数理的ヒラメキで解くパズル（問題編）

筑波大学 数理物質系 数学域
坂井 公

問題 1 (互いを割り切らない数の集合)**.**
（a）1, 2,. . . , 99 という数の集合から 50 個の数を選び，そのどの 2 つも，一方が他方を割り切るというようなことがないようにしてほしい。（b）同じような性質を持つ 51 個の数を選ぶことができないことを証明してほしい。

問題 2 (等間隔で通過するバスとトラックとオートバイ)**.**
バスとトラックとオートバイがこの順番で，動かない観察者の前を等しい時間間隔をおいて通り過ぎる。その 3 台は道路の先の方にいる別の観察者の前を，前と同じ時間間隔をおいて通り過ぎるが，そのときはバス，オートバイ，トラックの順だ。オートバイの時速がトラックの 2 倍だとしたら，バスの時速はトラックの何倍か。

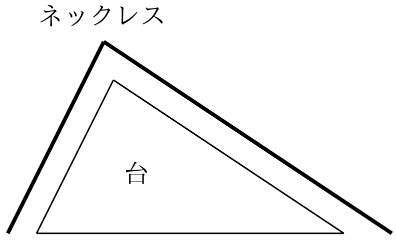
問題 3 (廊下を覆う敷物)**.**
廊下が何枚かの長方形の敷物で完全に覆われている。それぞれの敷物の幅は廊下の幅と同じだ。敷物は重なっていることもある。（a）敷物を何枚か取り除いて，取り除かなかった敷物の位置は変えずに，廊下のどの場所をとっても敷物で覆われていて，なおかつ 3 枚以上の敷物で覆われている箇所がどこにもないようにできることを証明せよ。（b）さらに敷物を何枚か取り除いて，残った敷物が互いにまったく重ならないようにして，それでも廊下の半分以上が覆われているようにすることができることを証明せよ。

問題 4 (101 匹の牛の群れ)**.**
101 頭の牛の群れがあり，それぞれの牛の重さは整数ポンドとする。どの牛でも 1 頭を群れから取り除くと，残りの牛は 50 頭ずつの 2 つの集団に分けることができて，2 つの集団の牛の重さの合計が等しくなる。このとき，どの牛の重さも同じであることを証明しなさい。

問題 5 (桁数の合計)**.**
2 つの数 2^{2002} と 5^{2002} を通常の 10 進数に展開したとき，その桁数の合計はいくつだろうか？

問題 6 (見えない点)**.**
1 枚の紙に目に見えないインクで点が 1 つ打ってある。また同じ紙に普通のインクで四角形が 1 つ描いてある。その点が四角形の内部にあるかどうか知りたいのだが，点が見える特殊なメガネをかけている人がいて，直線を 1 本引くと線のどちら側に見えないインクの点があるかを教えてくれる。もし点が直線上にあれば，そう教えてくれる。目に見えない点が四角形の内部にあるかどうかを確実に知るには，最低何本の直線を引く必要があるだろうか。

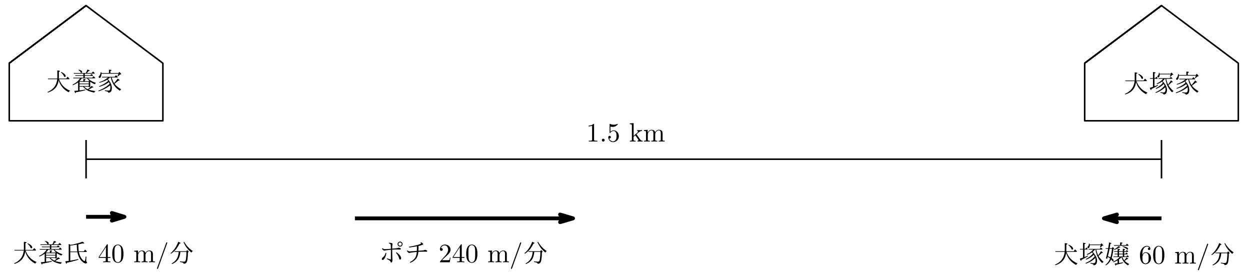
問題 7 (無造作に掛けられたネックレス)**.**
下図のように断面が三角形の台があり，ネックレスの鎖が掛けられている。台は左面の傾斜が右面の傾斜より急である。もし，台と鎖の間の摩擦がまったくなかったとしたら，鎖は左右どちらかに滑り落ちるだろうか？それとも安定なままだろうか？もちろん，鎖はどこもまったく均質であるとする。



