

位相入門演習 No.7問題

2013/2/1

1. (問 14.2) 距離空間 (X, d) の閉集合 $A, B (\neq \emptyset)$ が $A \cap B = \emptyset$ をみたすとする。開集合 U, V が

$$A \subset U, \quad B \subset V, \quad U \cap V = \emptyset$$

をみたすように取れることを示せ。

2. (問 14.3) (X, d) を距離空間、 $A, B \subset X$ とする。

$$d(A, B) = \inf\{d(a, b) \mid a \in A, b \in B\} \quad \text{とする。}$$

(a) $A \cap B \neq \emptyset$ なら $d(A, B) = 0$ を示せ。

(b) $A \cap B = \emptyset$ 。 A, B が (X, d) の閉集合とする。このとき、 $d(A, B) = 0$ は常に成り立つか？

3. $(X, d_X), (Y, d_Y)$ を距離空間。写像 $f: X \rightarrow Y$ は次を満たすとする。

$$\exists L > 0 \text{ s.t. } d_Y(f(x), f(y)) \leq L d_X(x, y) \quad \forall x, y \in X \quad (*)$$

(a) f は連続であることを示せ。

(b) 連続だが (*) をみたさないような f の例を挙げよ。

4. $f: (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y), g: (Y, d_Y) \rightarrow (Z, d_Z)$ を距離空間の間の連続写像とする。このとき $g \circ f: (X, d_X) \rightarrow (Z, d_Z)$ が連続であることを示せ。