距離空間の収束と（非線型）変分収束

塩谷 隆　　東北大学大学院理学研究科

変分収束理論とは一般にエネルギー汎関数の列の収束に関する一連の理論を指す．ここでは測度距離空間 X, 距離空間 Y に対して L^2 写像 $u : X \to Y$ のエネルギー $E_{(X,Y)}(u)$ を考える．本講演の目標は，測度距離空間の列 X_i が X へある自然な位相で収束し，Y が $\mathrm{CAT}(0)$ のとき，エネルギー汎関数 $E_{(X_i,Y)}$ の $E_{(X,Y)}$ への収束性のついての桑江氏との共同研究の結果 [8] を紹介することである．この応用として，曲率 ≥ -1 の n 次元アレキサンドロフ空間の列 X_i が n 次元のアレキサンドロフ空間 X へ Gromov-Hausdorff 収束するとき，$\mathrm{CAT}(0)$ 空間 Y へのエネルギー汎関数 $E_{(X_i,Y)}$ が $E_{(X,Y)}$ へ収束することが従う．ここに述べる結果はこまかい証明などにまだ未完成の部分があり，定理の主張は変更の可能性があることをお断りしておく．

関連した事柄として，従来の（線形）変分収束理論については [1, 9] を参照のこと．測度距離空間の収束 $X_i \to X$ の下での線形変分収束理論（つまり $Y = \mathbb{R}$ の場合）については [4] でその formulation が確立された（[5] はその概説である）．固定された空間 $X_i = X$ 上の非線型変分収束については，Jost [2] や，また最近 桑江氏によって研究されている．測度距離空間上のエネルギー汎関数の定義についての最初のアイディアは Jost による．さらに $Y = \mathbb{R}$ のとき Sturm [10] によって，また一般の完備距離空間 Y については [6, 7] でそれぞれ詳しく考察された．本稿での定義は Sturm [10] のアイデアを参考にした．

1. 距離空間の収束

ここでは Gromov-Hausdorff 収束を拡張して，局所コンパクトでない無限次元空間（写像の空間）についても取り扱えるようにする．

X_i, X を点つき距離空間, o_{X_i}, o_X をそれらの基点とする（$i = 1, 2, \dots$ あるいはもっと一般に $\{X_i\}$ を有向系 $\{i\}$ のネットとする）．直和 $(\bigsqcup_i X_i) \sqcup X$ 上の以下の条件 (a1)–(a3) を満たすような位相を $\{X_i, X\}$ の**漸近関係**と呼ぶ．

- (a1) 基点は基点に収束する：$o_{X_i} \to o_X$．
- (a2) 任意の $x \in X$ に対して x へ収束する $x_i \in X_i$ が存在する．
- (a3) $X_i \ni x_i \to x \in X$, $X_i \ni y_i \to y \in X$ ならば $d_{X_i}(x_i, y_i) \to d_X(x, y)$ が成り立つ．

筑波大学微分幾何学研究集会（2002 年 2 月 21–22 日）での講演予稿
2002 年 3 月 4 日改定

このような $(\bigsqcup_i X_i) \sqcup X$ 上の位相は必然的にハウスドルフになる．

写像列 $f_i : X_i \supset \mathcal{D}(f_i) \to X$ について以下の条件を考える：

(b1) 任意の i に対して $o_{X_i} \in \mathcal{D}(f_i)$ かつ $f_i(o_{X_i}) = o_X$.

(b2) 任意の $x \in X$ に対して，ある $x_i \in X_i$ が存在して，$f_i(x_i) \to x$ $(i \to \infty)$ が成り立つ．

(b3) $x, y \in X$, $x_i, y_i \in X_i$ が $f_i(x_i) \to x$, $f_i(y_i) \to y$ $(i \to \infty)$ を満たすとき，$d_{X_i}(x_i, y_i) \to d_X(x, y)$ が成り立つ．

また，写像列 $g_i : X \supset \mathcal{D}(g_i) \to X_i$ について以下の条件を考える：

(c1) 任意の i に対して $o_X \in \mathcal{D}(g_i)$ かつ $g_i(o_X) = o_{X_i}$.

