

6月22日の研究会での問題の解答

岸本健吾 (大阪市立大学大学院理学研究科 D2)

2008年8月18日

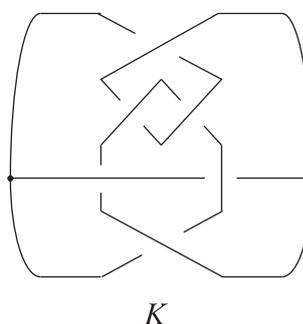
1 問題と復習

1.1 問題

1. K の shadow R_3 -coloring の彩色数の multiset を求める.
2. 3-cocycle

$$f(a, b, c) = 2c(a - b)(b - c)^2$$

を用いて, $\Phi_f^\Sigma(K)$ を求める.



1.2 復習

定義 1.1 (quandle)

次の三つの公理をみたす空でない集合 X と二項演算 $*$: $X \times X \rightarrow X$ の組 $(X, *)$ を quandle という.

$$Q_1. a * a = a \quad (\forall a \in X).$$

$$Q_2. S_a : X \rightarrow X \text{ を } S_a(x) = x * a \text{ で定義すると, } S_a \text{ は全単射 } (\forall a \in X).$$

$$Q_3. (a * b) * c = (a * c) * (b * c) \quad (\forall a, b, c \in X).$$

以降, $S_a^n(x)$ を $x *^n a$ で表す ($x * a^n$ と表すこともある).

定義 1.2 (quandle の type)

quandle X が type m であるとは, $\min\{n > 0 \mid x *^n a = x \text{ for any } a, x \in X\} = m$ であるときをいう.

例. (dihedral quandle)

集合 \mathbb{Z}_p と二項演算 $a * b := 2b - a$ の組 $(\mathbb{Z}_p, *)$ は公理 Q_1, Q_2, Q_3 をみたし, quandle となる. これを order p の dihedral quandle といい, R_p で表す. R_p は type 2 である.

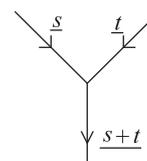
定義 1.3 (\mathbb{Z}_m -flow)

K を spatial trivalent graph とする.

$$\varphi : \{\text{edge of } K\} \rightarrow \mathbb{Z}_m \times \{\text{edge orientation}\} / (s, o) \sim (-s, -o)$$

が \mathbb{Z}_m -flow であるとは, K の全ての頂点の周囲で右図の関係をみたすときである.

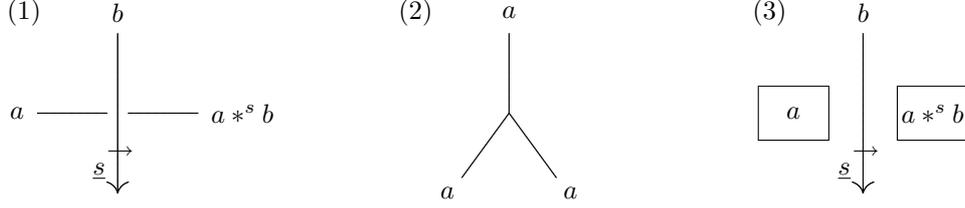
K の \mathbb{Z}_m -flow 全体の集合を $\text{Flow}(K; \mathbb{Z}_m)$ と表し, K と $\varphi \in \text{Flow}(K; \mathbb{Z}_m)$ の対を φ による flowed spatial trivalent graph といい, $K^{(\varphi)}$ で表す.



以降, X を type m の quandle とし, $K^{(\varphi)}$ を \mathbb{Z}_m -flow φ による flowed spatial trivalent graph, $D^{(\varphi)}$ をその diagram とする.

定義 1.4 (shadow X -coloring)

diagram $D^{(\varphi)}$ に対して, $C : \{\text{arc of } D^{(\varphi)}\} \cup \{\text{region of } D^{(\varphi)}\} \rightarrow X$ が $D^{(\varphi)}$ の shadow X -coloring であるとは, 次の (1), (2), (3) をみたすことである.



ここで $a, b \in X$, $s, t \in \mathbb{Z}_m$ である (混乱を避けるため s, t を $\underline{s}, \underline{t}$ で表している).

