

球面間の固有関数写像の構成

上野慶介 (山形大学)

以下, 単位球面 S^m には標準的なリーマン計量が入っているものとする.
球面から球面への調和写像については次の結果が基本的である.

定理. (Takahashi) $\varphi: S^m \rightarrow S^n$ と包含写像 $i: S^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ に対して $\Phi = i \circ \varphi: S^m \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ とおく. このとき

$$\varphi: S^m \rightarrow S^n \text{ が調和写像} \iff \Delta_{S^m} \Phi = 2e(\varphi)\Phi, \|\Phi(x)\| = 1 \quad (x \in S^m).$$

特に, $\varphi: S^m \rightarrow S^n$ のエネルギー密度関数 $e(\varphi)$ が定数のとき, Φ の各成分は Δ_{S^m} の固有関数になる.

定義. 写像 $\varphi: S^m \rightarrow S^n$ が固有関数写像であるとは, φ は調和写像であり, かつ, エネルギー密度関数 $e(\varphi)$ が定数になるときをいう.

Δ_{S^m} の固有値は $\lambda_k = k(m+k-1)$ ($k \in \mathbf{N}$) であたえられ, λ_k に属する固有関数は $\mathbf{R}^{m+1}$ 上の k 次の調和斉次多項式の S^m への制限であたえられる. したがって

$$\begin{aligned} & \text{固有関数写像 } \varphi: S^m \rightarrow S^n \text{ の構成} \\ & \iff \sum_{i=1}^{n+1} \Phi_i(x)^2 = \|x\|^{2k} \text{ となる } k \text{ 次の調和斉次多項式 } \{\Phi_i\}_{i=1}^{n+1} \text{ の組を見つける} \end{aligned}$$

なる対応がある. またこのとき, 調和斉次多項式の次数を固有関数写像の次数という.

定義. $\varphi: S^m \rightarrow S^n$ が full であるとは, $\text{Im} \varphi$ がどんな $(n-1)$ 次元球面 S^{n-1} にも含まれないことである.

いま $\mathcal{H}(m+1, k) = \{\mathbf{R}^{m+1} \text{ 上の } k \text{ 次の調和斉次多項式}\}$ とおくと,

$$\varphi: S^m \rightarrow S^n \text{ が full} \implies n \leq \dim \mathcal{H}(m+1, k) - 1$$

$$\text{とくに } \dim \mathcal{H}(m+1, 2) = \frac{1}{2}m(m+3)$$

以下, 次数 2 の固有関数写像の構成法について述べる. 固有関数写像の構成について知られている結果のほとんどは, 次数が 2 の場合であるが, その理由の 1 つが次に定義する orthogonal multiplication の存在である.

定義 . $F : \mathbf{R}^{p+1} \times \mathbf{R}^{q+1} \rightarrow \mathbf{R}^r$ が orthogonal multiplication であるとは , F は bilinear map であって

$$\|F(x, y)\| = \|x\|\|y\| \quad (x \in \mathbf{R}^{p+1}, y \in \mathbf{R}^{q+1})$$

が成り立つこと .

とくに $p = q$ で orthogonal multiplication $F : \mathbf{R}^{p+1} \times \mathbf{R}^{p+1} \rightarrow \mathbf{R}^r$ が存在するならば ,

$$\varphi_F(x, y) = (\|x\|^2 - \|y\|^2, 2F(x, y))$$

により次数 2 の固有関数写像 $\varphi_F : S^{2p+1} \rightarrow S^r$ が定義される . これを Hopf construction とよぶ .

例 . (1) $\mathbf{R}^2 = \mathbf{C}$ とみて , $F : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ を $F(x, y) = xy$ ($x, y \in \mathbf{C}$) で定義する . このとき $\varphi_F : S^3 \rightarrow S^2$ は Hopf fiber になる .

(2) $\mathbf{R}^4 = \mathbf{H}$ とみて , $F : \mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^4$ を $F(x, y) = xy$ ($x, y \in \mathbf{H}$) で定義する . このとき $\varphi_F : S^7 \rightarrow S^4$.

次に full orthogonal multiplication $F : \mathbf{R}^{p+1} \times \mathbf{R}^{q+1} \rightarrow \mathbf{R}^r$ が存在するための必要条件を述べる . $p \leq q$ とする .