(c2) $\mathcal{D}(g_i)$ は i によらず，かつ X で稠密である．

(c3) 任意の $x, y \in X$ に対して，$d_{X_i}(g_i(x), g_i(y)) \to d_X(x, y)$ が成り立つ．

このとき，以下が簡単に証明できる．

補題 1.1. 次の (1)–(3) は同値である．

(1) $\{X_i, X\}$ は漸近関係を持つ．

(2) (b1)–(b3) を満たすような $\{f_i\}$ が存在する．

(3) (c1)–(c3) を満たすような $\{g_i\}$ が存在する．

以下 $\{X_i, X\}$ が漸近関係を持つと仮定する．(b1)–(b3) かつ「$f_i(x_i) \to x \Longrightarrow x_i \to x$」を満たす写像列 f_i，および (c1)–(c3) かつ「$g_i(x) \to x$, $\forall x \in X$」を満たす写像列 g_i を $\{X_i, X\}$ の漸近関係に付随した**計量近似**と呼ぶ．$\{X_i, X\}$ が**漸近的コンパクト**とは，$x_i \in X_i$ が $d_{X_i}(o_{X_i}, x_i) \ll \infty$ ならば x_i のある部分列が X のある元に収束するときを言う．

注意 1.1. (1) $\{X_i, X\}$ が漸近的コンパクトならば X は有限コンパクト（任意の有界閉集合はコンパクト）．

(2) X_i, X が有限コンパクトとする．このとき，X_i が X へ点つき Gromov-Hausdorff 収束することの必要十分条件は $\{X_i, X\}$ が漸近関係を持ち漸近的コンパクトであることである．

(3) $\{X_i, X\}$ が漸近関係を持つとは，X_i が X へ Gromov-Hausdorff 収束することの拡張であると考えられるが，むしろ $\underline{\lim}_i X_i \supset X$ の方が的確である．実際，$\{X_i, X\}$ が漸近関係を持つならば，任意の $Y \subset X$ に対して $\{X_i, Y\}$ が漸近関係を持つ．漸近関係を持つ $\{X_i, X\}$ が漸近的コンパクトならば，$\lim_i X_i = X$ と言って良い．

(4) ここで定義した漸近関係と ultra-limit との関係は今のところ不明である．

2. （非線型）変分収束理論

この原稿を通して，**測度空間** X とは，Radon 測度 m_X をもつ局所コンパクトなポーランド空間（完備可分距離空間と同相な位相空間）とする．

X を測度空間，Y を点つき完備可分距離空間でその基点を o_Y とする．可測な 2 つの写像 $u, v : X \to Y$ の間の L^2 距離を以下で定義する：

$$d_{L^2}(u,v) := \left(\int_X d_Y(u(x), v(x))^2 dx \right)^{1/2}.$$

ここで dx は X の測度 m_X に関する変数 $x \in X$ での積分 $dx := m_X(dx)$ を表す.（この原稿では，可測写像はほとんど至るところ値の等しいものは全て同一視する.）L^2 空間を

$$L^2(X,Y) := \{ \, u : X \to Y \mid \text{可測かつ } d_{L^2}(u, o_Y) < \infty \, \}$$

と定義すると，これは d_{L^2} に関して完備可分距離空間となる．定値写像 $o_Y : X \ni x \mapsto o_Y$ を $L^2(X,Y)$ の基点と定める．$L^2(X,Y)$ は Y の基点の取り方に従属することに注意．もし Y が 測地空間ならば $L^2(X,Y)$ もそうであり，Y が CAT(0) ならば $L^2(X,Y)$ もそうなる．

連続写像 $u : X \to Y$ のサポートを

$$\operatorname{supp} u := \overline{\{ \, x \in X \mid u(x) \neq o_Y \, \}}.$$

と定義し，X から Y へのサポートがコンパクトな連続写像全体の集合を $C_0(X,Y)$ とおく．$C_0(X,Y)$ は $L^2(X,Y)$ で稠密になる．また，もし Y が CAT(0) ならば $C_0(X,Y)$ は Y の凸部分集合になる．

