえば 6 枚綴りの小切手帳で額面が 2-1-1-3-1-1 の場合，上の戦略では末尾の 1 を取ることになるが，先頭の 2 を取ったほうが太郎には得になる。

問題 25 (ギリギリの燃料)**.**
砂漠を周遊する道路がある。この道路を自動車で一周して調査したい。親切な志願者があって，車を貸してくれ，かつ道路上の任意の地点まで運んでくれるという。しかし，燃料については一切面倒をみてくれない。そこで，燃料を募集したところ，集まったのは丁度ギリギリの一周分で，しかも輸送コストの関係で，ポリ容器に入れ，道路上の 6 箇所に分割して置いてあるという。

燃料が置いてある場所とその量は正確にわかっているので，そのどこかに運んでもらい，燃料を拾い集めながら，一周することができればよい。ある人に相談したところ，燃料がどのように分割され，どこに置かれていようと必ず一周できるという。

それは本当だろうか？また，本当だとしても，出発点と回る方向をどうやって決めればいいだろうか？

解答例

一周するに十分な量の燃料を積んで周遊路のどこかから仮に走り出したと考えてみる。方向はどちらでもいい。燃料を拾うたびにそれを補給しながら旅を続けると，丁度一周して出発点に戻ってきたときには，燃料の量は最初に出発したときに同じになっているはずである。

この旅の間じゅう，燃料計の動きを監視していれば，その針が一番低くなった場所があり，そこで燃料が補給されたはずである。従って，最初にその場所に運んでもらい，同じ方向に回り始めれば，燃料が空の状態からスタートしても一周することができる。

問題 26 (パーティーでの握手回数)**.**
達夫と景子は夫婦である。ある日，達夫と景子はパーティーに行き，ほかの 4 組の夫婦と出会った。パーティーでは，初対面の人どうしは握手をし，顔見知りとは握手しなかった。

あとで達夫が一人一人にたずねてみると，ほかの 9 人の出席者がパーティーで握手をした人数は，それぞれことなっていた。では，景子が握手をした人数は何人だっただろうか?

解答例

まず，最も多くの人と握手した人でも自分とパートナーとは握手しないので，8 人と握手したことになる。つまり，自分とパートナー以外の全員と握手したわけだ。達夫がたずねたのは全部で 9 人である。すべてことなる人数と握手したということは，9 人が握手した人数は，0 人から 8 人までのいずれかということになる。

まず「0 人」と答えた人を Z,「8 人」と答えた人を A としよう。するとこの 2 人は必然的に夫婦である。なぜなら，A は自分のパートナー以外の全員と握手したので，A のパートナーでない人は少なくとも 1 人（A）とは握手していることがわかる。よって誰とも握手していない Z は，A のパートナー以外にあり得ない。

次に,「1 人」と答えた人を Y,「7 人」と答えた人を B とする。するとこの二人も必然的に夫婦だ。なぜなら，B は自分のパートナーと Z を除く全員と握手したことになるので，Y がパートナーでなければ Y とも握手したはずだ。ところが，Y は A 以外の誰とも握手していないので，B のパートナーでなければならない。

同様に「2 人」と答えた人と「6 人」と答えた人は夫婦であり,「3 人」と答えた人と「5 人」と答えた人も夫婦となる。残ったのは，4 人と握手した人だけだ。この人物のパートナーが握手した人も 4 人である。達夫がたずねたすべての人はことなる人数と握手していたので，達夫自身が 4 人と握手した人物にほかならない。よって景子が握手した人数も 4 人である。

問題 27 (15 パズルの不可能配置)**.**
15 パズルの次の図において，14 と 15 を入れ替えて正しいならびにせよ。

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

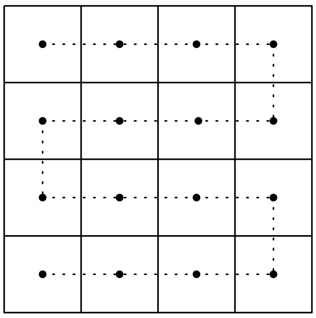
初期状態

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

目標状態

解答例

15 パズルの各ピースが下図の点線のように，繋がっていると考えてみる。空きスペースは無視する。



すると，元の問題の状態でのピースのつながりは

$$1 - 2 - 3 - 4 - 8 - 7 - 6 - 5 - 9 - 10 - 11 - 12 - 14 - 15 - 13$$

である。

目標状態はその 14 と 15 が入れ替わっているに過ぎない。

空きスペースがどこにあり，どのピースを動かそうとも，ピースのつながりに生ずる変動は偶置換である。よって，ピースのスライドにより，奇置換は生じないから，目標状態に達することは不可能である。