また $D^{(\varphi)}$ の shadow X -coloring 全体の集合を $\widetilde{Col}_X(D^{(\varphi)})$ で表す. このとき $\#\widetilde{Col}_X(D^{(\varphi)})$ は, flowed spatial trivalent graph の invariant となり, これを $K^{(\varphi)}$ の shadow X -coloring の彩色数といい, $\#\widetilde{Col}_X(K^{(\varphi)})$ と書く. さらに $\#\widetilde{Col}_X^\Sigma(K)$ を以下のように定義する.

$$\#\widetilde{Col}_X^\Sigma(K) := \{\#\widetilde{Col}_X(K^{(\varphi)}) \mid \varphi \in \text{Flow}(K; \mathbb{Z}_m)\} \text{ (as a multiset).}$$

定義 1.5 (quandle cocycle invariant $\Phi_f(K)$)

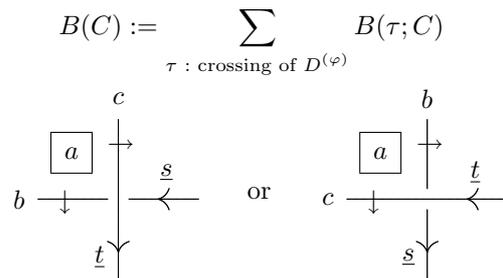
f を X の任意の元, a, b, c に対して, 次の等式をみたす quandle 3-cocycle とする.

$$\sum_{i=0}^{m-1} f(a *^i b, b, c) = \sum_{i=0}^{m-1} f(a *^i c, b *^i c, c) = 0.$$

$D^{(\varphi)}$ の shadow X -coloring C に対し, $D^{(\varphi)}$ の crossing τ での Boltzmann weight $B(\tau; C)$ を次のように定義する.

$$B(\tau; C) := \text{sign}(\tau) \sum_{i=0}^{s-1} \sum_{j=0}^{t-1} f((a *^i b) *^j c, b *^j c, c),$$

ここで, $s = 0$ または $t = 0$ のとき, $B(\tau; C) = 0$ とする. 次に $B(C)$ を以下のように定める.



このとき $\Phi_f(K^{(\varphi)})$ を以下のように定義する.

$$\Phi_f(K^{(\varphi)}) := \{B(C) \mid C \in \widetilde{Col}_{R_p}(D^{(\varphi)})\} \text{ (as a multiset).}$$

さらに $\Phi_f^\Sigma(K)$ を以下のように定義する.

$$\Phi_f^\Sigma(K) := \{\Phi_f(K^{(\varphi)}) \mid \varphi \in \text{Flow}(K; \mathbb{Z}_m)\} \text{ (as a multiset).}$$

2 問題の解答

2.1 shadow R_3 -coloring の彩色数

K の \mathbb{Z}_2 -flow の集合は以下のものである.

$$\begin{aligned} \text{Flow}(K; \mathbb{Z}_2) &= \{K^{(s,t,u)} \mid s, t, u \in \mathbb{Z}_2, s + t + u \equiv 0 \pmod{2}\} \\ &= \{K^{(0,0,0)}, K^{(0,1,1)}, K^{(1,0,1)}, K^{(1,1,0)}\}. \end{aligned}$$

