輪になってパズろう
— パズルの国のアリス—
（パズる会 2020: トークイベント資料）

坂井公（筑波大学 数理物質系 アソシエイト）

2020 年 2 月 23 日

目次

1　ギリギリの燃料（2009/07）

ドードー鳥は新しいタイプのコーカスレースをアリスに提案した。

「このレースでは車を使うのよ」とドードー。

「でも，あたし，車の運転はできないわ」とアリス。

「ばかね，あんた。運転なんか，あんたがしなくてもいいのよ。そこのトカゲのビルに代わりにやらせればいいでしょ。問題はね，そういうことじゃないの。このレースはね，コースを一周すれば勝ちなのよ。スピードはどうでもいいの。スタートも何処からでもいいし，どっちに回ってもいい。でもね，燃料はちょ

うど一周分しかないの。ポリ容器に入れてコース上の 6 箇所に分割して置いてあるわ」

「途中で燃料が切れて動けなくなったら……」

「そしたら，あんたの負けね。そうね，燃料が置いてある場所とその量は正確に教えてあげるわ。どうせあんたおばかさんだから，それが分かってもどうしようもないでしょ」

どこかからスタートして，燃料を拾い集めながら，一周することができればよい。

アリスは，グリフォンに相談してみた。すると，グリフォンが言うには，燃料がどのように分割され，どこに置かれていようと必ず一周できるという。それは本当だろうか？また，本当だとしても，出発点と回る方向をどうやって決めればいいだろうか？

解答:

一周するに十分な量の燃料を積んでコースのどこかから仮に走り出したと考えてみる。方向はどちらでもいい。燃料を拾うたびにそれを補給しながら旅を続けると，ちょうど一周して出発点に戻ってきたときには，燃料の量は，消費量と補給量が同じだから，最初に出発したときに同じになっているはずである。

この旅の間じゅう，燃料計の動きを監視していれば，その針が一番低くなった場所があり，そこで燃料が補給されたはずである。従って，その場所からスタートし同じ方向に回れば，燃料計の針がスタート地点より下がることはないので，燃料が空の状態からスタートしてもコースを一周することができる。

2　トランプ兵士の行進（2010/03）

不思議の国のトランプ城では，毎日正午に大手門前の通りでハートの兵士たちによるパレードが行なわれる。大手門を挟んで通りの東西両端に守衛所があり，それはちょうど 200 メートル離れている。その間にハートのエースから 10 まで 10 人の兵士たちが適当な間隔で並び，正午になると一斉に左右どちらかに歩き出すのだ。兵士たちはゆっくりと全員が同じ速度で歩き，二人の兵士が鉢合わせすると，二人ともそこでくるりと向きを変え，逆方向に同じ速度で進む。ただし，どちらかの守衛所まで辿り着いたら，その兵士の行進は終わりで守衛所に入って休む。

ある日ハートの王が閲兵していると，一人の兵士があまりに早く守衛所に辿り着いてさっさと休憩に入ったことがあった。そこで，王は，全員になるべく長く行進を続けさせる方法はないかと考えた。

王の期待に答えて，最初の兵士が守衛所に入るのをなるべく遅くするには，兵士を初めにどのように配置し，それぞれをどちらの方向に歩かせればよいだろうか？ただし，大勢が固まって歩くのは美観を損なうので，最初, 兵士たちは互いに 15 メートル以上離れた位置からスタートするものとする。

さて，正午のパレードは国威の誇示のためであり，あまり実質的な意味はないが，毎晩 10 時から翌朝の 6 時までは，兵士たちが日替わりで城の周囲に歩哨にたち，パトロールをしている。城の周りをぐるっと廻る全長 4 キロメートルの周遊路がありそこを巡回するのだが，パレードのときと同様に，二人の歩哨が出会うと両者ともそこで反対に向きを変え進み続ける。どの兵士も歩く速度は常に一定で時速 4 キロメートルである。

今晩はクラブが当番で，エースから 10 までの 10 人がパトロールに出ていた。アリスが見ていると真夜中の 12 時ちょうどにクラブのエースが大手門の前を通過した。クラブのエースが 1 時ちょうどに再び大手門の前を通過する確率はどのくらいだろうか？ただし，兵士たちが最初に歩き出す位置と方向は全くランダムであるとする。

解答:

最初の問題は，個々の兵士の動きを追うと，混乱して何がなんだか分からなくなるが，兵士を全体として眺めると，話は極めて簡単になる。二人の兵士は鉢合わせすると向きを変えると言っているが，ただすれ違ったとしても，個々の兵士を区別しない限り，全体としての動きは変わらないことに気づくのがポイントだ。従って，普通に歩いて最初の兵士が守衛所に辿り着く時刻をなるべく遅らせてやればいい。

初期配置では，兵士間は 15 メートル以上なければならないので，一人目を東の守衛所の位置に，それ以降は 15 メートルづつ空けて 5 人を配置する。同様に西の守衛所の位置から 15 メートルづつ空けて残りの 5 人を配置する。そこで，正午と同時に，東に配置したした兵士は西に，西に配置したした兵士は東に行進させればいい。鉢合わせしてもすれ違うだけだとすると，中央に近い 二人の兵士は $200 - 15 \times 4 = 140$ メートル歩いたところで守衛所に到達する。鉢合わせしたときに反転する場合でも，全体の動きは同じだから 140 メートル分歩いたところで 二人の兵士が休憩に入る。違うのはその 二人が最初両端にいた兵士だということだけである。中央の兵士をこれ以上守衛所から離すことは不可能だから，140 メートル分の時間以上には全員行進を続けさせることはできない。

次の問題は，いささか不思議な感じのする問題だ。直感では，全員が同じ方向にパトロールしていない限り，クラブのエースがちょうど 1 時間後に全く同じ場所を通過することなどなさそうに思う。しかし，前問と同様，全体としての動きはすれ違う場合と変わらないので，1 時間後に大手門前を同じ方向に通過する兵士がいることに間違いはない。問題は，その兵士がクラブのエースである確率だ。

各兵士に, 最初，自分の名前を書いた名刺を持たせ，他の兵士と出会ったときその名刺を交換させると，物事が分かりやすくなる。明らかに，どの名刺も，兵士同士がどこで何回出会おうとちょうど一時間後に周遊路を 1 周してもとの位置に戻ってくる。

ここで，クラブのエースの名刺が途中で何回交換されるかを考えてみよう。今後の説明を分かりやすくするために，エースを 0 番とし，反時計回りに 1 から 9 までの番号を順に兵士と名刺に振る。エース，すなわち兵士 0 (と名刺 0) が 12 時に大手門を通過したとき反時計回りだったとし，そのとき時計回りに動いていた兵士は k 人だったとしよう。名刺 0 は，自分と同じ方向に進む名刺とは決して出会うことがないが，逆方向に周る名刺とは 1 周する間にちょうど 2 回出会う。名刺同士は，出合った時に必ず交換されるから，名刺 0 は合計で $2k$ 回交換されることになる。

さて，ここでもう一つ重要なことは，10 人の兵士の配置を眺めたとき，互いの距離は変わっても順番は決して変わらないことである。つまり，反時計回りに見て，0，1，2，……，9 という順はいつまでたっても保たれる。

名刺 0 は反時計回りに動くのだから，兵士 0 から 兵士 1， 兵士 1 から兵士 2 へと順に受け渡されて行くしかない。とすれば，$2k$ 回の交換後に名刺 0 を持っている兵士の番号は明らかで，それは $2k \bmod 10$ である。