X_i, X を測度空間とする．写像 $f_i : X_i \supset \mathcal{D}(f_i) \to X$ が**測度近似**であるとは，$\mathcal{D}(f_i)$ が可測集合であり

$$\int_{\mathcal{D}(f_i)} u \circ f_i \, dm_{X_i} \to \int_X u \, dm_X, \quad \forall u \in C_0(X, \mathbb{R}),$$

が成り立つことと定義する．ここで $\mathbb{R}$ の基点は原点 0 であるとする．

注意 2.1. 普通は測度計量近似（測度近似かつ計量近似）を念頭に置いている．測度計量近似を持つ漸近関係は深谷氏の「測度つき Gromov-Hausdorff 位相」の拡張になっている．

以下，測度近似 $f_i : X_i \supset \mathcal{D}(f_i) \to X$ が与えられたとする．写像 $\Phi_i : C_0(X,Y) \to L^2(X_i,Y)$ を $u \in C_0(X,Y)$ に対して

$$\Phi_i(u)(x) := \begin{cases} u \circ f_i(x) & \text{if } x \in \mathcal{D}(f_i), \\ o_Y & \text{if } x \in X_i \setminus \mathcal{D}(f_i), \end{cases}$$

と定義すると，これは以下の性質を持つ：

- Φ_i は計量近似である．$\{L^2(X_i,Y), L^2(X,Y)\}$ 上の漸近関係から定まる直和 $(\bigsqcup_i L^2(X_i,Y)) \sqcup L^2(X,Y)$ 上の位相を L^2 **強位相**，その収束を L^2 **強収束**と呼ぶ．以下，$u_i \to u$ は L^2 強収束を表す．
- Y が測地空間のとき，Φ_i は全測地的写像である．つまり，測地線を測地線に写す．特に，Y が線形空間のとき，Φ_i は線形写像になる．

以下，Y を点つきの完備可分 CAT(0) 空間とする．すると上で述べたように，$L^2(X,Y)$ も完備可分 CAT(0) 空間となり，$C_0(X,Y)$ は $L^2(X,Y)$ の稠密な凸部分集合で，上で定義した計量近似 $\Phi_i : C_0(X,Y) \to L^2(X_i,Y)$ は全測地的となる．像 $\Phi_i(C_0(X,Y))$ とその閉包（$\mathcal{C}_i$ と書く）は $L^2(X_i,Y)$ の凸集合となる．$u_i \in L^2(X_i,Y)$ が $u \in L^2(X,Y)$ へ L^2 **弱収束**するとは，最短測地線 $\gamma_i \subset L^2(X_i,Y)$ が $\gamma(0)=u$ なる最短測地線 $\gamma \subset L^2(X,Y)$ へ収束するならば，$\Pi_{\gamma_i}(\Pi_{\mathcal{C}_i}(u_i)) \to u$ が成り立つことと定義する．ここで，$\Pi_A(x)$ は $x \in L^2(X_i,Y)$ から凸集合 $A \subset L^2(X_i,Y)$ への一番近い点とする（距離関数の凸性からこの様な点はただ一つである）．

汎関数 $E_i : L^2(X_i,Y) \to [0,\infty]$, $E : L^2(X,Y) \to [0,\infty]$ を与える．E_i が E へ *Mosco* **収束**するとは，以下の 2 条件 (M1), (M2) で定義する．

(M1) $u_i \in L^2(X_i,Y)$ が $u \in L^2(X_i,Y)$ へ弱収束するならば，$E(u) \le \varliminf E_i(u_i)$ が成り立つ．
(M2) 任意の $u \in L^2(X,Y)$ に対して，ある $u_i \in L^2(X_i,Y)$ が存在して，$u_i \to u$ かつ $E_i(u_i) \to E(u)$ が成り立つ．