問題 8 (犬と散歩)**.**
犬養氏は，毎朝，飼い犬のポチを連れて犬塚家のほうへ散歩する。犬塚嬢も同時刻にスタートし，犬養家にほうに向かって散歩する。両家はちょうど 1.5 km 離れており，犬養氏はゆっくりと分速 40 m で，犬塚嬢はそれよりは少し速く分速 60 m で歩いていく。

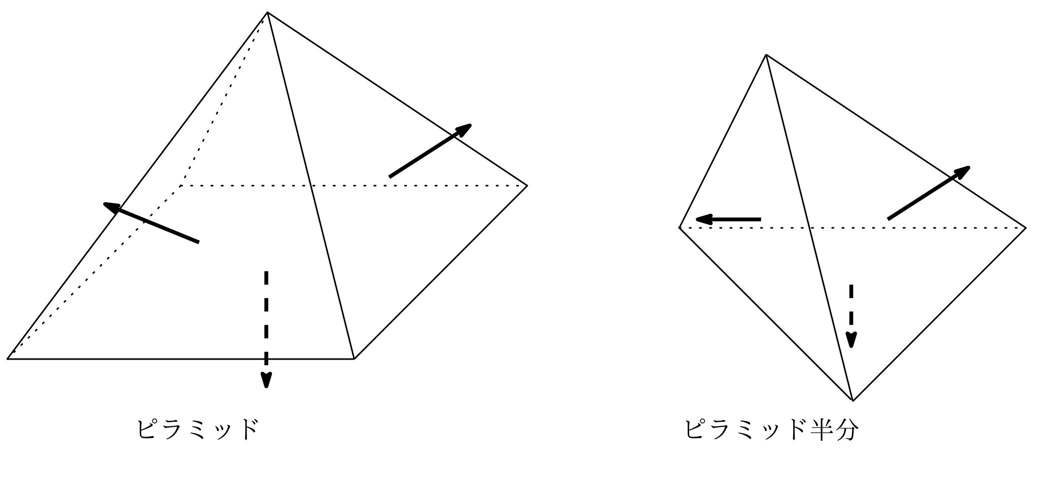
ポチは，スタートするやいなや，喜び勇んで分速 240 m で駆け出し，犬塚嬢のところまで来ると，くるりと向きを変え同じ速度で飼い主のほうに戻っていく。そして，犬養氏のところまで戻ると，再び向きを変え，また犬塚嬢に向かって走っていく。

こうして，ポチは，飼い主と犬塚嬢が出会うまでの間，2 人の間を分速 240 m で行ったり来たりする。ポチの走る距離は延べで何 m になるだろうか？



問題 9 (壷と百円玉と五十円玉)**.**
壷の中に百円玉を 49 枚，五十円玉を 99 枚入れる。壷をよく振ったあと，コインを次々に取り出していく。一方のコインが全部取り出されたあと，壷の中に残ったコインを全部もらえるとしたら，その期待値は何円くらいになるだろうか？

問題 10 (面に垂直なベクトル)**.**
下のようなピラミッド型の多面体とそれを半分にした多面体を考えよう。ピラミッドの側面は正三角形とする。多面体の外側に向かうベクトルで，各面に垂直で大きさがその面の面積に比例するものを考える。このときそのベクトルの総和をそれぞれの多面体について計算してほしい。



問題 11 (壷とチップ)**.**
次のような賭けを考えよう。

A，B が自分の色のチップを決め，何枚かずつ壷の中に入れる。そして第三者に，目をつむって中から 1 枚取り出してもらう。次にもう 1 枚取り出し，それが最初のと同じ色ならば，さらにもう 1 枚取り出してもらう。こうして違う色のチップが出てくるまで続け，違う印のチップが出てきたら，1 ラウンド終了である。

最後に出てきた違う色のチップは壷に戻して，よく壷を振る。このラウンドを何度も繰り返し，壷から最後のチップが出てきたとき，それが自分の色だったら勝ちというものだ。

最初に A が a 枚，B が b 枚のチップを最初に入れたとき，それぞれの勝率はどうなるか?