$x = (x_1, \dots, x_{p+1}) \in \mathbf{R}^{p+1}$, $y = (y_1, \dots, y_{q+1}) \in \mathbf{R}^{q+1}$, $a_{ij} \in \mathbf{R}^r$ を用いて

$$F(x, y) = \sum_{i=1}^{p+1} \sum_{j=1}^{q+1} a_{ij} x_i y_j$$

と表すとき , $\|F(x, y)\| = \|x\|\|y\|$ から

$$(*) \quad \begin{cases} \langle a_{ik}, a_{il} \rangle = \delta_{kl}, \\ \langle a_{ik}, a_{jk} \rangle = \delta_{ij}, \\ \langle a_{ik}, a_{jl} \rangle + \langle a_{il}, a_{jk} \rangle = 0 \quad (i \neq j, k \neq l). \end{cases}$$

(*) の上の 2 つの式から , 任意の k_0 ($1 \leq k_0 \leq q+1$), あるいは i_0 ($1 \leq i_0 \leq p+1$) に対して $\{a_{ik_0}\}_{i=1}^{p+1}$ も $\{a_{i_0k}\}_{k=1}^{q+1}$ も $\mathbf{R}^r$ の正規直交基底になる . よって $q+1 \leq r$. $\{a_{ij}\}_{1 \leq i \leq p+1, 1 \leq j \leq q+1}$ の元の個数 ($= (p+1)(q+1)$) が r より小さければ , F の像は $\{a_{ij}\}$ が張る r より次元の低い線型部分空間に含まれてしまう . よって F が full ならば , $r \leq (p+1)(q+1)$.

したがって $p \leq q$ のとき $F : \mathbf{R}^{p+1} \times \mathbf{R}^{q+1} \rightarrow \mathbf{R}^r$ が full orthogonal multiplication ならば $q+1 \leq r \leq (p+1)(q+1)$.

次に Parker([2]) にならって , $F : \mathbf{R}^{p+1} \times \mathbf{R}^{q+1} \rightarrow \mathbf{R}^r$ に対して $(p+1)(q+1) \times (p+1)(q+1)$ 行列 $G(F)$ を

$$G(F) := \begin{bmatrix} I_{q+1} & A_{12} & \cdots & A_{1p+1} \\ A_{21} & I_{q+1} & \cdots & A_{2p+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{p+11} & A_{p+12} & \cdots & I_{q+1} \end{bmatrix}$$

で定義する．ただし， A_{ij} は $(q+1) \times (q+1)$ 行列でその成分は

$$(A_{ij})_{kl} = \langle a_{ik}, a_{jl} \rangle, \quad 1 \leq k, l \leq q+1.$$

であたえられるものとする．(*) の 3 つ目の式から $A_{ji} = -A_{ij}$ が成り立つことに注意． $\det G(F)$ は $\{a_{ij}\}$ から決まるグラムの行列式に一致するので $\text{rank } G(F) = r$.

とくに $p = 1$ のとき次の結果が成り立つ．

補題 1 . full orthogonal multiplication $F : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^{q+1} \rightarrow \mathbf{R}^r$ が存在するための必要十分条件は， r が $q+1 \leq r \leq 2q+2$ を満たす偶数になることである．

証明 . $F : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^{q+1} \rightarrow \mathbf{R}^r$ が (full) orthogonal multiplication ならば r が偶数であること．

$A = A_{21}$ とすれば

$$G(F) = \begin{bmatrix} I_{q+1} & -A \\ A & I_{q+1} \end{bmatrix}.$$

$v (\neq 0) \in \mathbf{R}^{2q+2}$ が $\ker G(F)$ の元であると仮定する．縦ベクトル $v_1, v_2 \in \mathbf{R}^{q+1}$ を用いて $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ と表せば

$$v \in \ker G(F) \iff \begin{cases} v_1 = Av_2, \\ Av_1 = -v_2. \end{cases}$$

よって $\tilde{v} = \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}$ とおけば $\tilde{v} \in \ker G(F)$ であり， $v \neq 0$ ならば v と $\tilde{v}$ は 1 次独立である．したがって $\ker G(F)$ は偶数次元になる．よって次元定理から $r = \text{rank } G(F)$ は偶数次元である．

r が偶数ならば (full) orthogonal multiplication $F : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^{q+1} \rightarrow \mathbf{R}^r$ が存在すること．orthogonal multiplication $F_1 : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2, F_2 : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^4$ を

$$\begin{cases} F_1(x, y) = (x_1y_1 + x_2y_2, x_1y_2 - x_2y_1), \\ F_2(x, y) = (x_1y_1, x_1y_2, x_2y_1, x_2y_2) \end{cases}$$

で定義する．ただし， $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$. F_1, F_2 は full で

$$\|F_1(x, y)\| = \|F_2(x, y)\| = \|x\|\|y\|.$$

を満たす．これらを利用して次のように orthogonal multiplication を構成する．

$q+1 = 2k$ のとき .