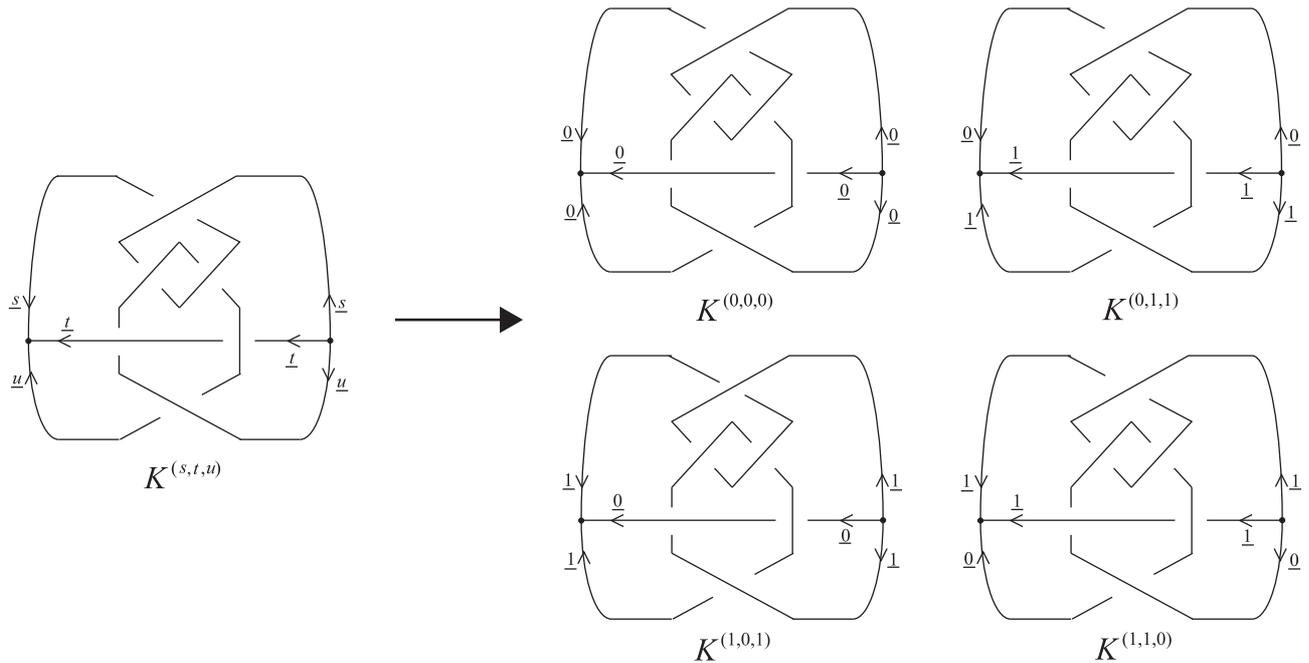
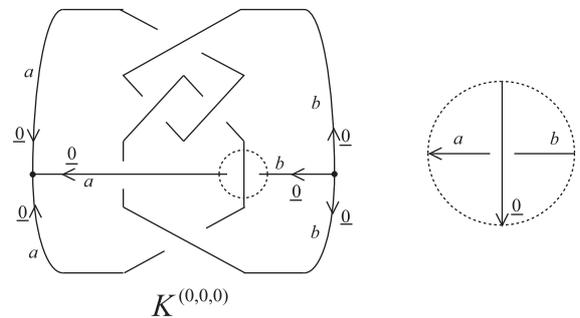


図 1

2.1.1 $K^{(0,0,0)}$ の shadow R_3 -coloring

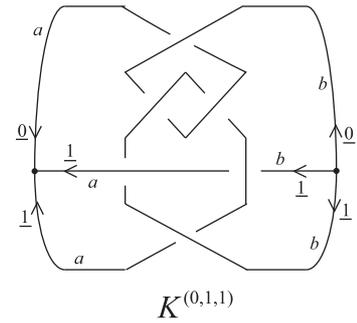
- (1) 左側の頂点に接続している 3 本の arc の color を a , 右側の頂点に接続している 3 本の arc の color を b とする (coloring の定義 (2) を参照).
- (2) 図の破線で囲った交点の周囲を見ると, 0 の flow の上道の左右に a, b の color のついた arc がある. 任意の $c \in R_3$ に対して $a *^0 c = a$ であることから, 上道の color に関係なく $a = b$ となることがわかる.
- (3) 同様にして他の arc の color も全て $a (= b)$ となることが分かる. つまり $K^{(0,0,0)}$ は 3 つの trivial R_3 -coloring ($a = 0, 1, 2$) しか持たない.



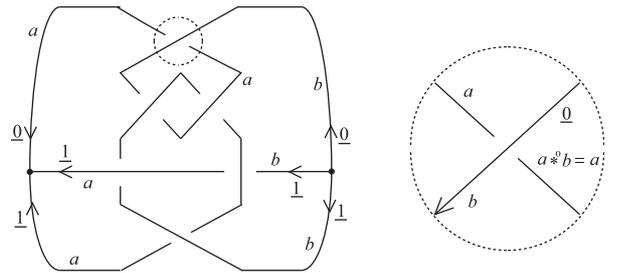
以上のようにして arc の coloring を決めたあとで, region の coloring を考える. region の coloring については, 一つの region の color を決めれば他の region の color は一意的に定まるので, shadow R_3 -coloring の数は, 単純に arc の R_3 -coloring の数の 3 倍となる. つまり $\#\widetilde{Col}_{R_3}(K^{(0,0,0)}) = 3^2$ となる.