問題 12 (引きつけ合うコイン)**.**
互いに引きつけ合う力を持つコインが 101 枚ある。最初に 2 つの壷に 1 枚ずつ入れておき，他の 99 枚は，1 枚ずつ壷へ向けて放り投げる。

コイン同士が引きつけ合う力によって，投げたコインは各壷に入っているコインの枚数に比例した確率で，その壷の中に落ちる。すなわち，左の壷に a 枚，右の壷に b 枚のコインが入っているなら，それぞれの壷に入る確率は $\dfrac{a}{a+b}$ と $\dfrac{b}{a+b}$ である。

99 枚のコイン投げが終わった後に，少ないほうの壷に入っているコインの枚数の期待値はいくつだろうか？

問題 13 (サイコロの全部の目が出るまで)**.**
普通のサイコロを何度も振ることを考える。全部の目が出るためには最低でも 6 回振ることが必要だが，平均では，そのために何回サイコロを振ることが必要だろうか？

問題 14 (忘れて来た座席指定券)**.**
1000 人入りの劇場は満席だった。そこへ先頭を切って入場して来た客は，自分の座席指定券を忘れてきたことに気がついたが，会場係りに聞くのも面倒なので適当な席に勝手に座ってしまった。その後に入場して来た観客は，もちろん自分の席に着いたが，すでに自分の指定席を占拠されてしまった人は，これまた空いている席に適当に座ってしまった。

こうして，後続する観客たちは，自分の席がまだ空いていればその席に座ったが，そこが先に来た客に占拠されていれば，そのときまだ空いている席の 1 つにデタラメに座っていった。さて，最後に入場した客が自分の席に座れる確率は一体どのくらいだろうか？

問題 15 (天秤と分銅での計量)**.**
普通の天秤がある。分銅を 5 個用意して，0 グラムから 1 グラム刻みで隙間なくなるべく多くの種類の重さを量りたい。どういう重さの分銅を用意するのが最善だろうか？

量るときに，分銅は計量したいものと同じ皿に載せても反対側の皿に載せてもよいものとする。

問題 16 (贋金判定問題)**.**
警察が金貨偽造団のアジトを手入れし，金貨がたくさん入った袋を 5 袋押収した。袋の中身は，全部が贋物であるか，全部が本物であるか，どちらかだとわかっている。本物の金貨 1 枚は 10 グラムであり，贋物はそれより 0.1 グラム少ない 9.9 グラムである。

0.1 グラム単位で 1 キログラムまで計れる精密な量りで，ただ 1 回計量することにより，各袋の金貨の真贋をすべて決定せよ。

問題 17 (カード当て)**.**
ボブに見えないところで，(ジョーカーを除いた) トランプ 52 枚 1 組から観客がカードを 5 枚を選び出し，それをアリスに渡す。アリスはその中から 1 枚を選んで手もとに残し，他の 4 枚をボブに渡す。ボブは，渡されたカードを見て，アリスが手もとに残したカードが何であるかを正しく推測するという。このマジックの種はどうなっているだろうか？

問題 18 (注視しあうラグビー選手たち)**.**
15 人のラグビー選手たちがグラウンドにいる。各選手は，自分の一番近くにいる選手の動きから目を離さないように言われている。

このとき，どの 2 人の距離も，それぞれ違う場合には，誰にも動きが監視されない選手が必ず存在することを証明せよ。

問題 19 (兵士たちの行進)**.**
城の前では，毎日正午に兵士たちによるパレードが行なわれる。城門前の通りの東西両端に守衛所があり，それはちょうど 400 メートル離れている。その間に 20 人の兵士たちが適当な間隔で並び，正午になると一斉に左右どちらかに歩き出すのだ。兵士たちはゆっくりと全員が同じ速度で歩き，2 人の兵士が鉢合わせすると，2 人ともそこでくるりと向きを変え，逆方向に同じ速度で進む。ただし，どちらかの守衛所まで辿り着いたら，その兵士の行進は終わりで守衛所に入って休む。