こんどは，兵士 0 が 12 時に大手門を通過したとき時計回りだったとしよう。先と同様にそのとき時計回りだった兵士の数を k とする。この k 人には兵士 0 自身も含まれる。先と同様に考えると，名刺 0 は，時計回りに周遊し，$2(10 - k)$ 回交換される。従って，1 周後に名刺 0 を持つ兵士の番号は $-2(10 - k) \bmod 10 = 2k \bmod 10$ である。

以上により，名刺 0 は，兵士 0 の最初の向きに関係なく，1 周後には ($2k \bmod 10$) 番の兵士の手にあることになる。午前 1 時に大手門の前を通るのは，当然この兵士だが，それがエースであるのは $2k \bmod 10 = 0$ の場合，つまり，$k = 0, 5, 10$ の場合である。最初，各兵士の動く向きはランダムと仮定したので，時計回

りの兵士の数が 0 または 5 または 10 となる確率は，n 人から i 人を選ぶ組合せの数 $\binom{n}{i}$ を用いて

$$\frac{1}{2^{10}}\left(\binom{10}{0}+\binom{10}{5}+\binom{10}{10}\right)=\frac{127}{512}$$

と書け，その値は約 0.248 である。ついでながら，午前 1 時に大手門前を通る兵士が奇数番である可能性はなく，2 番と 8 番の可能性はともに

$$\frac{1}{2^{10}}\left(\binom{10}{1}+\binom{10}{4}\right)=\frac{1}{2^{10}}\left(\binom{10}{6}+\binom{10}{9}\right)=\frac{220}{1024}=\frac{55}{256},$$

4 番と 6 番の可能性はともに

$$\frac{1}{2^{10}}\left(\binom{10}{2}+\binom{10}{7}\right)=\frac{1}{2^{10}}\left(\binom{10}{3}+\binom{10}{8}\right)=\frac{165}{1024}$$

であることが，同様に分かる。

また，以上の考察は，時計回りの兵士の数 k のみに依存し，他のいかなる要因にもよらない。よってどの名刺も 1 時間後には反時計回りに $2k$ 番先の兵士の手に渡り，5 時間後には必ず元の兵士の手に戻る。つまり，大手門前を通る兵士も，1 時間ごとに反時計方向に $2k$ 番ずつずれて行く。従って，k の値にかかわらず，午前 5 時には再び兵士 0 が大手門前を通ることも分かる。

兵士数 n が偶数の場合は，上の 10 人の場合と似たような状況になるが，奇数の場合，$2k \mod n = 0$ の解は $k = 0$ と $k = n$ だけなので，1 時間後にエースが大手門前に戻る可能性は $1/2^{n-1}$ しかない。一般に，兵士たちはいつか全員同時にもとの位置に戻るが，確実にそうなる最初の時刻は，$2k$ と n の最大公約数を d とすると n/d 時間後である。

3　遠慮深いと得する？（2012/09）

外国に長期滞在しているヤマネの兄が，留守宅に土産物を送ってきた。色々なものがあったが，7 人のヤマネの姪たち（すなわち，兄の娘で，生まれた日にちなんでそれぞれ曜日の名前を持つ）に送ってきた缶入りキャンディーの分配法が問題になった。缶を開けて，キャンディ一の個数を数えてみると，7 で割り切れないのだ。

知恵のないヤマネがどうしたものかと考えているうちに，姪たちの間で奪い合いが始まり，収拾がつかなくなった。全部のキャンディーが誰かのポケットに収まったとき，ついにサンデイが泣き出した。「ひどいわ，ひどいわ。あたしは 5 個しかない。マンデイなんかあんなにいっぱい取ったのに」

幸いグリフォンが通りかかったので，助けを求めると，グリフォンは「まあ，まあ，サンデイちゃん，落ち着いて。そうだね，とにかく名前の順に輪になって並びなさい。サンデイちゃんは，マンデイちゃんとサタデイちゃんの間だよ」

いつも知恵を貸してくれるグリフォンの言葉なので，しぶしぶながら姪たちも従う。

「さてどうしようか。キャンディの数は 7 の倍数ではないと。ふーむ，でも 70 個よりは多かったんだね。すると，少なくとも 1 人 10 個はもらってもいい。では，完全には平等とは行かないが，こうしてみよう。サンデイちゃん，キミは今 5 個しかもっていないんだね。では，10 個に足りない分 5 個づつを両隣のマンデイちゃんとサタデイちゃんからもらっていいことにしよう。合わせて 15 個になるけど，5 個は最初遠慮していたことへのご褒美だ」

すると，今度はサタデイから不満の声が挙がる。「そんなのないわ。マンデイは最初にたくさん取ったから大丈夫でしょうけど，サンデイに 5 個もやったから，あたしはたった 4 個になっちゃったわ」

「おや，キミも結構遠慮してたんだ。いいよ，そしたら，キミも今不足している 6 個を両隣からもらうことにしよう。あれ，すると今度はサンデーちゃんが，また 10 個に足りなくなっちゃうね。それにフライデイちゃんも足りなくなるかもしれない。まあ，いいさ。10 個に足りない人がいれば，その分を両隣からもらうというのを続けることにしようよ。」

今度は，子供たち全員からブーイングが挙がった。「そんなこと言ったって，それがいつまでも続いて終わらなかったらどうするのよ」

グリフォンはニヤリと笑って「まあ，やってみなって」と言っただけだが，さて，このキャンディーのやり取り，いつか必ず終わると言えるのだろうか？いつまでもやり取りが続く場合があるなら，その場合の最初のキャンデー分配はどうなっているだろうか。最初の分配がどうであろうとこのやり取りが永遠に続くことが決してないなら，そのことを証明してほしい。

念のため，1 つだけ申し添えると，状況によっては，やり取りの途中で隣からの要求に答えるに十分な個数のキャンディを持っていない場合が生じうるが，その場合は，帳簿上の赤字処理をして（または手形を発行して）ともかくやり取りは続けることにする。

解答:

この問題の出典は，1986 年の国際数学オリンピックであり，「5 角形問題」としてかなり有名になったから，元の問題を御存じの読者もおられるかもしれない。ヤマネの姪は 7 人だが，実は人数に関係なく解くことができ，元の「5 角形問題」は，5 人の場合と本質的に同じである。

数学オリンピックを扱った本で，過去の良問として例示されていることもあるから，解答を御存じの読者もあろうが，このコラムの種本として使っているウィンクラーの「とっておきの数学パズル」(日本評論社，坂井・岩沢・小副川 訳）に述べられた解答は，帰結の強力さにおいて，類を見ないように思う。まず，それを解説しよう。

説明を簡単にするためにサンデイ，マンデイ，チューズデイ，ウェンズデイ，サースデイ，フライデイ，サタデイをそれぞれ 0 から 6 までの数値で表す。操作を決めるのは，各自の持つキャンディ個数の 10 からの過不足であるから，i の持つキャンディーの個数から 10 引いた数を $x(i)$ とする。これらの合計 $x(0)+\cdots+x(6)$ を p とする。キャンディーの総数は 70 より多かったのだから，p は正であることに注意しておこう。