$\{E_i\}$ が**漸近的コンパクト**であるとは，$u_i \in L^2(X_i,Y)$ が $d_{L^2}(u_i,o_Y)^2 + E_i(u_i) \ll \infty$ を満たすならば，u_i は収束部分列を持つことである．§1 の漸近的コンパクト性との類似に注意．

汎関数 $E : L^2(X,Y) \to [0,\infty]$ の *Moreau-Yosida* **近似**とは，次で定義される汎関数 $E^{(\lambda)} : L^2(X,Y) \to [0,\infty]$ のことを言う：

$$E^{(\lambda)}(u) := \inf_{v \in L^2(X,Y)} (\lambda E(v) + d_{L^2}(u,v)^2), \qquad u \in L^2(X,Y),\ \lambda > 0.$$

もし E が下半連続かつ凸で $E \not\equiv \infty$ ならば，任意の $u \in L^2(X,Y)$ に対してある写像 $J^\lambda(u) \in L^2(X,Y)$ がただ一つ存在して

$$E^{(\lambda)}(u) = \lambda E(J^\lambda(u)) + d_{L^2}(u, J^\lambda(u))^2$$

をみたすことが分かる．この $J^\lambda : L^2(X,Y) \to L^2(X,Y)$ を E の**レゾルベント**と呼ぶ．$Y = \mathbb{R}$ で E が $L^2(X,Y)$ 上の閉 2 次形式のときは，Δ_X を E の生成作用素とすれば $J^\lambda = (I - \lambda\Delta_X)^{-1}$ が成り立つことが知られている．

定理 2.1. Y を完備可分 CAT(0) 空間とし，測度空間 X_i, X の間の測度近似 $f_i : X_i \supset \mathcal{D}(f_i) \to X$ が与えられたとする．$E_i : L^2(X_i,Y) \to [0,\infty]$, $E : L^2(X_i,Y) \to [0,\infty]$ を共に下半連続かつ凸で恒等的に ∞ でない汎関数とする．もし E_i が E へ *Mosco* 収束するならば，任意の $\lambda > 0$ に対して E_i のレゾルベント J_i^λ が E のレゾルベント J^λ へ収束する，つまり $L^2(X_i,Y) \ni u_i \to u \in L^2(X,Y)$ ならば $J_i^\lambda(u_i) \to J^\lambda(u)$ が成り立つ．

注意 2.2. L_i, L を完備可分 CAT(0) 空間，$C_i \subset L_i$ を稠密な凸部分集合，$\Phi_i : C_i \to L$ を全測地的な計量近似とする．上の定理 2.1 はこの様な一般の場合においても成り立つ．

3. 距離空間の間の写像のエネルギーと Sobolev 空間

この章では X を測度距離空間（距離構造を持つ測度空間）で $\operatorname{supp} m_X = X$ （つまり勝手な開集合の測度が正）とし，Y を点つきの完備可分距離空間とする．X の測度と距離構造を使って，写像 $u \in L^2(X, Y)$ のエネルギーを以下に定義しよう．$r > 0$ に対して，

$$\rho_r(dxdy) := \frac{\chi_{\{d_X < r\}}(x, y)}{\sqrt{m_X(B(x, r)) m_X(B(y, r))}}\, dxdy, \quad x, y \in X,$$

$$E^r_{(X,Y)}(u) := \int_{X \times X \setminus \Delta} \frac{d_Y(u(x), u(y))^2}{d_X(x, y)^2} \rho_r(dxdy)$$

とおく．ここで $\Delta \subset X \times X$ は対角集合，$B(x, r)$ は中心 x 半径 r の距離球，χ_A は集合 A の特性関数，つまり，

$$\chi_{\{d_X < r\}}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{if } d_X(x, y) < r, \\ 0 & \text{if } d_X(x, y) \geq r. \end{cases}$$