$\mathbf{R}^{q+1} = \mathbf{R}^2 \oplus \cdots \oplus \mathbf{R}^2$ と k 個に分解して i ($0 \leq i \leq k$) に対して

$$F = \overbrace{F_1 \oplus \cdots \oplus F_1}^{i \text{ 個}} \oplus \overbrace{F_2 \oplus \cdots \oplus F_2}^{(k-i) \text{ 個}}$$

とすれば orthogonal multiplication $F : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^{q+1} \rightarrow \mathbf{R}^{2(q+1-i)}$ が得られる . したがって $q+1 \leq r \leq 2q+2$ を満たす偶数 r に対して orthogonal multiplication $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^{2k} \rightarrow \mathbf{R}^r$ が存在する .

$q+1 = 2k+1$ のとき .

$\mathbf{R}^{q+1} = \mathbf{R}^{2k} \oplus \mathbf{R}$ と分解して $F : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^{2k} \rightarrow \mathbf{R}^r$ を用いて $\tilde{F} : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^{2k+1} \rightarrow \mathbf{R}^{r+2}$ を

$$\tilde{F}((x_1, x_2), (y_1, \dots, y_{2k}, y_{2k+1})) = (F((x_1, x_2), (y_1, \dots, y_{2k})), (x_1 y_{2k+1}, x_2 y_{2k+1})),$$

で定義すればよい . ただし , $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$, $(y_1, \dots, y_{2k}, y_{2k+1}) \in \mathbf{R}^{2k+1}$. したがって $q+2 \leq r \leq 2q+2$ を満たす偶数 r に対して orthogonal multiplication $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^{2k+1} \rightarrow \mathbf{R}^r$ が存在する . $\square$

補題 2 . 次数 2 の固有関数写像 $f : S^m \rightarrow S^n$ から , 同じ次数の固有関数写像 $\varphi : S^{m+2} \rightarrow S^{n+r+2}$ が構成できる . ただし , r は $m+1 \leq r \leq 2m+2$ を満たす偶数を動く . さらに f が full ならば φ も full である .

証明 . $g : S^1 \rightarrow S^1$ を $g(e^{i\theta}) = e^{2i\theta}$ なる写像とする . この g と $f : S^m \rightarrow S^n$, および補題 1 の orthogonal multiplication $F : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^{m+1} \rightarrow \mathbf{R}^r$ を用いて $\varphi : \mathbf{R}^{m+3} \rightarrow \mathbf{R}^{n+r+3}$ を

$$\varphi(x, y) = (g(x), f(y), \sqrt{2}F(x, y)) \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^{m+1}$$

で定義すると $\|\varphi(x, y)\|^2 = \|(x, y)\|^4$ が成り立つので $\varphi : S^{m+2} \rightarrow S^{n+r+2}$ は次数 2 の固有関数写像をあたえる . $\square$

補題 3 . (Gauchman-Toth [1]) $f : S^m \rightarrow S^n$ を次数 2 の固有関数写像とするとき

$$\varphi(x, y) = \left(\frac{\sqrt{m(m+2)}}{m+1} f(x), \frac{m+2}{m+1} \left(y^2 - \frac{\|x\|^2 + y^2}{m+2} \right), \sqrt{\frac{2(m+2)}{m+1}} yx \right)$$

とおけば , $\varphi : S^{m+1} \rightarrow S^{m+n+2}$ は次数 2 の固有関数写像である . ここに $(x, y) \in \mathbf{R}^{m+1} \times \mathbf{R}$. 特に f が full ならば φ も full である .

証明 . 直接計算で確かめられる . $\square$

命題 . (1) (i) $n = 4$, あるいは $7 \leq n \leq 19$ に対して full な次数 2 の固有関数写像 $\varphi : S^5 \rightarrow S^n$ が存在する .

(ii) $11 \leq n \leq 26$ に対して full な次数 2 の固有関数写像 $\varphi : S^6 \rightarrow S^n$ が存在する .

(2) $k \geq 3$ とする .