卓抜なアイディアは，次のような数列 $\ldots, a(n), \ldots$ を考えることだ。まず，$a(0)=0$ とする。さらに $a(1)=x(0), a(2)=x(0)+x(1), \ldots$，一般には $a(n+1)=a(n)+x(n \bmod 7)$ とする。いわば塁計を取るわけだが，$a(7)$ でやめずに，$a(8)=a(7)+x(0), a(9)=a(8)+x(1), \ldots$ と巡回しながら次々に加えていくところがミソだ。さらに $a(-1)=-x(6), a(-2)=-x(5)-x(6), \ldots$ と，n が負の整数の場合まで，同じ漸化式を満たすように $a(n)$ の定義を広げよう。すると，この数列 $\ldots, a(n), \ldots$ が 7 を周期として値が一定値ずつ大きくなって行くことは明らかだろう。式で書けば $a(7k+i)=pk+a(i)$ で，p は上で述べた $x(0)$ から $x(6)$ までの総和だ。キャンディー 10 個未満（すなわち $x(i)<0$）の子 i が両隣から不足分をもらうと，$x(i-1)$，$x(i)$，$x(i+1)$ は $x(i-1)+x(i)$，$-x(i)$，$x(i+1)+x(i)$ に変化する（ここで，$i+1$ や $i-1$ は 7 を法として，すなわち 7 で割った余りで考えてほしい）。さて，このことは先の数列にどういう変化を及ぼすだろうか。少し考えるとわかるように $a(i-1)$，$a(i)$，$a(i+1)$，$a(i+2)$ は $a(i-1)$，$a(i+1)$，$a(i)$，$a(i+2)$ に変化する（ここでの $i-1$，$i+1$，$i+2$ は法 7 で考える必要はない）。この変化は周期的に数列全体を通して起こる。つまり，すべての k について $a(7k+i)$ と $a(7k+i+1)$ が入れ替

わる。ここで $x(i) < 0$ であったことに注意すれば，$a(7k+i) > a(7k+i+1)$ である。すなわち，キャンディーのやり取りは，数列 $\ldots, a(n), \ldots$ で考えれば，隣合う 2 項 $a(i)$ と $a(i+1)$ で $a(i) > a(i+1)$ なるものを見つけて 7 つおきに一斉にそれらを入れ替えるという操作に他ならないのだ。

今，ある i に着目したときに $i < j$ かつ $a(i) > a(j)$ なる j は有限個しかない。このことは明らかだろうが，厳密に述べるなら，$j > i$ として $j - i = 7k + m$ $(0 \leqq m < 7)$ とすれば，$a(j) = pk + a(i+m)$ だから，$a(i) > a(j)$ であるためには

$$\frac{a(i) - a(i+m)}{p} > k$$

が必要十分だが，各 $m \in \{0, 1, \ldots, 6\}$ ごとにこのような k は有限個しかなく，全部合わせても有限個である。その数を $S(i)$ とすると，もちろん $S(i)$ は周期を 7 とする関数である。さて，$S = S(0) + S(1) + \cdots + S(6)$ とすると，先の $a(i)$ と $a(i+1)$ を 7 つおきに一斉に入れ替える操作により，この S の値が 1 だけ下がることがわかる。従って，S 回の操作後，S の値は 0 になり，数列 $\ldots, a(n), \ldots$ は広義単調増加になる。そして，それは $x(i)$ の値がすべて 0 か正になったということに他ならない。

上の証明がすぐれているのは，問題で要求された以上にたくさんのことがわかることだ。まず，人数が 7 人でなくとも同じ証明が機能することは自明だろう。また，上の S の値が 0 でない限り，$a(n)$ は広義単調増加でないから，$a(i) > a(i+1)$ となる i が存在する。ということは $x(i)$ は負だから，キャンディーのやり取りをする必要がある。従って，操作が終了するのは S が 0 になったときだけであり，そこに至るまでにちょうど S 回操作が必要だ。すなわち，キャンディ数が 10 に足りない子が複数人いる場合でも，どういう順で進めるかは全く関係なくちょうど S 回で操作は終了するということだ。さらに，各人の持つキャンディーの個数が整数であるということも，操作の停止性にまったく寄与していない。仮に，ジュースを分け合う場合であっても，操作を同じように定義するなら，p が正でありさえすれば，証明はまったく同じように機能し，あらかじめ定まる特定回数を進めたところで手順に関係なく操作が停止することが示される。

4　賞金は仲良く平等に（2019/01）

先月号ではお大尽の支援のおかげで，無事に合同演芸会の賞金が工面できたという話をしたが，今月号では演芸会後の賞金を演技者間でどう分配したかの顛末だ。演芸会にはグループで参加して芸を披露した者が少なからずいた。例えばトウィードルダムとトウィードルディーの双子は「喧嘩漫才」で 2 人での参加だし，ヤマネの姪たちは 7 人，白のポーンたちは 8 人そろっての登場だ。無限モグラ国から特別出演のモグラたたきサーカスとなると一体何人が登壇していたのか良く分からないくらいだ。

お大尽の意向に沿って大勢の演技者が賞金を獲得したのは良かったのだが，グループ演技の場合はそれをさらに分配するので一悶着だ。ディーとダムの双子の場合など，なにか平等だと感じられる分け方がないと，2 人とも意固地になって賞金が宙に浮いてしまいかねない。演技での役割によって重みが付けられればかえって分けやすいのだが，そうもいかない場合もある。

しかし，そこはお大尽，それを聞いて嬉しそうに「ほほう。では平等に分けられるように，わしからさらに銀貨を追加してしようではないか」と言う。「だが，ただ人数で割り切れるように銀貨を出すというのもつまらん。そうするに当たって何か面白い趣向はないかのう？」

アリスにちょっとしたアイディアがひらめいた。「こういうのはどうかしら？最初にグループ内で賞金を適当に分配して，全員が輪になって並ぶ。このときの分け方は平等でなくともでたらめでいいの。例えば，全部 1 人占めして他の人は 0 枚というのでも。このときに奇数枚だった人は，お大尽さんから 1 枚もらっ

て偶数枚にし，全員が偶数枚になったら，一斉に手元の銀貨の半分を右隣りの人に渡す。これを繰り返していれば，やがては全員が同じ枚数でしかも偶数になるんじゃないかしら？」

「フーム，良さそうな気もするがのう」とお大尽。「しかし，いつまでも奇数枚の人がなくならず，際限なく銀貨を足さねばならんということはないかの。いくらわしじゃって，出せる銀貨には限りがあるぞよ。それに，さらに銀貨を増やす必要はなくとも，そのやり取りがいつまでも続いて終わらんということはないかの？」

読者への問題は，このお大尽の疑問に答えて頂くことである。つまり，アリスの考えた平等化プロセスがお大尽の懐を無制限に当てにすることがないことを証明するか，その反例を作って頂きたい。また，銀貨が無尽蔵に必要という事態が生じない場合でも，銀貨のやり取りがいつまでも続いて安定化しない。つまり全員が同じ枚数になることが永遠にない場合があるかどうかを考えて頂きたい。

解答例:　簡単な場合を少し試してみよう。例えばディーとダムの場合，もらった賞金額が 8 枚だとしよう。この場合，均等に分け合うことができるのだが，ちゃっかり者の 2 人は，アリスの提案を聞いて最初 1 枚と 7 枚に分割した。ともに奇数枚なので，お大尽から 1 枚ずつ補充してもらい，それぞれ半分ずつを相手に渡すことで 5 枚ずつになった。これで平等になったのでもういいだろうと思いきや，5 は奇数なのでまたお大尽から 1 枚ずつ補充されてともに 6 枚になった。この調子でいつまでもお大尽の懐を当てにされると困ったことになるが，さらにやり取りを続けても 2 人の枚数はともに偶数の 6 で変化せず分配が完了する。

