

結晶格子のランダム・ウォークの大偏差と空間の収束

小谷元子

この講演では、結晶格子上のランダム・ウォークの大偏差 (LDP) に現われる凸多面体と結晶格子のスケールを小さくしていったグロモフ・ハウスドルフ収束の極限の係わりについて報告したい。

まず、最初に簡単な例をみてみよう。正方格子 $\mathbb{Z}^2$ にグラフ距離を与え、これを距離空間と思う。正数 $\epsilon > 0$ により、これをスケール変換したものを $(\mathbb{Z}^2, \epsilon d)$ と書く。 ϵ をゼロに近づけたときの極限は、容易に予測できるように、2次元ベクトル空間にマンハッタン距離を入れた距離空間となる、より一般に周期性のある無限グラフで同様のことを考えるとどうなるかを考えたい。ここでは、結晶格子 X 、すなわち有限グラフ X_0 のアーベル被覆グラフを考えよう。

このような場合に有限次元ベクトル空間に基点付きグロモフ・ハウスドルフ収束することは、グロモフによって分かっている。

Theorem (Gromov[2] の特別な場合). (X, d) を結晶格子とグラフ距離を与えた距離空間とする。このとき、ある有限次元ベクトル空間 $(L, \|\cdot\|)$ が存在し

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} (X, \epsilon d) = (L, d_1)$$

となる。ここで $d_1(x, y) = \|x - y\|$ である。

この極限に現われる距離は結晶格子の LDP と深い関係にある。その結果、 d_1 に関する距離球がどのようなものであるかを詳しく調べることができる。特に次のことが分かる

Theorem. d_1 に関する単位球体 $\overline{\mathcal{D}} = \{x \in L \mid \|x\| \leq 1\}$ は凸多面体である。従って d_1 は非ユークリッド距離である。

さらに、この多面体は下の有限グラフ X_0 の幾何、特に X_0 の閉路の様子を反映している。

X_0 を連結有限グラフとし、 E_0 を X_0 の有向辺の集合とする。 $c = (e_1, e_2, \dots)$ を X_0 の無限路とする。各辺を 1 チェイン群 $C_1(X_0, \mathbb{R})$ の元と考え、以下の極限

$$\gamma(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (e_1 + \dots + e_n)$$

が存在するとき、 $\gamma(c)$ の 1 サイクルであり、従って $H_1(X_0, \mathbb{R})$ の元を定める。 $\gamma(c)$ を c のホモロジー的方向という。ホモロジー的方向の取

¹この講演は砂田利一氏 (東北大学) との共同研究に基づく。

りうる値を調べるために $H_1(X_0, \mathbb{R})$ 上の ℓ^1 ノルムを

$$\left\| \sum_{e \in E_0^+} a_e e \right\|_1 = \sum_{e \in E_0^+} |a_e|$$

で定める．但しここで E_0^+ は X_0 の向きを与える有向辺の集合である．

Theorem 1. ホモロジー的方向の取りうる値は

$$\mathcal{D}_0 = \{\alpha \in H_1(X_0, \mathbb{R}) \mid \|\alpha\|_1 \leq 1\}$$

で与えられる．

$\mathcal{D}_0$ は $H_1(X_0, \mathbb{R})$ の原点について対称な凸多面体であることを注意する．

$\mathcal{D}_0$ の形は有限グラフ X_0 の組み合わせ的な性質を反映している．

Theorem 2. 1. $\mathcal{D}_0$ は有理多面体，すなわち $\mathcal{D}_0$ のすべての頂点は $H_1(X_0, \mathbb{Q})$ の元である．

2. $\mathcal{D}_0$ の頂点 α は X_0 の単純閉路 c と一対一に対応する．実際 $\alpha = c/\|c\|_1$ で与えられる．

3. $\mathcal{D}_0$ の面は X_0 の部分有向グラフに対応するが，面 F_1 が面 F_2 に含まれるための必要十分条件は， F_1 に F_2 と整合する向きが入っていることである．特に最大次元の面は X_0 の強連結有向グラフと対応する．

次に結晶格子 X を考える．定義より， X には自由アーベル群 Γ がグラフの自己同型群として作用し，商 $X_0 = \Gamma \backslash X$ が有限グラフとなる．