エネルギー汎関数 $E_{(X,Y)} : L^2(X, Y) \to [0, \infty]$ を $E^r_{(X,Y)}$ の Γ 上極限で定義する：

$$E_{(X,Y)}(u) := \Gamma - \varlimsup_{r \searrow 0} E^r_{(X,Y)}(u) := \lim_{t \searrow 0} \varlimsup_{r \searrow 0} \inf_{\substack{v \in L^2(X,Y) \\ d_{L^2}(u,v) < t}} E^r_{(X,Y)}(v)$$

これは下半連続となる．さらに Y が CAT(0) ならば $E_{(X,Y)}$ は凸関数になる．明らかに定値写像 u のエネルギーは $E_{(X,Y)}(u) = 0$ となる．

注意 3.1. 上は Γ 下極限

$$\underline{E}_{(X,Y)}(u) := \Gamma - \varliminf_{r \searrow 0} E^r_{(X,Y)}(u) := \lim_{t \searrow 0} \varliminf_{r \searrow 0} \inf_{\substack{v \in L^2(X,Y) \\ d_{L^2}(u,v) < t}} E^r_{(X,Y)}(v)$$

を採用しても良い．いつ $E_{(X,Y)} = \underline{E}_{(X,Y)}$ となるか，さらにこれらが $E^r_{(X,Y)}$ の点別極限に一致するかは考察すべき問題であろう．これについては [10, 6, 7] を参照せよ．

以下で $(1, 2)$-Sobolev 空間を定義する．

$$d_{W^{1,2}}(u, v) := \left[d_{L^2}(u, v)^2 + \{ E_{(X,Y)}(u)^{1/2} - E_{(X,Y)}(v)^{1/2} \}^2 \right]^{1/2},$$
$$u, v \in L^2(X, Y),$$
$$W^{1,2}(X, Y) := \{\, u \in L^2(X, Y) \mid d_{W^{1,2}}(u, o_Y) < \infty \,\},$$
$$W^{1,2}_0(X, Y) := \overline{\{\, u \in W^{1,2}(X, Y) \mid \operatorname{supp} u : \text{compact} \,\}}^{d_{W^{1,2}}}$$

注意 3.2. もし $Y=\mathbb{R}$ のときは，ここで定義した $d_{W^{1,2}}$ から導入される $W^{1,2}(X,\mathbb{R})$ 上の位相と，普通の $W^{1,2}$ ノルムから導入される位相は同じになる．距離構造として同値であるかどうかは恐らく一般には成り立たないと思われる．

$Y=\mathbb{R}$ の場合は，$E_{(X,\mathbb{R})}$ は閉 2 次形式となる．このとき X の**ラプラシアン** Δ_X をその生成作用素で定義する．

4. 弱リップシッツ収束の下での変分収束

この章では測度距離空間のある収束（弱リップシッツ収束）を定義して，その収束の下でエネルギー汎関数が Mosco 収束することを示す．また，エネルギー汎関数の列が漸近的コンパクトになるためのある条件を与える．これらの応用として，アレキサンドロフ空間の収束について考察する．

X, Z を点つき測度距離空間とする．写像 $f:X\to Z$ と一点 $x\in X$ に対して，

$$\mathrm{dil}_x(f) := \max\left\{ \varlimsup_{\substack{x_1\neq x_2\in X\\ x_1,x_2\to x}} \frac{d_Z(f(x_1),f(x_2))}{d_X(x_1,x_2)}, \varlimsup_{\substack{A\subset X,\, m_X(A)>0,\\ A\to x}} \frac{m_Z(f(A))}{m_X(A)} \right\},$$

$$\mathrm{dil}(f) := \sup_{x\in X} \mathrm{dil}_x(f)$$

とおく．ここで $A\to x$ は $\sup_{a\in A} d_X(a,x)\to 0$ を表す．定数 $L>0$ に対して，

$$\begin{aligned} d_L(X,Z) := \inf\{ &\int_X |\log \mathrm{dil}_x(f)|\,dx + \int_Z |\log \mathrm{dil}_z(f^{-1})|\,dz \\ &\mid f:X\to Z \text{ は } f(o_X)=o_Z \text{ なる双リップシッツ写像で} \\ &\quad \mathrm{dil}(f), \mathrm{dil}(f^{-1}) \le L \text{ を満す．} \} \end{aligned}$$