他の場合を試してみると，2 人の場合，もらった賞金額がいくらであってもまたそれを最初にどのように分配しようと，2 回やり取りを行った後は状態が安定するようだ。

さて，一般に n 人で同じようなやり取りを行う場合はどうだろうか。実は，少し考えれば，最初にどのように賞金が分配されていても，このやり取りで 1 人のところに集まる額には限界があることがわかる。最初の分配のときの最大枚数に着目しよう。その枚数が奇数であっても，やり取りを始める前にお大尽から 1 枚補充されるので，最大枚数は偶数 $2m$ であるとしてかまわない。以降のやり取りで各人のところに集まる額は，この $2m$ が限界で，やり取りをいくら続けようと誰かに $2m$ を超える枚数の銀貨が集まることはありえない。それは 1 回のやり取りごとの各人の銀貨枚数の変遷を考えれば簡単に了解できよう。最大の $2m$ 枚の銀貨を持つ人は，m 枚を右隣に渡して，左隣から何枚かをもらうけれどもそれが m 枚を超えることはないから，その結果の枚数は $2m$ 以下である。やり取り前に最大枚数未満の銀貨しか持ってなかった人は，もちろんやり取り後も $2m$ 枚未満だ。それらが奇数の場合，次のやり取りの前にお大尽から 1 枚補充されるが，それでも $2m$ 枚以下であることに変わりはない。

よって，全員の持っている銀貨枚数をすべて足し合わせても，それが $2m \times n$ を超えることはなく，お大尽が無尽蔵に銀貨を供給するという事態は生じない。

残る問題は，状態が安定化することがなく，いつまでもやり取りが続くことがあるかだ。実は，そういうことはないのだが，その証明はやや技巧的だ。いつまでもやり取りが続くことがあったとして，矛盾を導こう。

お大尽からの銀貨の供給がいつまでも続くことはないから，ある時点からは，互いに銀貨を受け渡すだけになる。それより後を考えよう。そのようなある時点で各人が持っている銀貨の枚数を右へ順に a_1 , $a_2, \ldots, a_n$ としよう（輪になっているので，a_n 枚の人の右隣に a_1 枚の人がいる）。ここから先の分配の「平等さ」加減を表す指標として，2 乗和 $S_0 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$ を導入するのが便利だ。a_i は全部偶数で，やり取りが 1 回進むと各人の持っている銀貨の枚数は $(a_n + a_1)/2$, $(a_1 + a_2)/2, \ldots, (a_{n-1} + a_n)/2$

になるから，その 2 乗和 は

$$S_1 = \frac{(a_n + a_1)^2}{4} + \frac{(a_1 + a_2)^2}{4} + \cdots + \frac{(a_{n-1} + a_n)^2}{4}$$

に変化する。$S_0 - S_1$ は簡単な計算で

$$S_0 - S_1 = \frac{(a_n - a_1)^2}{4} + \frac{(a_1 - a_2)^2}{4} + \cdots + \frac{(a_{n-1} - a_n)^2}{4} \geqq 0$$

となることがわかり，もし等号が成立するなら $a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_n$ である。これは，やり取りがさらに進んでも同じだから，2 乗和の変遷を次々に S_2，S_3，... とすると，$S_0 \geqq S_1 \geqq S_2 \geqq S_3 \geqq \ldots$ となる。各 S_i は正の整数だから，無限に小さくなり続けることはできず，ある i が存在して $S_i = S_{i+1}$ である。このときの各人の銀貨枚数を $b_1, b_2, \ldots, b_n$ とすると $b_1 = b_2 = b_3 = \cdots = b_n$ でなければならず，銀貨は完全に平等に分配され，以降のやり取りは安定していることがわかる。 □

5　スイッチを切り替えるスイッチ（2012/12）

鏡の国の白の騎士がまた，面白い装置を発明したらしいという噂が流れてきた。好奇心のかたまりのアリスが，早速白の騎士の工房に駆けつけてみると，既にハンプティ・ダンプティや赤白の王室の面々も集まって，かまびすしいことこの上ない。発明品が何なのかとのぞきこんでみると，たくさんのスイッチが輪になって繋がっているだけのように見える装置だ。

「何かのタイマーですか？」とそばにいたハンプティ・ダンプティに聞くと「まあ，そうとも言えるな」と例によって考え深げな応答のあと，「……だが，それ以上だ。なんと，時間が来ると隣のスイッチを切り替えるというスイッチだからな」

「？？？」アリスがキョトンとしていると，実演が始まった。確かにハンプティの言うとおりで，最初は全部のスイッチがオンになっていたのだが，自分の番が来たときにオンになっていたスイッチは，時計回り方向に隣にあるスイッチに信号を送り，そのオン・オフを切り替えるらしい。順繰りに番が来るようにタイマーがセットされていて，あるスイッチの次に番が来るのは時計回りにその隣にあるスイッチだ。自分の番のときオフであれば，そのスイッチは何もしないで次の番のスイッチに移る。

装置はひたすらに，ただ各スイッチのオン・オフだけを繰り返していたが，全部のスイッチがオンという最初の状態に戻ったとき，集まっていた見物衆から拍手と喝采が挙がった。

「ほら，どうだ。すごいじゃないか」とハンプティから同意を求められても，アリスは大きかった期待に比例する脱力感で声が出なかったが，読者は，脱力していないで問題を考えていただきたい。

まず，ウォーミング・アップとして，この装置では（スイッチが 2 つ以上つながっていれば）すべてのスイッチがオフになることはないことを証明していただきたい。

次に，この奇妙な装置は，輪になってつながったスイッチの数が何個であろうと，全部がオンという最初の状態に必ず戻るかどうかを考えていただこう。最初の状態に戻らない場合があるだろうか？

解答:

そのとき隣に信号を送る番になっているスイッチを信号係と呼ぶことにしよう。

まず，全部がオフになることがないことの証明だが，これはちょっと考えれば当たり前なので，バカにするなと読者からお叱りを受けそうで心配だ。最初は全部がオンだったのだから，全部オフになることがあるとすれば，その直前の状態は，1 つを除いて全部オフということになっている。ところが，この最後のス

イッチがオフになるためには，その上流の信号係から切り替えの信号が来なければならないが，信号係はオフなのでそんなことはありえない。

次に全部がオンという初期状態に戻らないことがあるかだが，スイッチの数を増やしながら少し実験してみると，例外なく初期状態に戻るので，予想は容易につく。さて，その証明だが，実はこの種のことを示す手法を 2012 年 6 月号の「アイスクリームケーキの怪」でも用いている。つまり，状態の有限性と状態遷移の可逆性だ。

スイッチに 1 から順の番号を時計回りに振ることにする。そのとき信号係の番号と各スイッチのオン・オフの状況を，装置全体の状態と考えると，考えうる状態は全部で有限種類しかない（正確には，スイッチの個数が n であれば，$2^n \times n$ 種類の状態がある）。

現在の状態からはもちろん次の状態がわかる。たとえば，今，信号係が i 番のスイッチでそれがオンであるとしよう。次の状態では，信号係は $i+1$ 番になり（この番号は n を法として考える，つまり $i=n$ なら 1 番に戻る），そのスイッチの状態はオン・オフが反転することがわかる。しかし，現在の状態からは，その直前の状態がどうであったかもわかるのだ。すなわち，直前の状態では，信号係はもちろん $i-1$ であり，それがオフであれば，i 番のスイッチはそのときもオンであったが，$i-1$ 番がオンであれば，i 番のスイッチはそのときはオフであった。

したがって，状態遷移は逆にたどることも可能であり，ある状態に至る直前の状態はただ 1 つしかない。状態全体は有限種類しかないので，どの状態から始めてもやがてある状態が再現することになる。初めてそれが起こる時点を考えると，それがそもそもの初期状態でないと，その状態になる直前の状態が 2 通り以上あることになり矛盾するというわけだ。

実際に，装置の動きをシミュレートしてみるとなかなか面白い。全スイッチがオフの場合は，その状態がいつまでも続くだけだが，それ以外の場合は，途中で実に様々なパターンが現れる。$n=2,3,4$ の場合，全オフ以外のどの状態から始めても，他の全オフ以外の状態がすべて出現したあとで初期状態に戻る。つまり状態全体が 2 分類され，「全オフ」と「オンあり」でそれぞれループを形成する。一方 $n=5,6$ の場合は，状態全体は，それぞれループを形成する 4 グループに分割される。n の値によりこれらの構造がどうなっているかを調べるのも面白いかもしれない。