X から $\Gamma \otimes \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^d$ ($d = \text{rank } \Gamma$) への区分的線形写像 Φ が

$$\Phi(\sigma x) = \Phi(x) + \sigma, \quad \sigma \in \Gamma$$

を満たすとき， Φ を X の周期的実現という．基点 $x_0 \in X$ を固定し， $\Phi(x_0) = 0$ としておく．

X 上に Γ 不変推移確率 p (但し各边上 $p > 0$) を与え， X 上の無限路 c に対して $\xi_n(c) = \Phi(x_n(c))$ とおく．ランダム・ウォークの n ステップ目の位置を Φ を通して $\Gamma \otimes \mathbb{R}$ の点として表したものである．このとき $\{\xi_n\}$ に対して，以下の大偏差原理が成立する．

Theorem 3. $I : \Gamma \otimes \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$ が存在して $A \subset \Gamma \otimes \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} -I(\text{int } A) &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P_x\left(\frac{1}{n} \xi_n \in \text{int } A\right) \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P_x\left(\frac{1}{n} \xi_n \in \overline{A}\right) \leq -I(\overline{A}) \end{aligned}$$

が成立する．ここで $K \subset \Gamma \otimes \mathbb{R}$ に対して $I(K) = \inf\{I(\mathbf{z}) \mid \mathbf{z} \in K\}$ である．

I をエントロピー関数と呼ぶ。 I は以下のように構成する。

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : (\Gamma \otimes \mathbb{R}) \times \text{Hom}(\Gamma, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

を $\Gamma \otimes \mathbb{R}$ と双対空間 $(\Gamma \otimes \mathbb{R})^* = \text{Hom}(\Gamma, \mathbb{R})$ の対とし, $\rho : H_1(X_0, \mathbb{Z}) \rightarrow \Gamma$ を被覆写像 $X \rightarrow X_0$ から定まる上への準同型とする。

Lemma 4. 1. $\chi \in \text{Hom}(\Gamma, \mathbb{R})$ に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log E(e^{\langle \xi_n, \chi \rangle}) = \beta(\chi)$$

が存在する。実際 $e^{\beta(\chi)}$ は χ によって振じった推移作用素の最大正固有値である。

2. β は $\text{Hom}(\Gamma, \mathbb{R})$ 上の実解析的狭義凸関数である。特に $\chi \mapsto (\nabla \beta)(\chi)$ は $\text{Hom}(\Gamma, \mathbb{R})$ から $\Gamma \otimes \mathbb{R}$ のある開部分集合 $\mathcal{D}$ への微分同相となる。

大偏差の一般論 (c.f.[1]) よりエントロピー関数 $I : \Gamma \otimes \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$ を β のルジャンドル変換

$$I(\mathbf{z}) = \sup_{\chi} (\langle \mathbf{z}, \chi \rangle - \beta(\chi))$$

で定義すると大偏差原理が成立することが分かる。ここで $\overline{\mathcal{D}}$ は I が有限の値をとる範囲と一致することに注意する。

更に次が成立する。

Proposition 5. $\overline{\mathcal{D}} = \rho_{\mathbb{R}}(\mathcal{D}_0)$ である。従って

$$\overline{\mathcal{D}} = \{\mathbf{x} \in \Gamma \otimes \mathbb{R} \mid \|\mathbf{x}\|_1 \leq 1\}$$

であり, 特に $\overline{\mathcal{D}}$ は推移確率 p によらない。ここで

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \inf\{\|\alpha\|_1 \mid \alpha \in H_1(X_0, \mathbb{R}), \rho_{\mathbb{R}}(\alpha) = \mathbf{x}\}.$$

従って $\overline{\mathcal{D}}$ は原点に関して対称な有理的 (すなわちすべての頂点が $\Gamma \otimes \mathbb{Q}$ に属する) コンパクト凸多面体である。

最初に述べた定理に戻ると, 上に述べた結果を応用することで, 次を得る。

Theorem 6.

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} (X, \epsilon d) = (\Gamma \otimes \mathbb{R}, d_1)$$

$$d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_1$$

REFERENCES

- [1] R. S. Ellis, *Large deviations for a general class of random vectors*, Ann. Prob. **12**(1984), 1-12.
- [2] M. Gromov, *Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces*, Birkhäuser, 1999.

E-mail address: kotani@math.tohoku.ac.jp

MATHEMATICAL INSTITUTE, GRADUATE SCHOOL OF SCIENCES, TOHOKU UNIVERSITY, AOBA, SENDAI 980-77, JAPAN