数学系談話会（２００５年１１月１７日（木）１５：３０－１７：００）
斎藤秀司 氏（東京大学）
Homology theory of Kato type and motivic cohomology of arithmetic schemes

アブストラクト：本講演の主役は数論的多様体のモチフィックコホモロジーである。代数多様体あるいはもっと一般に Dedekind 環上の有限型分離的スキーム X にたいし、Chow 群 $CH^r(X)$ (余次元 r の代数的サイクルの全体を有理同値で割った群) の自然な一般化である Bloch の高次 Chow 群 $CH^r(X,n)$ が定義される。$CH^r(X,0)=CH^r(X)$ である。モチフィックコホモロジーは、$H^q_M(X,\mathbb{Z}(r))=CH^r(X,2r-q)$ と定義される。Voevodsky によるコホモロジー論的な定義や Morel-Voevodsky によるホモトピー論的な定義もある (もともと Grothendieck が "普遍的なコホモロジー理論" としてその存在を予見していた)。現在これについて世界的に活発な研究が行われている。その理由のひとつは、数論的多様体のゼータ関数の特殊値に関するいくつかの重要な予想 (Tate 予想、Birch-Swinnerton-Dyer 予想、Lichtenbaum 予想、Beilinson 予想、Bloch-加藤予想) において中心的役割を果たすことにある。例えば代数体 K の類数公式は、K の Dedekind ゼータ関数 $\zeta_K(s)$ の $s=1$ で留数を K の類数とレギュレーターを用いて表すものであるが、$X=\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$ ($\mathcal{O}_K$ は K の整数環) とすれば、類数とは $CH^1(X)$ の位数で、レギュレータの定義に現れる $\mathcal{O}_K$ の単数群は $CH^1(X,1)$ と表すことができる。

本講演で考える問題は、整数環上の有限型スキームのモチフィックコホモロジーの有限性 (つまりこれらが有限生成アーベル群である) の予想である。上述の例においては、代数体のイデアル類群が有限で、単数群が有限生成であるという古典的な定理に相当する。有限性予想はゼータ関数の特殊値の予想の大きな部分を占める重要な未解決問題で、1 次元の場合 (代数体の整数環あるいは有限体上の曲線) を除いて殆ど結果が知られていなかった。この講演の目標は、最近の Jannsen 氏との共同研究において発見されたこの問題に対する一般的なアプローチを解説することである。基本的なアイデアは上述の予想を加藤予想と関係付けることである。加藤予想とは、上述の問題とはまったく別のコンテクストにおいて加藤和也氏により 1986 年に提出された予想である。加藤氏は、有限体上の射影的で滑らかな多様体 X、あるいは (その数論的類似として) 整数環上の regular proper flat なスキーム X にたいし、ある数論幾何的な不変量 $KH_q(X)$ ($q\geq 0$) を定義して、これが $q=0$ 以外では消えていることを予想した。X が有限体上の曲線あるいは (その数論的類似として) 代数体の整数環のスペクトラムの場合の加藤予想は、有限体上の一変数関数体あるいは代数体 K のブラウアー群に関する古典的類体論の基本事実 (K 上の中心的単純環にたいする Hasse 原理を含む) に同値である。加藤予想に迫る基本的アイデアは、加藤予想を「数論的スキームのエタールホモロジーにたいし、Bloch-Ogus の理論により構成されるあるスペクトラル系列の E^2 項にたいする消滅定理」と再解釈することである。このアイデアを発展させ、加藤予想を「適当なスキームの圏上で定義される一般的なホモロジー理論に付随する Bloch-Ogus スペクトラル系列の E^2 項の適当な条件のもとでの消滅定理」という一般的枠組みにおいて考察し、加藤予想の解決を導く。表題の "Homology theory of Kato type" とはこの適当な条件をみたす一般的なホモロジー理論のことを意味している。

講演では、Chow 群やモチフィックコホモロジーの定義から始め専門外の方にもある程度は理解できるように説明するつもりである。