6　回転テーブルとスイッチ（2016/01）

お茶会 3 人組は鏡の国博物館を見学中だ。今ヤマネが注意を引かれているのは，縁にたくさんのスイッチがついている円形の回転テーブルだ。テーブルの中央に電灯があり，スイッチが全部オンになると点灯する。何のことはない。ただスイッチと電灯が全て直列につながっているだけらしい。もちろん各スイッチはオンとオフの 2 通りの状態が取れるが，見た目ではどちらの状態なのかは分からない。ただ各スイッチを推すとその状態が入れ替わるだけだ。

そこでヤマネはスイッチを次々と押しててみて電灯を点灯させようと躍起になっている。ところが，ほとんどデタラメに押しているだけなので，同じスイッチの状態が再現したりして，電灯がつくかどうかは賭けみたいなものだ。

そこで，読者にはまず，ヤマネにシテマティックなボタン操作をアドバイスして頂いて，有限回内に電灯が確実に点くようにしてほしい。

さて，帽子屋は，そのやり方で確実に電灯が点けられるようになるまでヤマネの様子を見ていたが，ついイタズラ心を刺激され，意地悪を始めた。ヤマネがスイッチを 1 つ押すたびに，テーブルを適当に回転し

てしまうのだ。テーブルは完全に回転対称なので，そんなことをされると，前に押したスイッチがどれなのか誰にも分からなくなり，ヤマネでなくともお手上げだ。

幸いに助け舟にヤマネの 7 匹の姪たちが現れた。姪たちの協力を得れば，8 個までなら同時にスイッチを押すことができる。ヤマネと姪たちは，スイッチ数が 2 個と 4 個の場合に，協力によるうまい操作手順で（帽子屋による邪魔があっても）一定回数内内に確実に電灯を点灯させる手段を見つけたが，それはどういうものだろうか？また，スイッチ数が 2 や 4 以外の場合に，その方法はうまく拡張できるだろうか？

解答例: 最初の問題の場合，各スイッチは区別がつくので，n 個のスイッチがあるとして，それに 1 から n までの番号を振っておこう。重複がないようにスイッチ状態を順次作り出して行く手順は色々と考える得るが，比較的簡単でシステマティックなやり方の 1 つは次のようなものだ。奇数回目の操作では常にスイッチ 1 を押す。奇数の 2 倍回目の操作ではスイッチ 2 を押す。奇数の 4 倍回目の操作ではスイッチ 3 を押す。…… 以下同様に奇数の 2^n 倍回目の操作ではスイッチ $n+1$ を押すというものだ。最初の状態からみて，オンオフが入れ替わっているスイッチを 1，同じ状態のスイッチを 0 で表し，右から順に並べた 2 進数でスイッチ全体の状態を表現するなら，たとえば，スイッチ数 n が 4 の場合，操作回数とともに状態は次の表のように変化する

回数	状態
0	0000
1	0001
2	0011
3	0010
4	0110
5	0111
6	0101
7	0100
8	1100
9	1101
10	1111
11	1110
12	1010
13	1011
14	1001
15	1000

この表には，全スイッチ状態がもれなく現れ，同じものはない。そのことは，すぐに見て取れるし，一般の n について証明したければ，n に関する数学的で簡単にできる。したがって，最初のスイッチ状態がどうであろうと 15 回以内（一般には 2^n-1 回以内）の操作で全てのスイッチのオンになる。たとえば，最初の状態では，2 番のスイッチだけがオンで 1,3,4 番がオフだったとすれば，電灯を点けるには 1,3,4 番のスイッチを反転させればよい。その状態 1101 には 11 回目の操作で辿り着く。

上の表の「回数」を「状態」で表現した 2 進数は，グレイコードと呼ばれ，計数器などに使う技術として米国で特許がとられたことで有名だ。グレイコードは，隣合う 2 つの数を表現する 2 進数の間に 1 ビットの違いしかないという特長があり，それが上の問題の解の構成に使えたゆえんである。パズル玩具に詳しい読者は，ハノイの塔やチャイニーズリングの解法とも密接な関係があることをご存知だろう。

次の問題は，相対的にしか各スイッチの区別がつかなくなるので厄介だ。だが，スイッチ数が 2 の場合は，少し考えれば，うまいやり方を思いつくだろう。最初から電灯が点いていないならば，両スイッチのうち片方はオフだ。そこで，ヤマネたちは両スイッチを同時に押す（この操作を p と呼ぶ)。もし両方ともオフなら，そこで電灯が点くはずだ。点かなかったとしたら，スイッチは一方がオフでもう一方がオンだ。

テーブルが回転してもその状況は変わらない。そこで次にはどちらか片方のスイッチを押す（この操作を s と呼ぶ)。そのスイッチがオフだったなら，電灯が点くはずだ。そうでなくとも，今度は両スイッチともにオフになる。したがって，次に両ボタンを同時に押せば電灯は点灯する。つまり psp という操作により，3 回以内で目的は達成される。では，スイッチが 4 つの場合はどうだろうか？一気に解決するのはかなり大変そうなので，順次考えていこう。最初に全部のスイッチを押してみる（この操作を a と表現する)。もし全部がオンならば，最初から電灯が点っているし，全部がオフならばこの時点で点る。つまり，ここで点らなければオンオフが混じっていることになる。オンとオフが奇数個の場合は後に回し，2-2 に別れている場合を先に考えよう。オンを 0，オフを 1 で表現すると，この場合，時計周りに 0011 と 0101 となっている 2 通りが考えられる（もちろん，これらが順繰りに回転していることもあり得るのだが，帽子屋の邪魔が入ることが前提なので，それらを区別しても意味がない)。そこで次には対面にある 2 つのスイッチだけを押してみよう（この操作を b と表現する)。すると，0101 は 0000 か 1111 に変わる。0000 に変わった場合，そこで電灯が点くし，1111 ならもう一度全スイッチを押してやればいい。こうして aba という操作により，最初の状態が 0000, 1111, 0101 の場合は電灯が点る。0011 は駄目だが，その場合は状態が変わらず 0011 のままだ。そこで，次にはは隣同士の 2 つのスイッチを選んで押してみよう（この操作を c と表現する)。するとどこの 2 つを選ぶかによるが，0011 は 0000, 1111, 0101 のいずれかに変わる。したがって，この後に aba という操作をやっているうちには電灯が点ることになる。つまり，スイッチのうち偶数個がオンの場合，$abacaba$ という操作により，7 回以内に目的に達する。奇数個がオンの場合は駄目だが，この操作をやってもオンが奇数個という状況は変わることがない。そこで，次に 1 個のスイッチを押してみよう（この操作を d と表現する)。するとオンのスイッチ数は偶数個に変わる。したがってその後に $abacaba$ という操作を行えば電灯は点る。結局，$abacabadabacaba$ という操作により，最初のスイッチの状態がどうであれ，（高々 15 回で）点灯させることができる。

これをさらにスイッチ数 n が 2 や 4 以外の場合に一般化するという問題は難しい。しかし，実は n が 2 のベキ 2^k の形をしているなら可能であり，たとえば，$n = 8 = 2^3$ の場合，確実に点灯させる手段はある。その方法では，最悪の場合 $2^8 - 1 = 255$ 回の操作が必要になりあまり現実的とはいえないかもしれないが，スイッチが 8 もあると所詮 2^8 通りのパターンを試す必要はあるので，これ自体は仕方がない。また，$n = 16$ の場合には 16 個のスイッチを同時に押さねばならないことがあるので，姪たち以外に応援してくれる者がないと，各人が 2 つずつ同時にスイッチを操作するというような必要が生ずる。

