コンパクト対称空間の幾何学的構造

田中 真紀子

東京理科大学理工学部

この講演は長野正先生との共同研究に基づいている。

対称空間の圏 $\mathcal{C}_S$ を次のように定義する: (i) $\mathcal{C}_S$ は C^∞ 多様体の圏の部分圏である; (ii) 対称空間 M には各点 $x \in M$ において点対称 $s_x : M \rightarrow M$ が存在する (つまり、 s_x は involutive で x は s_x の孤立固定点); (iii) 対称空間 M から N への射 $f : M \rightarrow N$ は各点 $x \in M$ に対して $f \circ s_x = s_{f(x)} \circ f$ を満たす; (iv) すべての点対称は射である。この定義は O. Loos (Benjamin, 1969) のものと本質的に同じである。 M の連結性を仮定していないので離散空間のような非連結な対称空間を考えることができる。 M が連結ならば M の自己同型群 $\text{Aut}(M)$ で不変なアフィン接続が一意的に存在するので、通常対称空間の定義に一致する。特に、 $\text{Aut}(M)$ は Lie 群で M に推移的に作用する。すべての射 $f : M \rightarrow N$ は全射 $e : M \rightarrow f(M)$ と単射 $m : f(M) \rightarrow N$ の合成である。 $f(M)$ を N の部分空間とよぶ。連結な部分空間は全測地的部分多様体に他ならない。コンパクトな対称空間 M には極地と子午空間とよばれる基本的な部分空間がある。 $M = G/K$ とする。ここで $G = \text{Aut}(M)$ 、 K は点 $o \in M$ におけるイソトロピー部分群である。 o における点対称 s_o による固定点集合の各連結成分を極地とよび、点 p を含む極地を $M_{(p;o)}^+$ で表す。また、 $s_p \circ s_o$ による固定点集合の点 p を含む連結成分を極地 $M_{(p;o)}^+$ に対する子午空間とよび $M_{(p;o)}^-$ で表す。極地と子午空間が基本的であるのは、 M が 1 組の $(M_{(p;o)}^+, M_{(p;o)}^-)$ で (局所的にも大域的にも) 決まるという事実による。極地 $M_{(p;o)}^+$ が 1 点 p からなるとき p を o の極とよぶ (ただし、 $p \neq o$ とする)。 p が o の極のとき、 o と p を結ぶ測地弧の midpoint 全体は M の部分空間になるが、その各連結成分を o と p に関する中心小体とよぶ。 $\pi : M \rightarrow M''$ を各点 $x \in M$ とその極を同一点にうつす写像とすると、 M'' は M と局所同型なコンパクト対称空間で π は二重被覆射である。このとき、中心小体の f による像は M'' において $\pi(o)$ の極地になる。逆に、 M'' の任意の極地は M の極地か中心小体のいずれかの π による像である。 $G = \text{Aut}(M)$ が半単純のとき、 M に局所同型な $M^\%$ で他の対称空間の被覆空間にならないものがただ一つ存在する。この $M^\%$ を M のどん底空間 (the bottom space) とよぶ。例えば、 $M = SU(n)$ のとき $M^\% = SU(n)/\mathbb{Z}_n$ 、 $M = G_n(\mathbb{R}^{2n})$ のとき $M^\% = G_n(\mathbb{R}^{2n})^\%$ (ここで、 $G_n(\mathbb{R}^{2n})^\%$ は $\mathbb{R}^{2n}$ の n 次元部分空間とその直交補空間を同一視して得られる)。

以下、 M はコンパクト連結対称空間とする。

M の異なる3点 o, p, q が $s_o \circ s_p \circ s_q = \text{id}_M$ を満たすとき組 $\{o, p, q\}$ を regular triple とよぶ。例えば、2次元球面 S^2 を $\mathbb{R}^3$ の単位球面とみなして $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底 $\{o, p, q\}$ をとれば S^2 の regular triple になる。また、実、複素、四元数およびケーリー射影平面 M には次のようにして regular triple が構成できる。 M の極地 $M_{(p;o)}^+$ は射影直線 (したがって、 S^1, S^2, S^4 または S^8) であるので、 $M_{(p;o)}^+$ における p の極を q とすれば $\{o, p, q\}$ は M の regular triple になる。このとき、子午空間も射影直線で $M_{(p;o)}^-$ と $M_{(q;o)}^-$ は点 o で直交する。したがって、 o, p, q を頂点とする一辺が射影直線の“直角正三角形”ができる。

