

位相入門演習 No.4問題

2013/1/9

1. (問 13.4) 距離空間 (X, d) の部分集合 A について

$$A \text{ が開集合} \Leftrightarrow A^c \text{ が閉集合}$$

を示せ。

2. (問 13.5) 距離空間 (X, d) の開集合全体を $\mathcal{O}$ で表す。次を示せ。

(a) $\emptyset, X \in \mathcal{O}$

(b) $O_1, \dots, O_n \in \mathcal{O} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n O_i \in \mathcal{O}$

(c) $\{O_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} \subset \mathcal{O} \Rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}$

3. (問 13.6) 距離空間 (X, d) の開集合全体を $\mathcal{U}$ で表す。次を示せ。

(a) $\emptyset, X \in \mathcal{U}$

(b) $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{U} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{U}$

(c) $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset \mathcal{U} \Rightarrow \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \mathcal{U}$

4. (問 13.7) A を距離空間 (X, d) の部分集合とする。次を示せ。

(a) O : (X, d) の開集合。 $O \subset A \Rightarrow O \subset A^i$

(b) F : (X, d) の閉集合。 $A \subset F \Rightarrow \overline{A} \subset F$

5. p を素数とする。 $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ に対し $n = ap^r$, $(a, p) = 1$ として

$$\phi_p(n) = \begin{cases} 2^{-r} & n \neq 0 \\ 0 & n = 0 \end{cases}$$

とおく。 $\ell, m \in \mathbb{Z}$ に対し

$$\rho_p(\ell, m) := \phi_p(l - m)$$

とおく。

(a) $\rho_p(\ell, n) \leq \max(\rho_p(\ell, m), \rho_p(m, n))$, $\ell, m, n \in \mathbb{Z}$ を示せ。

(b) $(\mathbb{Z}, \rho_p)$ は距離空間であることを示せ。