$n = 2^k$ の解手順から $n = 2^{k+1}$ の解手順をどのように構成するか述べよう。$X = x_1x_2\cdots x_r$ を $n = 2^k$ の場合に電灯を点灯させるための手順としよう。各 x_i は 2^k 個のスイッチに対する操作から構成されているが，x_i' で 2^{k+1} 個のスイッチに対して x_i をコピーして行う操作を表そう。つまり，2^{k+1} 個のスイッチのうち対面に位置する 2 つのスイッチには同じ操作を行うことになる。先のスイッチが 2 個の場合と 4 個の場合に当てはめれば，$p' = a$，$s' = b$ である。また，x_i'' で相続く半分のスイッチ 2^k 個に対しては x_i と同じ操作を行い，残りの 2^k 個に対しては何もしないという操作を表そう。同様にスイッチが 2 個の場合と 4 個の場合に当てはめれば，$p'' = c$，$s'' = d$ である。すると，4 個の場合の手順 $abacabadabacaba$ は $p's'p'p''p's'p's''p's'p's''p's'p'$ と表すことができる。一般には，これを拡張して Y を手順 $x_1'x_2'\cdots x_r'$ とするなら，$n = 2^k$ の場合の解手順は $Yx_1''Yx_2''\ldots Yx_r''Y$ と表せる。これでうまく行くことの厳密な証明は省略するが，概略を述べると，各 Y は対面同士のスイッチが全て同じ状態の場合に電灯を点けるための手順であり，$x_1''x_2''\ldots x_r''$ はそうでない場合に対面同士を同じ状態にするための手順である。

m が 3 以上の奇数で $n = m \times 2^k$ と書ける場合には，電灯を確実に点灯させる手段は存在しない。これも厳密な証明は面倒だが，多少事情を説明すると，たとえば $n = 3$ の場合，スイッチの状態が 000 と 111

のならば，簡単に点灯させせることができる。しかし，それ以外の 001 や 001 の場合を有限回で確実に 000 や 111 に持っていく手段がないからだ。一般には，各スイッチのオンオフ状態が周期 2^k を持つなら，先の手順を拡張した手段で全スイッチをオンにすることができるが，帽子屋による邪魔があると，そうでない状態から周期 2^k を持つ状態へ確実に進む手段は存在しない。 □

7　ハートの女王による継子立て (2014/1)

表敬訪問の際の歓待のお礼として，鏡の国のチェス王室秘蔵の「不老不死薬」が不思議の国のトランプ王室へ贈られて来た。1 人しか使えないということもあって，兵士たちの誰かに特別ボーナスとして支給しようということになり，トランプ城の中は誰がもらうかで騒ぎになっている。

アリスが見たところ，トランプ城の住人達は「老」にも「死」にもあんまり縁がなさそうで，そんな薬の何がありがたいのかわからないのだが，どうやら兵士達はもらえるものは何でももらおうというつもりらしい。

王室がどうやって人選をするのだろうかと，アリスが見学に行ったら，ハートの女王は兵士全員をホールに集め，スペード，ハート，クラブ，ダイヤの順にエースから 10 まで輪になって並ぶように言った。それからアリスに「そちの好きな数は何か」ときき，アリスが「7 です」と答えると，スペードの A から順に 1 から 7 までの番号を繰り返し唱えさせ，7 を唱えたものを次々に輪から外して行った。最後まで残った者に景品を支給するつもりらしい。

何のことはない。継子立てである。ヨーロッパではヨゼフス問題と呼ばれることが多い。馴染みのある読者も多かろうが，今月はこのパズルを少し楽しんで頂こう。まずは，ウォーミングアップ問題として，この女王による継子立ての結果，「不老不死薬」を手に入れた兵士は誰かを考えてほしい。また，もしアリスが 41 人目として，この継子立てに加わることが許され，自分の位置を選べるとしたら，景品を入手するには，どの兵士の間に入るのが良いだろうか？

この 2 つのウォーミングアップ問題は，地道にやれば必ず正解が得られるが，次に，アリスが比較的小さな数を選んだ場合に，この計算を高速化する方法を考えてほしい。例えば，アリスが選んだのが 7 でなく 2，3, 4 の場合，誰に景品がわたるかを早く決定する方法はあるだろうか？

最後の問題としては，好きな数を聞かれたのがアリスでなく，兵士の 1 人だったとして，自分が景品を手に入れられるようにその数を選ぶ方法を考えてほしい。

解答:

最初の問題は，40 個の印を丸く描き，誰が輪から外れていくか実際に調べることで簡単に答えが得られる。毎回，図を描くのが厄介であれば，次のような工夫をするともっと良いかもしれない。

スペードのエースに番号 0 を振り，以降 $1, 2, \ldots$ と順次番号を振って行くと最後のダイヤの 10 は番号 39 になって，一周する。一般に n 人の輪があり，1 から k までの数を何度も唱えて，k 番を唱えた人を外していくとき，最後に残る人の番号を $J_k(n)$ とするなら，n または k についての漸化式が求まれば，計算が機械的になる。というわけで，$J_k(n-1)$ の値から $J_k(n)$ を求めることを考えてみよう。実は n 人の輪というのは $n+1$ 人から始めて最初の一人が外された状態と考えることができる。違うのはその時振られている番号だけである。n 人のとき 0 番の人は，$n+1$ 人で始めたときは k 番だったはずであり，同様に j 番の人は，$j+k$ 番だったことになる。全体が輪になっているので，より正確には，$n+1$ で割った余りをとる必要があるから，実は $J_k(n+1) = (J_k(n)+k) \bmod (n+1)$ という漸化式が成立する（ここで，$y \bmod x$ は y を x で割った余りを表す)。1 人しかいない場合，もちろん番号は 0 だから，$k = 7$ の場合，

初期値 $J_7(1)$ を 0 として $J_7(n)$ を順次計算すれば,

$$J_7(1)=0, J_7(2)=1, J_7(3)=2, J_7(4)=1, J_7(5)=3, \cdots$$

となって，ある程度手間はかかるが $J_7(40)=23$ が得られ，この番号を持つ兵士はクラブの 4 とわかる。また，$J_7(41)=30$ だから，もう一人増えたときは番号 30 の位置が当たりになるので，2 番目の問題では，アリスはクラブの 10 とダイヤのエースの間に入るのが良いとわかる。

さて，上の漸化式を使う方法は，結局，地道にやると n 回くらいの計算が必要となる。そこで，まず $k=2$ 場合に，もっと効率よく $J_2(n)$ を求める方法を考えよう。そのために $1,2,1,2,\ldots$ と番号を唱えて行き，ちょうど 1 周したときの状況を考えてみる。最初の人数が偶数のときと奇数のときとで，やや状況が異なる。偶数の $2n$ 人の場合，奇数番号の人は輪から外れ，輪に残っているのは，$0,2,4,\ldots,2n-2$ 番の n 人となり，ちょうど n 人の輪で始める場合と同じになる。ここで番号を振り直すと，$2n$ 人のときの番号は，明らかに振りなおした後の番号の 2 倍になる。したがって $J_2(2n)=2J_2(n)$ という式が成立する。奇数の $2n-1$ 人の場合も，同様に奇数番号の人は輪から外れるが，最後の番号が $2n$ なので次に外れるのは 0 番になる。よってその状況まで進めるとやはり n 人が残るが，その番号は $2,4,6,\ldots,2n$ となる。ここで番号を振り直すと，古い番号は新しい番号の 2 倍より 2 多くなる。よって $J_2(2n+1)=2J_2(n)+2$ という式が成立する。これに $J_2(1)=0$ という初期条件を加えることで，先のよりはかなり高速に $J_2(n)$ を計算する漸化式が得られる。実際，40 人の場合でやってみると

$$J_2(1)=0, \quad J_2(2)=2\times 0=0, \quad J_2(5)=2\times 0+2=2, \quad J_2(10)=2\times 2=4,$$
$$J_2(20)=2\times 4=8, \quad J_2(40)=2\times 4=16$$