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

初期状態

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

目標状態

問題 28 (カード 3 枚で 15 を作るには).
1 から 9 までの数字を書いたカードがテーブルの上にある。2 人で交互に 1 枚ずつそのカードを取り合うゲームを考えよう。目的は自分が集めたカードのうち 3 枚の合計で 15 を作ることである。先に 15 を作ったほうが勝ちとすると，このゲームで先手が勝つ手段はあるだろうか？

解答例

後手に必勝法がないことはゲームの性質から明らかだ。もし，そんな方法があるなら，先手がそれを採用することで，先手の必勝法が得られるから。しかし，実は後手が最善を尽くせば，先手にも勝つ手段はない。

これを証明するのには，厳密には場合を尽くして調べる必要があるが，ここではおそらくどの読者にもおなじみのゲームに帰着させることで納得して頂こう。

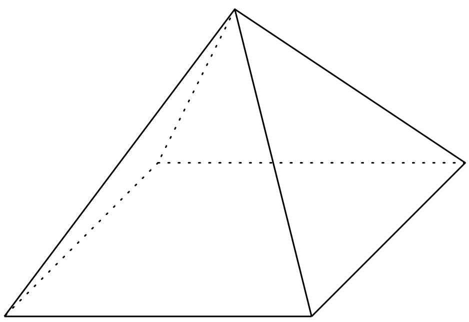
次のような 3×3 魔方陣をご存知だろう。

8	1	6
3	5	7
4	9	2

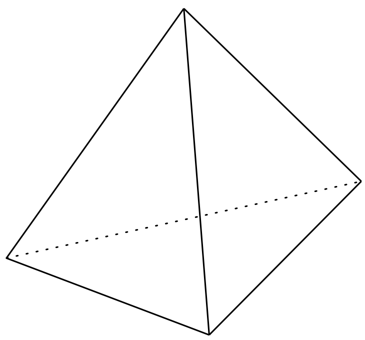
この方陣の各縦列，各横列と対角線の合計は 15 になる。3×3 魔方陣の特徴的な点の 1 つは，それ以外の 3 要素のどれを足しても 15 にならないことだ。従って，元のゲームの目的は，この魔方陣から自分の数字を選び，縦または横または斜めの 3 つ並びを作ることと同値である。

誰もが（英語圏で Tic-Tac-Two と呼ばれる）3×3 のマス目に○×を付けていくゲームを遊んだことがあるに違いない。そして，そのゲームは，どちらかが間違いをしでかさない限り，引き分けに終わることは周知である。

問題 29 (正四面体とピラミッドを合わせると).
底面が正方形，4 つの側面がすべて正三角形であるような四角錐（ピラミッド型）を考えよう。同じ長さの辺を持つ正四面体を持ってきて，三角形の面がピッタリ重なるように先の四角錐と貼り合わせる。こうしてできた立体図形の面の数はいくつだろうか？



ピラミッド

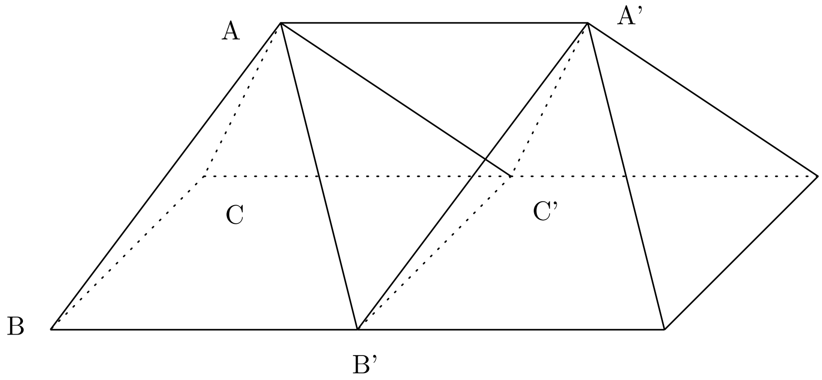


正四面体

解答例

これは，一種の引っ掛け問題である。$5 + 4 - 2 = 7$ と答えると間違いだ。元の面の数の合計から貼り合わされて消えた面の数 2 を引くというのはもっともな推論のように思うが，実は，消えはしないが合わさって 1 つの面になってしまう面の対が 2 組あるので，正しい答えは 5 である。

