代数演習 No.7問題

2014-5-28

1. 次の (a)-(e) に対し、A のジョルダン標準形を求めよ。但し、 $A \in M_n(\mathbb{C})$ とする。
   - (a) 固有多項式 $\Phi_A(x) = (x-3)^2(x-4)^2$, 最小多項式 $m_A(x) = (x-3)^2(x-4)$.
   - (b) $\Phi_A(x) = (x-3)^3$, $m_A(x) = (x-3)^2$.
   - (c) $\Phi_A(x) = (x-3)^3$, $m_A(x) = (x-3)^3$.
   - (d) $\Phi_A(x) = (x-3)^4$, $m_A(x) = (x-3)^2$, $E_3(1) = \dim \mathrm{Ker}(A - 3E_4) = 3$.
   - (e) $\Phi_A(x) = (x-3)^4$, $m_A(x) = (x-3)^2$, $E_3(1) = 2$.
2. $\mathbb{Q}$ は有限生成アーベル群でないことを示せ。
3. $\mathbb{Z}[1/2] = \{\frac{a}{2^b} \in \mathbb{Q} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ は有限生成アーベル群でないことを示せ。
4. $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とする。$\mu_n(\mathbb{C}) = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\} \subset \mathbb{C}^\times$ は有限生成アーベル群であることを示せ。
5. $\mu_\infty(\mathbb{C}) = \bigcup_{n\geq 1} \mu_n(\mathbb{C})$ は有限生成アーベル群でないことを示せ。