X_i, X を点つき測度距離空間とする．X_i が X へ**コンパクト弱リップシッツ収束**するとは，o_X を含む任意のコンパクト開部分集合 $O\subset X$ に対して，o_Y を含むコンパクト開部分集合 $O_i\subset Y$ と定数 $L>0$ が存在して，$d_L(O_i,O)\to 0$ が成り立つことと定義する．ここで O_i, O の基点はそれぞれ o_{X_i}, o_X とする．X_i が X へコンパクト弱リップシッツ収束するとき，X_i と X の間に測度計量近似が得られる．

定理 4.1. X_i, X を点つき測度距離空間で $W_0^{1,2}(X,\mathbb{R})=W^{1,2}(X,\mathbb{R})$ を満たすとし，Y を点つきの完備可分 CAT(0) 空間とする．もし X_i が X へコンパクト弱リップシッツ収束するならば，エネルギー汎関数 $E_{(X_i,Y)}$ は $E_{(X,Y)}$ へ *Mosco* 収束する．特にレゾルベントも収束する．さらに $Y=\mathbb{R}$ のとき，ラプラシアンのスペクトルは $\sigma(\Delta_X)\subset \varliminf_i \sigma(\Delta_{X_i})$ を満たす．

注意 4.1. 上の定理の仮定 $W_0^{1,2}(X,\mathbb{R}) = W^{1,2}(X,\mathbb{R})$ から $W_0^{1,2}(X,Y) = W^{1,2}(X,Y)$ が従う．

測度距離空間 X の**（弱）ポアンカレ定数**$(k \geq 1,\ r > 0)$ を以下で定義する：

$$PC_{k,r}(X) := \sup_{\substack{u \in W^{1,2}(X,\mathbb{R}),\\ x \in X}} \frac{\|u - \bar{u}_{x,r}\|_{L^2(B(x,r);m_X)}}{rE_{(B(x,kr)(u),\mathbb{R})}(u)^{1/2}},$$

$$\bar{u}_{x,r} := \frac{\int_{B(x,r)} u\, dm_X}{m_X(B(x,r))}.$$

ここで sup は分母がゼロにならない範囲でとる．

定理 4.2. $X_i,\ X$ を点つき測度距離空間で，X をコンパクト，Y を有限コンパクトな距離空間とする．$\{X_i, X\}$ が漸近関係を持ち漸近的コンパクトと仮定する．このとき，ある $k \geq 1$ に対して

$$\varliminf_{r \searrow 0} \varlimsup_{i \to \infty} PC_{k,r}(X_i) < \infty$$

ならば $\{E_{(X_i,Y)}\}$ は漸近的コンパクトである．特に $\{E_{(X_i,Y)}\}$ は *Mosco* 収束する部分列を持つ．

系 4.1. 上の定理 *4.1, 4.2* 両方の仮定の下で，

$$\sigma(\Delta_X) = \lim_i \sigma(\Delta_{X_i})$$

が成り立つ．

5. アレキサンドロフ空間の収束と変分収束

この章では前章で述べた定理をアレキサンドロフ空間に適用する．アレキサンドロフ空間の基本的な事柄については [13] などを参照のこと．

X を n 次元アレキサンドロフ空間とする．$\delta > 0$ に対して，部分集合 $\hat{S}_\delta \subset X$ を以下のように定義する．$\partial X = \emptyset$ のとき $\hat{S}_\delta$ は δ-特異集合とする．$\partial X \neq \emptyset$ のときは X をその double へ埋め込み，double の δ-特異集合と X との共通部分を $\hat{S}_\delta$ とする．$X_\delta := X \setminus \hat{S}_\delta$ とおく．次元 n のみに従属するある $\delta_n > 0$ が存在して，X_{δ_n} はリップシッツリーマン多様体になる．X_{δ_n} のリップシッツリーマン構造から定義される関数のエネルギーは 3 章で定義したものと（定数倍を除いて）同じになる（[6]）．