これを納得するには次の図を見てもらうのがわかり易いだろう。



図は四角錐を底辺の 1 つに沿って平行移動し，頂点同士を結んだ線分 AA' を加えたものだが，明らかに AA'B'C' は正四面体であり，問題の貼り合せた図形が ABCA'B'C' であることがわかる。また，BB'，AA'，CC' は平行だから，ABB' と AB'A' は合わさって 1 つの面を作る。ACC' と AC'A' も同様だ。従って，立体 ABCA'B'C' は（斜）三角柱であり，5 つの面を持つ。

問題 30 (最後のカードは？)**.**
次のような記憶力テストを考えよう。

0 から 99 までの数が書いてあるカードが 1 枚ずつ計 100 枚ある。まず，それをよくシャッフルし裏向けておく。そして上から 1 枚ずつゆっくりとめくり隣に積み重ねていく。最後の 1 枚になったとき手を止め，その残った 1 枚の数を当てようというものだ。

もちろん完璧な記憶力を持つ人なら簡単であるが，2 桁の数を覚えているのがやっとだという貧弱な記憶力しか持っていないという人でもテストをパスできるような方法を考えてほしい。

解答例

法計算 (mod) を利用するのが簡単だ。0 から初めて，カードを開くたびに出てきた数値を加えていく。覚える数値が 2 桁におさまるようにするため，100 を超えてしまったら，百位の数字は忘れてしまってよい。

カードの数値の総合計は 4950 で，100 で割った余りは 50 だから，最後に残ったカードの数は，覚えている数値に足すと 50 または 150 になるはずである。従って，たとえば覚えている数値合計が 5 であれば，最後の 1 枚は 45 とわかる。また覚えている数値合計が 83 であれば，最後の 1 枚は 67 だ。

問題 31 (10 桁以内の 5^{10} の倍数)**.**
十進 10 桁以内の正の整数で $5^{10} = 9765625$ で割り切れるものを見つけてほしい。

ただし，数字は 1, 2, 3, 4, 5 のみを使い，6, 7, 8, 9, 0 を使わないこと。奇数の数字 1, 3, 5, 7, 9 だけを使っても同じことができるだろうか？

解答例

まず，答えだけを述べると，数字 1, 2, 3, 4, 5 のみを使った場合，$2314453125 = 237 \times 5^{10}$ である。また，数字 1, 3, 5, 7, 9 だけを使った場合，$3193359375 = 327 \times 5^{10}$ である。

これらを見つけるのは，$5^{10} = 9765625$ の倍数を次々に作って，探しても可能だが，数字の条件を満たすかどうかを調べるのは，計算に電卓を利用してもかなり面倒だ。

そもそも条件を満たす倍数があるかどうかも怪しげだが，出題の形式から見て，数字 1, 2, 3, 4, 5 のみからなる n 桁の整数で 5^n で割り切れるものがありそうだということが予想できれば，うまく数学的帰納法が利用できる。

$n = 1, 2, 3$ の場合，$5^1 = 5$，$5^2 = 25$，$5^3 = 125$ がそのまま答えになる。$5^4 = 625$ はダメだが，その 5 倍 3125 は数字条件を満たす。ここで，前の数値を 1 桁伸ばすことで次の数値が得られていることに気づくことがポイントだ。

一般に，数字条件を満たす n 桁の整数で 5^n の倍数になるものが得られているとし，それを $N = m \times 5^n$ とする。N を 1 桁伸ばした数値は $M = 10^n d + N$ という形をしている。ここで d は 1, 2, 3, 4, 5 のどれかである。

M は 5^n で割り切れ，$M = (2^n d + m) \times 5^n$ と書ける。ここまでくれば，$2^n d + m$ が 5 で割り切れるように d を決めてやればいいことがわかる。幸い，2^n は 5 で割り切れず，d は 1, 2, 3, 4, 5 のどれかなので，必ずそういう d が選べ，$n+1$ 桁の整数 M は 5^{n+1} で割り切れる。

例えば，上の続きで 5 桁目を決めるには $2^4 d{+}5$ が 5 で割り切れるように $d = 5$ とすればいい。実際 $53125 = 17{\times}5^5$ だ。同様に 6 桁目は $d = 4$ なら $2^5 d + 17$ が 5 で割り切れるので，$453125 = 29 \times 5^6$ が得られる。こうして，10 桁まで桁数を伸ばした結果が 2314453125 である。d の候補に 1,3,5,7,9 を使っても，同じことが可能なので，3193359375 も同様に得られる。