となり，$J_2(1), J_2(2), J_2(3), \ldots$ と順次計算するより，格段に効率が良い。もっとも，漸化式 $J_2(n+1)=(J_2(n)+2) \bmod (n+1)$ による計算の場合でも，$J_2(n)$ の値は通常は 2 ずつ増加して行き，それが $n+1$ に達したときに，$\mathrm{mod}(n+1)$ の効果が現れ 0 に戻ることに気づけば，効率的に計算することが可能だ。実際，少し考えれば n が 2 のべき 2^m の形のときに $J_2(n)=0$ になることがわかるだろう。すると一般の n の場合，n 以下の最大の 2 のべき 2^m をとり，$n=2^m+r$ $(0\leqq r<2^m)$ とおけば $J_2(n)=2r$ となることが，先の漸化式から容易に証明できる。

では，$k=3$ や $k=4$ の場合にも，同様の早い計算法があるだろうか。$k=2$ の場合にならって計算して，あえて式を一気に書き下せば，

$$J_3(n)=\left\lfloor \frac{3}{2}J_3\left(\left\lfloor \frac{2}{3}n \right\rfloor\right)+a_n \right\rfloor \bmod n$$

となる。$\lfloor x \rfloor$ は x の小数点以下の切り捨て，すなわち，x を超えない最大の整数を表し，また a_n は $n \bmod 3=0,1,2$ に応じて $0,3,3/2$ である。確かにこの漸化式では，$J_3(n)$ の値を計算するのに，n を元に 2/3 くらいの値に下げているので，逐次的にやるよりだいぶ速そうだが，こういう複雑な式はあまり歓迎されまい。

そこでほんの少しだけ考え方を変えてみよう。$1,2,3,1,2,3,\ldots$ と繰り返し唱える代わりに，$0,1,2,3,4,\ldots$ と順に唱えていって，$n \bmod 3=2$ すなわち $n=3m-1$ の形の数を唱えた者を輪から外しても結果は同じである。例えば スペードのエースから 8 までが輪になって，これを行なうと下の表のよ

うになる。

♠A	♠2	♠3	♠4	♠5	♠6	♠7	♠8
0	1	2	3	4	5	6	7
8	9	–	10	11	–	12	13
–	14	–	15	–	–	16	17
–	–	–	18	–	–	19	–
–	–	–	20	–	–	21	–
–	–	–	–	–	–	22	–

表で – となっているのは，$3m-1$ を唱えて輪から外されたことを示している。表は誰が外れたが最後までわかるように 22 まで書いてあるが，実はゲーム自体は 20 を唱えたときが終わりで，次の 21 を唱えるべき兵士，すなわちスペードの 7 が勝者である。

一般に n 人ゲームでは $3(n-1)$ を唱えることになった者が勝者になる。さて，いま p 番を唱えた者がいるとして，$p \geq n$ ならば，その人が番号を唱えたのが初めてであるはずはない。では，前に唱えた番号は何番だろうか。それを q とし，$q = 3m + i$ $(i = 0, 1)$ とおく（$i = 2$ だと輪から外されてしまうので，次に番号を唱える機会は来ない）。このときまでに，m 人が輪から外れたはずであり，残っているのは $n-m$ 人である。すると次にその人の唱える番号は $q+n-m$ だから，これが p と等しい。よって $3m+i = q = p-n+m$ であるが，これを m について解くと，$i = 0, 1$ より $m = \lfloor (p-n)/2 \rfloor$ となる。従って $q = p-n+\lfloor (p-n)/2 \rfloor$ となり，番号 p を唱えた人が前に唱えた番号 q を計算できる。勝者が $3(n-1)$ を唱えることになるのは間違いないので，そこからその前の番号を順次計算していくことができる。例えば $n = 8$ の場合なら，$3 \times (8-1) = 21$ から初めて，$19, 16, 12, 6$ と計算して行ける。$6 < 8$ だから，その前に番号を唱えたはずはなく，勝者の最初の番号が 6 だったことがわかる。

同じ論法により，アリスの選んだ数が k ならば，$p_0 = k(n-1)$ から初めて，漸化式

$$p_{s+1} = p_s - n + \left\lfloor \frac{p_s - n}{k-1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{k(p_s - n)}{k-1} \right\rfloor$$

により，$p_1, p_2, \ldots$ を順次計算して行き，$p_s < n$ が達成されたところで $J_k(n) = p_s$ が求まる（$k = 2$，$n = 2^m + r$ $(0 \leqq r < 2^m)$ の場合，この方法は実質的には $0 \leqq 2n - 2^s < n$ なる $2n - 2^s$ として $J_2(n) = 2r$ を求める方法となっている）。しかし，これは k が n に比べ小さい数でないと，あまり効率の良い方法とはいえないかもしれない。もっと良い漸化式，あるいはこの漸化式を速く計算する方法をご存知の読者は，おられるだろうか。

最後の問題は，自分の最初の位置が j だったとして，$J_k(40) = j$ となるように k が選べるかという問題である。答えはイエスなのだが，これを証明したり，そのような k を実際に見つけるとなると相当の難問だろう。

まず，比較的簡単な $j = 0$ の場合を片付けることにしよう。最初の人数を n として，L を 1 から n までの整数の最小公倍数とする。$n = 40$ なら

$$L = 5342931457063200$$

である。ばかでかい数だが，$k = L$ とすれば，$J_k(n) = 0$ である。なぜなら $k = L$ は n 以下のすべての正の整数で割り切れるので，k を唱えるのはいつでも最後の番号の人となるからだ。つまり，$n-1, n-2, \ldots$ 番の順に輪から外れて行き，最後に残るのは 0 番になる。

では，$j \neq 0$ の場合はどうすれば良いか。そのために，まず n 以下の最大の素数を p としよう。$n = 40$ の場合 $p = 37$ であるが，ベルトランの仮説と言うのがあり，$p > n/2$ であることは証明されている。また，L の定義から $M = L/p$ は整数であり，M と p は互いに素であることがわかる。

$j < p$ の場合を先にすまそう。その場合，k を M の倍数で $k \equiv j \pmod p$ であるように選べば，$J_k(n) = j$ となる。なぜなら，k は $p+1$ から n までのすべての整数で割り切れるので，人数が p 人になるまでは最後の番号の人が輪から外される。p 人のとき外れる人は，k の決め方より $j-1$ 番となる。ここで番号を付け替えると新しく 0 番になるのは j 番の人であり，k は 1 から $p-1$ のすべての整数で割り切れるから，前と同じ理屈で最後に残るのは新しい番号で 0 番，すなわち元は j 番の人である。

最後に $j \geqq p$ の場合だが，$j' = n-1-j$ とすれば，$j' < p$ となるので，上のやり方で $J_{k'}(n) = j'$ となる k' を計算できる。そこで $k = L+1-k'$ とすれば，k を使ったときは，k' を使ったときとは対称的に人が外れていくので最後に残るのは j 番となる。例えば $j = n-1$ の場合，$k = 1$ とすることで，0 番から順に外れて行き最後に残るのは，当然 $n-1$ 番になる。