2.1.2 $K^{(0,1,1)}$ の shadow R_3 -coloring

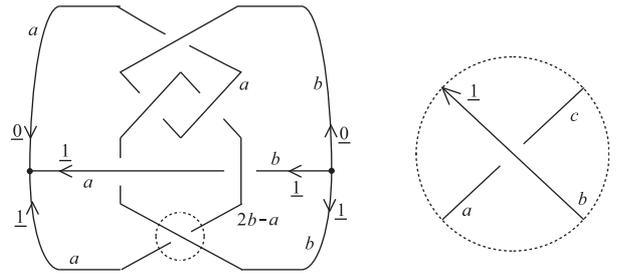
(1) 左側の頂点に接続している 3 本の arc の color を a , 右側の頂点に接続している 3 本の arc の color を b とする.



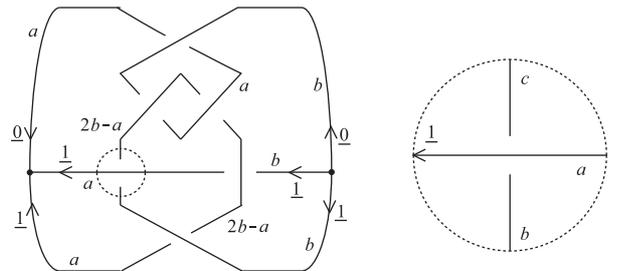
(2) flow 0 の edge の周囲の arc から color を付けていくと手間が減るので, 破線で囲った交点に着目する. すると $a *^0 b = a$ であることから, 右下の arc の color が a であることがわかる.



(3) 残りの arc に color を付けていく. 図のように $c * b = a$ から $c = 2b - a$ がわかるので, 破線で囲った交点の右上の arc の color は $2b - a$ となる.



(4) 同様にして, $c * a = b$ から $c = 2a - b$ となり, 破線で囲った交点の上の arc の color は $2a - b$ となるが, $2b - a \equiv 2a - b$ であるので $2b - a$ と統一しておく.



$K^{(0,1,1)}$ は $a, b, 2b - a$ で coloring することができるので, 9 個の R_3 -coloring を持つ. ここで $a \neq b$ ならば, $2b - a \neq a, b$ となることに注意する. したがって, $\# \widetilde{Col}_{R_3}(K^{(0,1,1)}) = 3^3$.

2.1.3 K の shadow R_3 -coloring の彩色数

このようにして $K^{(1,0,1)}, K^{(1,1,0)}$ の coloring をみると, どちらも $K^{(0,0,0)}$ と同様に trivial R_3 -coloring しか持たないことがわかる. したがって, $\# \widetilde{Col}_{R_3}^\Sigma(K)$ は以下のとおりである.

$$\begin{aligned} \# \widetilde{Col}_{R_3}^\Sigma(K) &= \{ \# \widetilde{Col}_{R_3}(K^{(0,0,0)}), \# \widetilde{Col}_{R_3}(K^{(0,1,1)}), \# \widetilde{Col}_{R_3}(K^{(1,0,1)}), \# \widetilde{Col}_{R_3}(K^{(1,1,0)}) \} \\ &= \{ 3^2, 3^3, 3^2, 3^2 \} = \{ 9, 9, 9, 27 \}. \end{aligned}$$

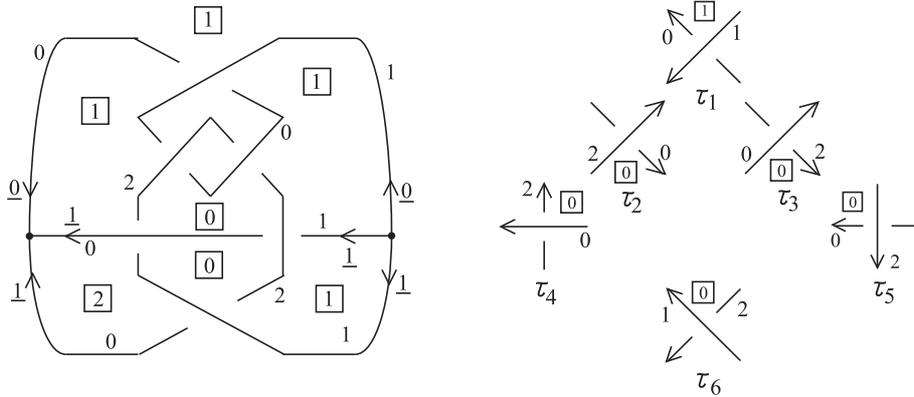
2.2 quandle cocycle invariant $\Phi_f(K)$

trivial coloring を与えられた diagram は, その任意の交点 τ に対して weight $B(\tau; C)$ は常に 0 となる. つまり $B(C)$ も 0 になるので, trivial coloring しか持たない $K^{(0,0,0)}$, $K^{(1,0,1)}$, $K^{(1,1,0)}$ の Φ_f は 0 が 9 個の multiset となる. よって $\Phi_f(K)$ を求めるには $K^{(0,1,1)}$ のみを考えれば十分である.