$\{o, p, q\}$ が regular triple ならば $s_o \circ s_p = s_q$ が成り立つので M は inner type である (すなわち、各点对称は $\text{Aut}(M)$ の単位元連結成分に含まれる)。特に、Lie 群には regular triple は存在しない。(しかし、後で述べるように regular 4-tuple は存在する。)

regular triple は次のような性質をもつ。

命題 1 $\{o, p, q\}$ を regular triple とする。このとき $\{s_o, s_p, s_q\}$ で生成される群は $\left\{ \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \right\}$ で生成される群と同型であり、その自己同型群は3次の対称群に同型である。

特に、regular triple $\{o, p, q\}$ に対して点对称 s_o, s_p, s_q は互いに可換である。

命題 2 $\{o, p, q\}$ を M の regular triple とする。 M に極が存在しなければ s_o, s_p, s_q はそれぞれ o, p, q の各点を固定する。

定理 3 $M = G/K$ に極が存在しないとき、次の (i),(ii),(iii) は同値 : (i) M には regular triple が存在する ; (ii) M の極地 M^+ で対応する子午空間 M^- と G -合同なものが存在

する ; (iii) M の極地 M^+ でそれ自身に極があるものが存在する。

この定理により極のない M に regular triple があれば、その3点を頂点とし一辺が極地と同型な部分空間であるような“直角正三角形”ができることがわかる。B-Y. Chen は Katholiek Universiteit Leuven における Lecture Note(1987) の中で定理 3 における (i) と (ii) の同値性を示している。また、厚山 (Kodai Math. J. 1992,1997) は regular triple が存在するどん底空間 $M^\%$ を広義射影平面とよび (このとき、直線は上の定理の (ii) あるいは (iii) の M^+) 射影幾何学的見地からこれらの対称空間を扱っている。直線全体が $M^\%$ 自身と同型になることもわかる。 $M^\%$ の regular triple $\{p_1, p_2, p_3\}$ に対して、 $p_i, p_j (i \neq j)$ を結ぶ測地弧の中点を m_{ij} とすると、点对称 $s_{m_{ij}}$ は $p_k (k \neq i, j)$ を固定し、 p_i, p_k を含む直線と p_j, p_k を含む直線を入れ換える。

定理 4 $\pi : M \rightarrow N$ を二重被覆射とし N には極が存在しないとする。このとき、 M に regular triple が存在するための必要十分条件は N に regular triple が存在することである。

この定理により oriented Grassmann manifold $G_n^o(\mathbb{R}^{2n})$ を除くすべての M に対して regular triple が存在するかどうか判定できる。 $G_n^o(\mathbb{R}^{2n})$ については個別の議論により $n = \text{even}$ のときには regular triple が存在することがわかる。ケーラー対称空間 M の (制限) 根系は C 型か BC 型のいずれかであるが、極が存在するのは C 型のときだけである。このとき、中心小体は対称 R 空間でこれは二重被覆射 $\pi : M \rightarrow M^\%$ によって定理 3 の (ii) および (iii) を満たす極地にうつる。したがって C 型のケーラー対称空間には regular triple が存在する。

regular triple の拡張として regular n -tuple を定義する。

定義 M の異なる n 個の点 $p_1, p_2, \dots, p_n$ の組 $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ が (i) $s_{p_1} \circ s_{p_2} \circ \dots \circ s_{p_n} = \text{id}_M$, および (ii) $s_{p_j} \circ s_{p_k} = s_{p_k} \circ s_{p_j}$ を満たすとき regular n -tuple とよぶ。

例 n 次元実、複素および四元数射影空間には regular $(n + 1)$ -tuple が存在する。

命題 5 $M = G/K$ に regular triple が存在するならば、 G には regular 4-tuple が存在する。

講演では、regular triple をもつ対称空間の部分空間列： $\mathbb{R}P^2 \subset \mathbb{C}P^2 \subset \mathbb{H}P^2 \subset FII = F_4/Spin(9) \subset EIII = E_6/T \cdot Spin(10) \subset EVI = E_7/Sp(1) \cdot Spin(12) \subset EVIII = E_8/SO(16)^\#$ および $GI = G_2/SO(4) \subset FI = F_4/Sp(1) \cdot Sp(3) \subset EII = E_6/Sp(1) \cdot SU(6) \subset EVI \subset EIX = E_8/Sp(1) \cdot E_7$ に見られる性質 (triality との関連など) についても触れたい。