8　トランプ王国晩餐会の席順（2016/08）

トランプ王国の晩餐会が開かれている。今回は特別ゲストとしてアリスも招かれ，和やかに進むかと思えたのだが，そう順調に行かないのがトランプ王室だ。会は何晩か連続で開くことが多いのだが，2 晩目に問題発生だ。そのトラブルメーカーとなったのが，読者も予想の通り，ハートの女王である。

ハートの女王の言い分に寄れば，「昨晩は自分から 7 席右にダイヤの 6 が座っていたのだが，今晩もまたそうだ。せっかくこうして懇親のために会を設けているのだから，それはけしからん。どの 二人の位置関係も前の晩とは違っていなければならん」というわけだ。言い出すとあとへは引かないハートの女王のこと，早速，前の晩の席順を調べ，今晩はどういう順に座るのがよいかをアリスとスペードのエースが中心になって計画した。

読者の皆さんには，アリスとスペードのエースを助けて，2 晩目の席次表を作っていただきたい。考えやすいように，最初の晩は，アリスから右にスペードのエース，2 から 10，ジャック，女王，王の順に，あとは同じ順にハート，ダイヤ，クラブと並んでアリスに戻って来るような席順だったとしよう。念のために申し添えておくが，ハートの女王の考えによると，二人を隔てる席数が同じであっても左右が異なっていれば，位置関係は異なるということだ。

2 晩目の席順がうまく決められたら，3 晩目はどうだろうか？ もちろん，どの 二人も 1 晩目，2 晩目のどちらとも異なる位置関係に座らねばならない。

この晩餐会の成功に気を好くしたハートの女王，今度は王宮内の 1 室でハートだけの連続晩餐会を計画した。出席者はハートの王侯と兵士たちにアリスを加えた 14 名。同様な円卓を囲む席次表を 2-3 晩分作るようにアリスに依頼したが，さてこの企画どうなるだろうか？

解答例:　2 晩目に関する最初の問題は，気がつきさえすれば非常に簡単な解がある。客同士の位置関係は，隔たりが同じでも左右が異なれば違うと考えるのだから，2 晩目は単に逆順に座ればよい。全人数が偶数だったりすると，逆順に座っても対面同士は同じ位置関係になってしまうが，53 人は奇数だから同じ位置関係の客二人が生ずる恐れはない。

しかし，3 晩目は，客が 53 人もいるので，やみくもにやろうとするとかなり面倒だろう。53 人から 二人を選び出す組み合わせの数は $(53 \times 52)/2 = 1378$ 組もあるので，各ペアについて前 2 晩とは位置関係が異なっているということを確認するだけでも大仕事だ。

この種のことは，当然だが，システマティックにやるのが一番だ。まず，考慮しなければならないのは各客の位置関係だけだから，全員を一律に左右にずらしても構わない。そこで，たとえばアリスはいつも同じ座席に着席すると考えることができる。その席を 0 番とし，それから右へ 1 番，2 番と進めぐるりと 52

番まで数えて，アリスの席に戻ってくるとする。ここまでで，勘のよい読者はもう解の構成がおわかりであろう。各席は 53 で割ったときのあまりの数値で考えればよい。座席の位置関係についてもそうである。

ここからは，各客が k 晩目に座る座席を一気に指定してしまうほうが簡単だろう。最初の晩に i 番目の座席に座った客が k 晩目に座る座席を ik とする。ik は 53 を超えていることもあろうが，その場合はもちろんそれを 53 で割った余りの数値が指定する座席に座る。

まず，k 晩目の指定が正しく座席指定になっているかを考えよう。つまり，それによって二人が同じ座席に割り当てられることがないかだが，幸い 53 が素数なので，$k = 1, 2, \ldots, 52$ についてはその心配はない。よく知られているように，もし $ik \equiv jk \pmod{53}$ ならば，$i \equiv j \pmod{53}$ であることが示されるからだ。

次に，ある 2 晩 k と k' で 二人の座席の位置関係が同じになることがあるかだが，そういうことがある場合，その 二人の最初の晩の席を i と j とするなら，$ik - jk \equiv ik' - jk' \pmod{53}$ が成り立ち，$k \equiv k' \pmod{53}$ が導かれる。だから，1 晩目から 52 晩目までは，ハートの女王の要求を満たしたまま，晩餐会を続けられるということになる。実際，最初の解で示した逆順に並ぶというのは，上の解構成での 52 晩目の座席順に他ならない。

最後に 14 人での晩餐会を考えよう。14 は素数でないから，上のような解の構成はできない。実際，最初に座席 i に座った人を翌日 ik に座らせようとすると，$i = 7$ の場合にうまく行かない。k が偶数の場合，アリスと座席がぶつかってしまうし，k が奇数の場合でも，$7k \equiv 7 \pmod{14}$ だから，アリスとの位置関係は対面同士のまま変わっていないことになる。というわけで，他のやり方で客をうまく配置できるかいろいろと試してみると，どうしてもどれか 1 組くらいのペアは初日と同じ位置関係になってしまい，うまく行かない。どうしてだろうか？

実は，これは 14 人に限ったことではなく，偶数人の場合には避けられないのだ。それを証明しよう。今，客数を $2n$ とし，初日に座席 i に座った人の翌日の座席番号を $\sigma(i)$ としよう。もしどのペアも初日と 2 日目の位置関係が異なるとしたら，異なる i と j については $i - j \not\equiv \sigma(i) - \sigma(j) \pmod{2n}$ だ。つまり $i - \sigma(i) \not\equiv j - \sigma(j) \pmod{2n}$ だが，これは $0 - \sigma(0)$, $1 - \sigma(1), \ldots, (2n-1) - \sigma(2n-1)$ を $2n$ で割った結果の余りがすべて異なるということで，余りには 0 から $2n-1$ が 1 回ずつ出てくるということに他ならない。そこでこれらの総和を考えると，

$$\sum_{i=0}^{2n-1} (i - \sigma(i)) \equiv \sum_{i=0}^{2n-1} i \pmod{2n}$$

である。ところが $\sigma(0), \sigma(1), \ldots, \sigma(2n-1)$ にも 0 から $2n-1$ が 1 回ずつ出てくるのだから，

$$\text{左辺} = \sum_{i=0}^{2n-1} i - \sum_{i=0}^{2n-1} \sigma(i) = 0, \qquad \text{右辺} = \sum_{i=0}^{2n-1} i = n(2n-1) \equiv n \pmod{2n}$$

となり，矛盾する。

こうして人数が偶数の場合は，ハートの女王の要求を満たすような晩餐会を連夜開催することは不可能だと示された。また，人数が奇素数 p の場合，先と同様な議論により $p-1$ 夜連続で開催することが可能だとわかる。人数が奇数の合成数の場合は，初日と逆順にすることで 2 晩目までは OK だが，連続で何夜まで開催可能だろうか？ この問題の検討は読者におまかせしよう。 □

9 非負整数の円環（問題のみ）

4 つの非負整数を円環状に並べる。隣り合った 2 つの数の差をその 2 つの間に記し，元の数を消す。つまり，最初の数を左回りに a，b，c，d とすると，次には $|a-b|$，$|b-c|$，$|c-d|$，$|d-a|$ となる。これを繰り返していると，やがては 0 が 4 つになるというのは本当か？ 4 つではなく 2^m 個の数を円環状に並べた場合はどうか？

10 仲の悪い兵士たちの円環（問題のみ）

ハートの女王は，トランプ兵士たち全員 40 名を円環状に並んで座らせようと考えた。互いに仲の悪い兵士がいるが，どの兵士もそれはたかだか 20 名未満だと分かっている。40 名を円卓に座らせて，仲の悪い騎士同士が隣り合わないようにすることができることを示せ。