(i) $k^2 + 3k - 10 \leq n \leq 2k^2 + 5k + 1$ に対して full な次数 2 の固有関数写像 $\varphi : S^{2k+1} \rightarrow S^n$ が存在する .

(ii) $k^2 + 5k - 7 \leq n \leq 2k^2 + 7k + 4$ に対して full な次数 2 の固有関数写像 $\varphi : S^{2k+2} \rightarrow S^n$ が存在する .

注意 . (1) full な次数 2 の固有関数写像 $\varphi : S^3 \rightarrow S^n$ が存在する必要十分条件は , $n = 2$, あるいは $4 \leq n \leq 8$ となることである .

(2) Gauchman と Toth ([1]) は full な次数 2 の固有関数写像 $\varphi : S^4 \rightarrow S^n$ が $n = 4, 7$ あるいは $9 \leq n \leq 13$ に対して存在することを示した .

固有関数写像は一般にはめ込みとは限らない . 実際 ,

$$\varphi(x, y, u, v) = (x^2 + y^2 - u^2 - v^2, 2xu, 2xv, 2yu, 2yv)$$

を考えれば , $\varphi : S^3 \rightarrow S^4$ は次数 2 の固有関数写像であり , $\varphi(x, y, 0, 0) = (1, 0, 0, 0, 0)$ であるから , $p = (1, 0, 0, 0, 0)$ に対して $\varphi^{-1}(p)$ は S^1 分の自由度をもつ . したがって $v \in T_p S^3$ を $\varphi^{-1}(p)$ に接する方向に選べば , $(d_p \varphi)(v) = 0$ である . したがって φ ははめ込みではない .

最近 Tang によって次のことが示された .

補題 4 . (Tang [3, Lemma3.6]) 次数 2 の固有関数写像 $\varphi : S^m \rightarrow S^n$ ($m \leq n$) がはめ込みであるための必要十分条件は , 任意の点 $p \in S^n$ に対して p の逆像 $\varphi^{-1}(p)$ が空集合か , あるいはちょうど 2 点のみ含むことである .

系 . (Tang [3, Proposition3.7, 3.8]) 補題 2 , 3 において $f : S^m \rightarrow S^n$ ($m \leq n$) がはめ込みであるならば , それぞれの φ もはめ込みである .

これらの結果から次が得られる .

定理 . $k \geq 2$ とする . 次の球面の間に , full な次数 2 の固有関数写像でかつ , はめ込みになるものが存在する .

(i) $\varphi : S^{2k-1} \rightarrow S^n$ ($k^2 + k - 1 \leq n \leq 2k^2 + k - 2$).

(ii) $\varphi : S^{2k} \rightarrow S^n$ ($k^2 + 3k \leq n \leq 2k^2 + 3k - 1$).

注意 . 定理の n の上限は , full な次数 2 の固有関数写像が存在するための最大次元と一致する .

証明．補題 4 から次の 4 つの固有関数写像がはめ込みになることがわかる．

$$f_5 : S^3 \rightarrow S^5 :$$

$$f_5(x, y, u, v) = (x^2 - y^2, u^2 - v^2, 2xy, 2uv, \sqrt{2}(xu + yv), \sqrt{2}(xv - yu)),$$

$$f_6 : S^3 \rightarrow S^6 :$$

$$f_6(x, y, u, v) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x^2 + y^2 - u^2 - v^2), \frac{1}{\sqrt{2}}(x^2 - y^2), \frac{1}{\sqrt{2}}(u^2 - v^2), \right. \\ \left. \sqrt{2}xy, \sqrt{2}uv, \sqrt{3}(xu + yv), \sqrt{3}(xv - yu) \right),$$

$$f_7 : S^3 \rightarrow S^7 :$$

$$f_7(x, y, u, v) = (x^2 - y^2, u^2 - v^2, 2xy, 2uv, \sqrt{2}xu, \sqrt{2}xv, \sqrt{2}yu, \sqrt{2}yv),$$

$$f_8 : S^3 \rightarrow S^8 :$$

$$f_8(x, y, u, v) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}(x^2 - y^2), \frac{1}{\sqrt{3}}(x^2 - u^2), \frac{1}{\sqrt{3}}(x^2 - v^2), \right. \\ \frac{1}{\sqrt{3}}(y^2 - u^2), \frac{1}{\sqrt{3}}(y^2 - v^2), \frac{1}{\sqrt{3}}(u^2 - v^2), \\ \left. \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}xy, \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}xu, \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}xv, \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}yu, \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}yv, \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}uv \right).$$

