位相入門演習 No.8問題

2013/2/8

1. (X, d) を距離空間とする。 X の部分集合族 $\mathcal{O}_d$ を

$$O \in \mathcal{O}_d \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in O, \exists \epsilon > 0 \text{ s.t. } N(x; \epsilon) \subset O$$

で定める。 $\mathcal{O}_d$ は X 上の位相であることをしめせ。

2. (X, d) を距離空間、 $A \subset X$ とする。 A 上の距離を

$$d_A(x, y) = d(x, y), \quad x, y \in A$$

で定める。 このとき $\mathcal{O}_A = \mathcal{O}_{d_A}$ を示せ。 但し $\mathcal{O}_A$ は例 15.4 で定義された A 上の位相である。

3. (問 15.1) $X = \{1, 2, 3\}$ 上の位相を全て求めよ。

4. (問 15.2) 離散位相は常に距離可能であることを示せ。

5. (問 15.2) X を 2 点以上を含む集合、 $\mathcal{O}$ を X 上の密着位相とする。 X 上の<u>どんな</u>距離 d に対しても $\mathcal{O} \neq \mathcal{O}_d$ であることを示せ。

6. (問 15.3) $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする。 $\mathcal{U}$ を X の閉集合全体のなす集合族とする。 $\mathcal{U}$ は次を満たすことを示せ。

   (a) $X, \emptyset \in \mathcal{U}$

   (b) $F_1, \ldots, F_k \in \mathcal{U} \quad \Rightarrow \quad \displaystyle\bigcup_{j=1}^{k} F_j \in \mathcal{U}$

   (c) $\{F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} \subset \mathcal{U} \quad \Rightarrow \quad \displaystyle\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \in \mathcal{U}$