

位相入門演習 No.6問題

2013/1/25

1. (問 14.1) (X, d) を距離空間、 $(\emptyset \neq) A \subset X$ とする。 $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x) = d(x, A) \quad x \in X$$

で定義すると、 f は (X, d) から $(\mathbb{R}, d^{(1)})$ への連続写像であることを示せ。

2. (問 14.4) 距離空間 (X, d) の交わらない閉集合 A, B に対し、 $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$g(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)} \quad x \in X$$

で定義する。次を示せ。

(a) g は (X, d) から $(\mathbb{R}, d^{(1)})$ への連続写像である。

(b) 任意の $x \in X$ に対して

$$\begin{aligned} 0 &\leq g(x) \leq 1 \\ x \in A &\Rightarrow g(x) = 0 \\ x \in B &\Rightarrow g(x) = 1 \end{aligned}$$

3. (問 13.6) 距離空間 (X, d) の開集合全体を \mathcal{U} で表す。次を示せ。

(a) $\emptyset, X \in \mathcal{U}$

(b) $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{U} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{U}$

(c) $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset \mathcal{U} \Rightarrow \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \mathcal{U}$

4. 距離空間 $(X, d_X), (Y, d_Y)$ の間の写像 $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ にたいし、次は同値であることを示せ。

(a) f は連続。

(b) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を X の点列、 $x_\infty \in X$ に対し、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_X(x_n, x_\infty) = 0 \text{ なら } \lim_{n \rightarrow \infty} d_Y(f(x_n), f(x_\infty)) = 0$$