代数演習 No.6問題

2014-5-21

1. $E_\lambda(k) = \mathrm{Ker}(T - \lambda \cdot E_n)^k$ とする。ただし、$\lambda \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $T \in M_n(\mathbb{C})$ とする。 次の行列 T に対して、全ての $\dim_{\mathbb{C}} E_\lambda(k)$ を求めよ。

   (a) $T = J_2(-3) \oplus J_2(-3) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

   (b) $T = J_2(-3) \oplus J_1(-3) \oplus J_1(-3) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

   (c) $T = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

2. 次の行列 T の最小多項式を求めよ。

   (a) $T = J_2(-3) \oplus J_2(-3) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

   (b) $T = J_2(-3) \oplus J_1(-3) \oplus J_1(-3) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

   (c) $T = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$ を満たす可逆行列 P が存在することを示せ。

4. $\begin{pmatrix} -2 & 5 & -6 \\ 1 & 2 & -6 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ のジョルダン標準形を求めよ。