[11, 12] での証明を修正して以下が得られる．

定理 5.1. $n \in \mathbb{N},\ \kappa \in \mathbb{R}$ を定数とし，$X_i,\ X$ を n 次元点つきアレキサンドロフ空間で曲率 $\geq \kappa$ とする．もし X_i が X へ *Gromov-Hausdorff* 収束するならば，X_i は X_{δ_n} へコンパクト弱リップシッツ収束する．

さらに以下が成り立つ．

定理 5.2 ([3, 12])．X を $n(\geq 2)$ 次元アレキサンドロフ空間とするとき，

(1) $\hat{S}_{\delta_n}$ は概極集合である．特に $W_0^{1,2}(X_{\delta_n}, \mathbb{R}) = W^{1,2}(X_{\delta_n}, \mathbb{R}) = W^{1,2}(X, \mathbb{R})$ が成り立つ．

(2) X の弱ポアンカレ定数 $PC_{3,r}(X)$ は X の次元と曲率の下限のみに従属した定数以下である．

定理 4.1, 4.2, 5.1, 5.2 から最終的に次の定理が得られる．

定理 5.3. $n \in \mathbb{N}$, $\kappa \in \mathbb{R}$ を固定する．X_i, X が n 次元点つきアレキサンドロフ空間で曲率 $\geq \kappa$，Y を点つきの完備可分 CAT(0) 空間とする．X_i が X へ点つき *Gromov-Hausdorff* 収束するならば，

(1) $E_{(X_i,Y)}$ は $E_{(X,Y)}$ へ *Mosco* 収束する．特に，任意の $\lambda > 0$ に対してレゾルベントの収束 $J_i^\lambda \to J^\lambda$ が成り立つ．

(2) もし X がコンパクトで Y が有限コンパクトならば，$\{E_{(X_i,Y)}\}$ は漸近的コンパクトである．

この定理で $Y = \mathbb{R}$ のときは，[12, 4] で証明した．

参考文献

[1] G. Dal Maso, An introduction to Γ-convergence, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications **8**, Birkhäuser Boston, 1993.

[2] J. Jost, Equilibrium maps between metric spaces, Calc. Var. Partial Differential Equations **2**(1994), No. 2, 173–204.

[3] K. Kuwae, Y. Machigashira, and T. Shioya, Sobolev spaces, Laplacian, and heat kernel on Alexandrov spaces, Math. Z. **238**(2001), 269–316.

[4] K. Kuwae and T. Shioya, Convergence of spectral structures: A functional analytic theory and its applications to spectral geometry, preprint, 2001.

[5] 桑江一洋, 塩谷 隆, スペクトル構造の収束について，１９９９年度 幾何学シンポジウム 予稿集.

[6] K. Kuwae and T. Shioya, On generalized measure contraction property and energy functionals over Lipschitz maps, Potential Anal. **15**(2001), no. 1-2, 105–121.

[7] K. Kuwae and T. Shioya, Sobolev and Dirichlet spaces over maps between metric spaces, to appear in Journal für die Reine und Angewandte Matematik.

[8] K. Kuwae and T. Shioya, in preparation.

[9] U. Mosco, Composite media and asymptotic Dirichlet forms, J. Funct. Anal. **123**(1994), No. 2, 368–421.

[10] K.-T. Sturm, Diffusion processes and heat kernels on metric spaces, Ann. Probab. **26**(1998), No. 1, 1–55.

[11] T. Shioya, Mass of rays in Alexandrov spaces of nonnegative curvature, Comment. Math. Helv. **69**(1994), No. 2, 208–228.

[12] T. Shioya, Convergence of Alexandrov spaces and spectrum of Laplacian, J. Math. Soc. Japan **53**(2001), No. 1, 1–15.

[13] 大津幸男，加須栄篤，山口孝男，酒井隆，塩谷隆，Wilderigh Tuschmann，リーマン多様体とその極限，研究集会資料 Surveys in Geometry 2001 年１月 8 日—1 月 12 日.