したがって補題 3 から $10 \leq n \leq 13$ に対して, full な次数 2 の固有関数写像 $\varphi : S^4 \rightarrow S^n$ が得られるが, 系からこれらはすべてはめ込みである．

以下, 帰納法を使う．

full な次数 2 の固有関数写像ではめ込みになるものが, それぞれ次の次元のペアに対して存在すると仮定する．

$$\begin{cases} S^{2k-1} \rightarrow S^n, & \alpha_{2k-1} \leq n \leq \beta_{2k-1}, \\ S^{2k} \rightarrow S^n, & \alpha_{2k} \leq n \leq \beta_{2k}. \end{cases}$$

$k = 2$ のときは上に述べたことから, $\alpha_3 = 5, \beta_3 = 8, \alpha_4 = 10, \beta_4 = 13$.

1 つ目の仮定に補題 3 を 2 度適用することによって, $\alpha_{2k-1} + 4k + 3 \leq n \leq \beta_{2k-1} + 4k + 3$ なる n に対して full な次数 2 の固有関数写像 $\varphi : S^{2k+1} \rightarrow S^n$ ではめ込みになるものが存在することがわかる．一方, 1 つ目の仮定に補題 2 を適用して $\alpha_{2k-1} + 2k + 2 \leq n \leq \beta_{2k-1} + 4k + 2$ なる n に対して full な次数 2 の固有関数写像 $\varphi : S^{2k+1} \rightarrow S^n$ ではめ込みになるものが存在することがわかる．結局, $\alpha_{2k-1} + 2k + 2 \leq n \leq \beta_{2k-1} + 4k + 3$ なる n に対して full な次数 2 の固有関数写像 $\varphi : S^{2k+1} \rightarrow S^n$ ではめ込みになるものが存在する．したがって

$$\begin{cases} \alpha_{2k+1} = \alpha_{2k-1} + 2k + 2, \\ \beta_{2k+1} = \beta_{2k-1} + 4k + 3 \end{cases}$$

が得られる．ところで $\alpha_3 = 5$, $\beta_3 = 8$ であるからこれを解いて

$$\alpha_{2k-1} = k^2 + k - 1, \beta_{2k-1} = 2k^2 + k - 2.$$

同様にして，2つ目の仮定に補題3を2度適用することによって， $\alpha_{2k} + 4k + 5 \leq n \leq \beta_{2k} + 4k + 5$ なる n に対して full な次数2の固有関数写像 $\varphi: S^{2k+2} \rightarrow S^n$ ではめ込みになるものが存在することがわかる．一方，2つ目の仮定に補題2を適用して $\alpha_{2k} + 2k + 4 \leq n \leq \beta_{2k} + 4k + 4$ なる n に対して full な次数2の固有関数写像 $\varphi: S^{2k+2} \rightarrow S^n$ ではめ込みになるものが存在することがわかる．結局， $\alpha_{2k} + 2k + 4 \leq n \leq \beta_{2k} + 4k + 5$ なる n に対して full な次数2の固有関数写像 $\varphi: S^{2k+2} \rightarrow S^n$ ではめ込みになるものが存在する．したがって

$$\begin{cases} \alpha_{2k+2} = \alpha_{2k} + 2k + 4, \\ \beta_{2k+2} = \beta_{2k} + 4k + 5 \end{cases}$$

が得られる．ところで $\alpha_3 = 10$, $\beta_3 = 13$ であるからこれを解いて

$$\alpha_{2k} = k^2 + 3k, \beta_{2k} = 2k^2 + 3k - 1. \quad \square$$

注意．Tang([3]) も次数2の固有関数写像でかつ，はめ込みになるものの存在を証明している．

参考文献

- [1] H. Gauchman and G. Toth, *Constructions of harmonic polynomial maps between spheres*, Geom. Dedicata **50** (1994), 57–79.
- [2] M. Parker, *Orthogonal multiplications in small dimensions*, Bull. London Math. Soc. **15** (1983), 368–372.
- [3] Z. Z. Tang, *New constructions of eigenmaps between spheres*, Internat. J. Math. **12** (2001), 277–288.
- [4] K. Ueno, *Some new examples of eigenmaps from S^m into S^n* , Proc. Japan Acad. **69** (1993), 205–208.
- [5] P. Y. H. Yiu, *Quadratic forms between spheres and the non-existence of sums of squares formulae*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **100** (1986), 493–504.