ある日，王が閲兵していると，一人の兵士があまりに早く守衛所に辿り着いてさっさと休憩に入ったことがあった。そこで，王は，全員になるべく長く行進を続けさせる方法はないかと考えた。

王の期待に答えて，最初の兵士が守衛所に入るのをなるべく遅くするには，兵士を初めにどのように配置し，それぞれをどちらの方向に歩かせればよいだろうか？ただし，大勢が固まって歩くのは美観を損なうので，最初, 兵士たちは互いに 15 メートル以上離れた位置からスタートするものとする。

問題 20 (兵士たちによるパトロール)**.**
毎晩 10 時から翌朝の 6 時までは，10 人の兵士たちが城の周囲に歩哨にたち，パトロールをしている。城の周りをぐるっと廻る全長 4 キロメートルの周遊路がありそこを巡回するのだが，前門のパレードのときと同様に，2 人の歩哨が出会うと両者ともそこで反対に向きを変え進み続ける。どの兵士も歩く速度は常に一定で時速 4 キロメートルである。

真夜中の 12 時ちょうどに一人の兵士が城門の前を通過したとする。同じ兵士が 1 時ちょうどに再び城門の前を通過する確率はどのくらいだろうか？

ただし，兵士たちが最初に歩き出す位置と方向は全くランダムであるとする。

問題 21 (みんな一緒に緑に変身！)**.**
カメレオンたちが変身練習をしている。ところが，このカメレオンたちは不器用で，体色を赤，青，緑の 3 色に変えられるだけだ。しかも，1 匹だけでは変色できなくて，色違いの 2 匹 1 組が体をぶつけ合うと，2 匹共もうひとつの色に変わる。つまり，赤と青の 2 匹は緑に，青と緑の 2 匹は赤に，緑と赤の 2 匹は青に変身できる。

今，カメレオンは，赤が 2 匹，青が 6 匹，緑が 40 匹だった。全員が青になることは可能だろうか？あるいは，赤，緑，どの色でも皆が同じ色になることはできるだろうか？赤が 4 匹，青が 6 匹，緑が 40 匹だったなら，皆どれか同じ色になることはできるだろうか？

問題 22 (スパゲティの輪)**.**
スパゲッティが皿に盛ってある。全部で 20 本だということで，どう絡まっているかごちゃごちゃしてわからないが，端の数は確かに 40 ある。これらの端をでたらめに 2 つずつ繋いで行くとき，平均幾つくらいのスパゲッティの輪ができるだろうか？輪は互いに絡まっていてもかまわない。

問題 23 (カードの反転)**.**
トランプのカード (ジョーカーを入れずに 52 枚) が裏向きに並べてある。子供が一人来て，すべてのカードを表にして去って行った。次の子供が来て，左から数えて偶数番目のカードだけを裏に戻して去って行った。さらに，3 人目の子供が来て，左から数えて 3 枚目毎にカードをひっくり返して去った。こうして，子供が次々にやってきて，n 人目の子供は左から数えて n の倍数番目のカードの表裏を反転させて去って行った。さて 52 人目の子供が去った後で，表になっているカードの枚数は何枚だろうか？

問題 24 (奇妙な小切手帳)**.**
金満家の伯父が太郎と次郎の 2 人兄弟に奇妙な小切手帳をくれた。小切手帳は 50 枚綴りで，各小切手には既に

額面が書いてある。2 人で交代に，この小切手帳から表裏どちらか外側の一枚を切りとり，現金化して使っていいと言う。

伯父は，太郎から先に使い始めるように指示したが，まだ各小切手の額面を調べないうちに，太郎は「やったね。俺のほうが少なくともお前以上には使える。50 枚綴りで良かったよ。51 枚ならそうはいかないこともあるからな」と次郎に言った。