2.2.1 計算の例

例として以下の shadow R_3 -coloring C に対して, 定まる weight $B(C)$ を計算する. 今, R_3 は type 2 なので $B(\tau; C)$ は次のように言い換えられる.

$$B(\tau; C) := \begin{cases} \text{sign}(\tau)f(a, b, c) & (s = t = 1), \\ 0 & (\text{その他}). \end{cases}$$



$$\begin{aligned} B(C) &= B(\tau_1; C) + B(\tau_2; C) + B(\tau_3; C) + B(\tau_4; C) + B(\tau_5; C) + B(\tau_6; C) \\ &= 0 + 0 + 0 + (-f(0, 2, 0)) + (-f(0, 0, 2)) + f(0, 2, 1) \\ &= (-0) + (-0) + (-4) \equiv 2 \pmod{3}. \end{aligned}$$

2.2.2 結果

$K^{(0,1,1)}$ の shadow R_3 -coloring C は図 2 のとおりである.

これらの weight をすべて計算すると, 以下が得られる.

$$\Phi_f(K^{(0,1,1)}) = \underbrace{\{0, \dots, 0\}}_{9 \text{ 個}}, \underbrace{\{2, \dots, 2\}}_{18 \text{ 個}}$$

したがって $\Phi_f^\Sigma(K)$ は次のようになる.

$$\begin{aligned} \Phi_f^\Sigma(K) &= \{\Phi_f(K^{(0,0,0)}), \Phi_f(K^{(0,1,1)}), \Phi_f(K^{(1,0,1)}), \Phi_f(K^{(1,1,0)})\} \\ &= \{\underbrace{\{0, \dots, 0\}}_{9 \text{ 個}}, \underbrace{\{0, \dots, 0\}}_{9 \text{ 個}}, \underbrace{\{2, \dots, 2\}}_{18 \text{ 個}}, \underbrace{\{0, \dots, 0\}}_{9 \text{ 個}}, \underbrace{\{0, \dots, 0\}}_{9 \text{ 個}}\} \\ &= \{\underbrace{\{0, \dots, 0\}}_{9 \text{ 個}}, \underbrace{\{0, \dots, 0\}}_{9 \text{ 個}}, \underbrace{\{0, \dots, 0\}}_{9 \text{ 個}}, \underbrace{\{0, \dots, 0\}}_{9 \text{ 個}}, \underbrace{\{2, \dots, 2\}}_{18 \text{ 個}}\}. \end{aligned}$$

