位相入門演習 No.6問題 extra

2013/1/25

1. (a) $(\mathbb{R}^n, d^{(n)})$ の部分集合 A を $A = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1\}$ で定める。
   $x \in \mathbb{R}^n$ に対して、 $d(x, A)$ を求めよ。
   $x \in A$ のとき、 $x \notin A$ のときで異なる表式をもつことに注意。
   (b) $\forall a \in A$ に対して、 $d(x, A) < d(x, a)$ が成り立つような (X, d) と A の例を挙げよ。

2. (問 13.8) (X, d) を距離空間、 $A, B \subset X$ とする。次を示せ。
   (a) $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$ を示せ。
   (b) $(A \cup B)^i = A^i \cup B^i$ を示せ。
   (c) $(A \cup B)^d = A^d \cup B^d$ を示せ。

3. (X, d) を距離空間とする。
   (a) (問 13.9) $d'(x, y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ もまた X 上の距離関数であることを示し、
   $$(X, d) \text{ の開集合系 } \mathcal{O}_d \quad = \quad (X, d') \text{ の開集合系 } \mathcal{O}_{d'}$$
   を示せ。
   (b) $\rho(x, y) = \min(1, d(x, y))$ もまた X 上の距離関数であることを示し、
   $$(X, d) \text{ の開集合系 } \mathcal{O}_d \quad = \quad (X, \rho) \text{ の開集合系 } \mathcal{O}_\rho$$
   を示せ。

4. $C[0, 1]$ を $[0, 1]$ 上の連続関数の全体とする。２つの距離関数
   $$d_\infty(f, g) = \sup_{0 \le t \le 1} |f(t) - g(t)|$$
   $$d_2(f, g) = \left(\int_0^1 (f(t) - g(t))^2 dt \right)^{1/2}$$
   に対し $(C[0, 1], d_\infty)$ の開集合系と $(C[0, 1], d_2)$ の開集合系は一致するか？