いったいこの太郎の言葉の根拠はどこにあるのだろうか？

問題 25 (ギリギリの燃料)**.**
砂漠を周遊する道路がある。この道路を自動車で一周して調査したい。親切な志願者があって，車を貸してくれ，かつ道路上の任意の地点まで運んでくれるという。しかし，燃料については一切面倒をみてくれない。そこで，燃料を募集したところ，集まったのは丁度ギリギリの一周分で，しかも輸送コストの関係で，ポリ容器に入れ，道路上の 6 箇所に分割して置いてあるという。

燃料が置いてある場所とその量は正確にわかっているので，そのどこかに運んでもらい，燃料を拾い集めながら，一周することができればよい。ある人に相談したところ，燃料がどのように分割され，どこに置かれていようと必ず一周できるという。

それは本当だろうか？また，本当だとしても，出発点と回る方向をどうやって決めればいいだろうか？

問題 26 (パーティーでの握手回数)**.**
達夫と景子は夫婦である。ある日，達夫と景子はパーティーに行き，ほかの 4 組の夫婦と出会った。パーティーでは，初対面の人どうしは握手をし，顔見知りとは握手しなかった。

あとで達夫が一人一人にたずねてみると，ほかの 9 人の出席者がパーティーで握手をした人数は，それぞれことなっていた。では，景子が握手をした人数は何人だっただろうか?

問題 27 (15 パズルの不可能配置)**.**
15 パズルの次の図において，14 と 15 を入れ替えて正しいならびにせよ。

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

初期状態

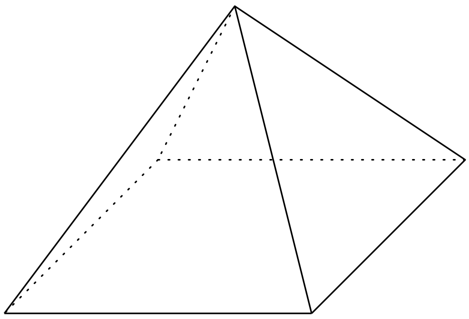
1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

目標状態

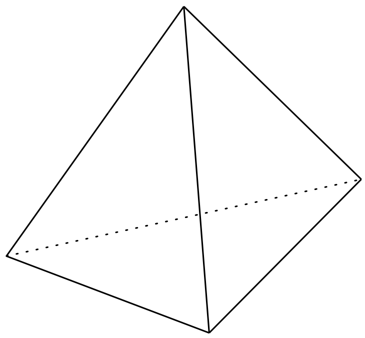
問題 28 (カード 3 枚で 15 を作るには)**.**
1 から 9 までの数字を書いたカードがテーブルの上にある。2 人で交互に 1 枚ずつそのカードを取り合うゲームを考えよう。目的は自分が集めたカードのうち 3 枚の合計で 15 を作ることである。先に 15 を作ったほうが勝ちとすると，このゲームで先手が勝つ手段はあるだろうか？

問題 29 (正四面体とピラミッドを合わせると)**.**
底面が正方形，4 つの側面がすべて正三角形であるような四角錐（ピラミッド型）を考えよう。同じ長さの辺を持つ正四面体を持ってきて，三角形の面がピッタリ重なるように先の四角錐と貼り合わせる。こうしてできた立体

図形の面の数はいくつだろうか？



ピラミッド



正四面体

問題 30 (最後のカードは？)**.**
次のような記憶力テストを考えよう。

0 から 99 までの数が書いてあるカードが 1 枚ずつ計 100 枚ある。まず，それをよくシャッフルし裏向けておく。そして上から 1 枚ずつゆっくりとめくり隣に積み重ねていく。最後の 1 枚になったとき手を止め，その残った 1 枚の数を当てようというものだ。

もちろん完璧な記憶力を持つ人なら簡単であるが，2 桁の数を覚えているのがやっとだという貧弱な記憶力しか持っていないという人でもテストをパスできるような方法を考えてほしい。

問題 31 (10 桁以内の 5^{10} の倍数)**.**
十進 10 桁以内の正の整数で $5^{10} = 9765625$ で割り切れるものを見つけてほしい。

ただし，数字は 1, 2, 3, 4, 5 のみを使い，6, 7, 8, 9, 0 を使わないこと。奇数の数字 1, 3, 5, 7, 9 だけを使っても同じことができるだろうか？