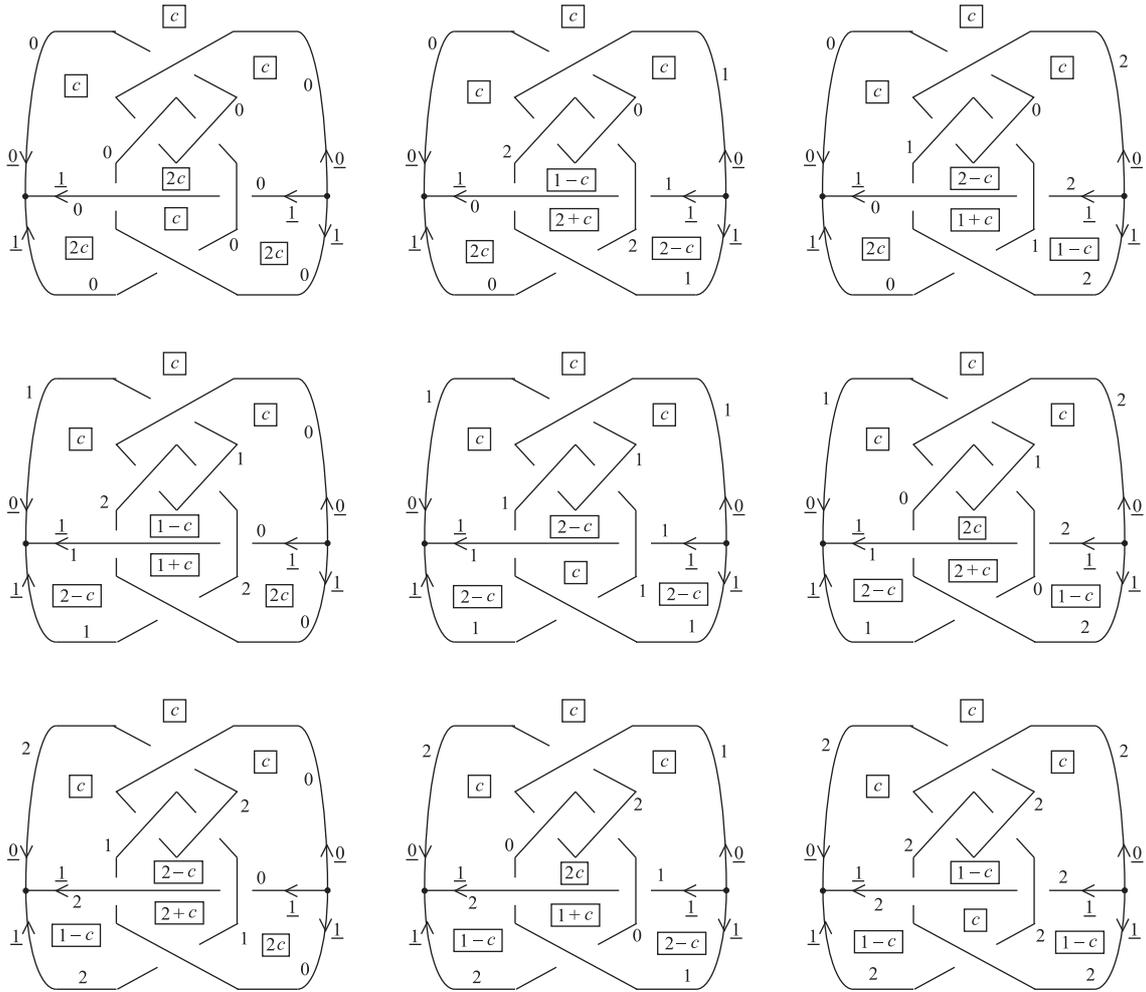
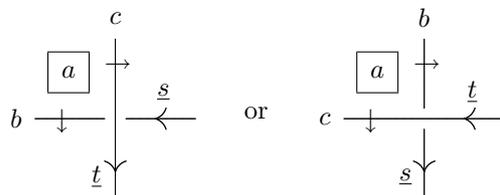


図 2 $c = 0, 1, 2$ を省略しているので実際は 27 個考える必要がある

3 Boltzmann weight の定義に関して

Section 1 において, Boltzmann weight $B(\tau; C)$ を次のように定義した.

$$B(\tau; C) := \text{sign}(\tau) \sum_{i=0}^{s-1} \sum_{j=0}^{t-1} f((a *^i b) *^j c, b *^j c, c),$$



この Section では, もう一つの Boltzmann weight の定義を紹介し, 2 つの定義が同値であることを説明する.

X を type m の quandle とし, $K^{(\varphi)}$ を φ による flowed spatial trivalent graph, $D^{(\varphi)}$ をその diagram とする. C を $D^{(\varphi)}$ の shadow X -coloring とする. このとき $\bar{D}^{(\varphi)}$ を, $D^{(\varphi)}$ から次の操作によって得られる diagram とする.

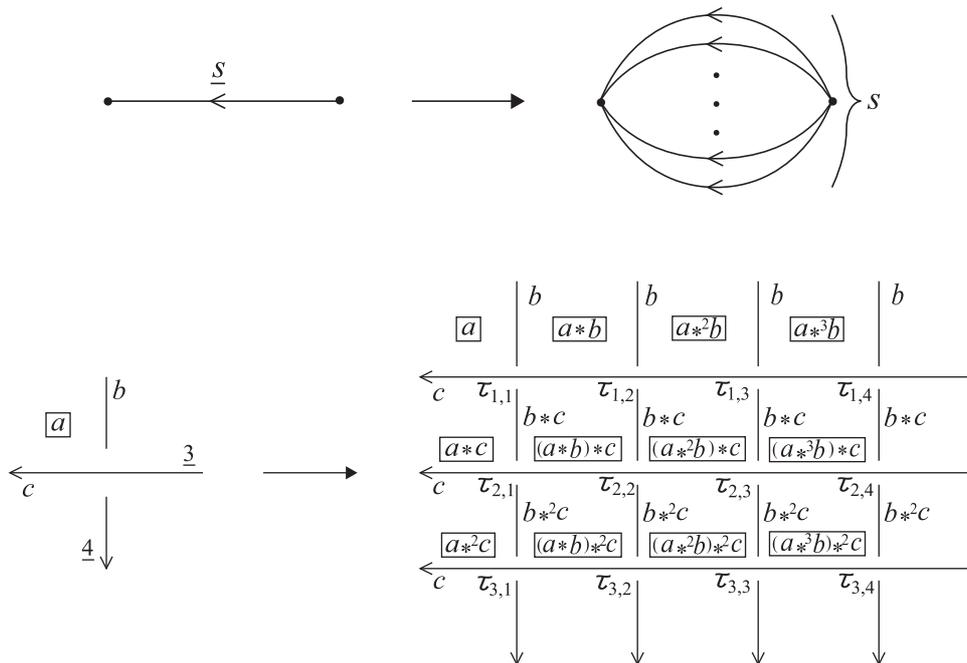
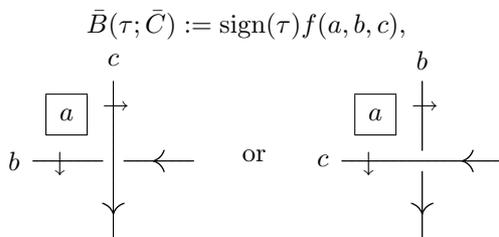


図 3 $s = 4, t = 3$

定義 3.1 (Boltzmann weight)

$\bar{D}^{(\varphi)}$ の crossing τ に対して, Boltzmann weight $\bar{B}(\tau; \bar{C})$ を次のように定義する. ここで \bar{C} は C から自然に導かれる $\bar{D}^{(\varphi)}$ の shadow X -coloring とする.



次が成り立つことから, 2 つの Boltzmann weight の定義が同値であることがわかる.

$$B(\tau; C) = \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^s \bar{B}(\tau_{i,j}; \bar{C}) = \text{sign}(\tau) \sum_{i=0}^{s-1} \sum_{j=0}^{t-1} f((a *^i b) *^j c, b *^j c, c).$$

実際に図 3 の例で, 2 つの Boltzmann weight は以下のようにになっている.

$$\begin{aligned}
B(\tau; C) &= \text{sign}(\tau) \sum_{i=0}^{4-1} \sum_{j=0}^{3-1} f((a *^i b) *^j c, b *^j c, c) \\
&= f(a, b, c) + f(a * b, b, c) + f(a *^2 b, b, c) + f(a *^3 b, b, c) \\
&\quad + f(a * c, b * c, c) + f((a * b) * c, b * c, c) + f((a *^2 b) * c, b * c, c) + f((a *^3 b) * c, b * c, c) \\
&\quad + f(a *^2 c, b *^2 c, c) + f((a * b) *^2 c, b *^2 c, c) + f((a *^2 b) *^2 c, b *^2 c, c) + f((a *^3 b) *^2 c, b *^2 c, c) \\
&= \bar{B}(\tau_{1,1}; \bar{C}) + \bar{B}(\tau_{1,2}; \bar{C}) + \bar{B}(\tau_{1,3}; \bar{C}) + \bar{B}(\tau_{1,4}; \bar{C}) \\
&\quad + \bar{B}(\tau_{2,1}; \bar{C}) + \bar{B}(\tau_{2,2}; \bar{C}) + \bar{B}(\tau_{2,3}; \bar{C}) + \bar{B}(\tau_{2,4}; \bar{C}) \\
&\quad + \bar{B}(\tau_{3,1}; \bar{C}) + \bar{B}(\tau_{3,2}; \bar{C}) + \bar{B}(\tau_{3,3}; \bar{C}) + \bar{B}(\tau_{3,4}; \bar{C}) \\
&= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 \bar{B}(\tau_{i,j}; \bar{C}).
\end{aligned}$$