Representation for Classifying Toposes of Theories

荒武 永史 (Aratake Hisashi)
京都大学大学院理学研究科
数学・数理解析専攻 数理解析系　修士一回

2015 年 11 月 27 日@数学基礎論若手の会 2015

1 First-Order Categorical Logic

1.1 Coherent Logic: Its Syntax and Semantics

1.1.1 Categorical Preliminaries I

Definition 1.1 (subobject poset)**.** 圏 $\mathcal{C}$ の object C に対して，C の subobject （*i.e.* C を codomain にもつ monomorphism の同値類）全体がなす poset を $\mathbf{Sub}_{\mathcal{C}}(C)$ で表す．適宜 $\mathbf{Sub}(C)$ などと省略する．

$$S \leq T \in \mathbf{Sub}(C) \quad \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{tikzcd} S \arrow[r, tail, dashed, "\exists"] \arrow[d, tail] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & T \arrow[dl] \\ C & \end{tikzcd}$$

□

普通の first-order logic の semantics が圏 $\mathbf{Set}$ の中で行われていると捉えると，“ $\mathbf{Set}$ っぽい圏 ” の中でもモデル理論ができるのではないかと考えられる．そこで，「T-モデルが定義できるような圏」を定義するために，$\mathbf{Set}$ のいくつかの性質を公理として抽出する．

Definitions 1.2 (coherent category (*cf.* Johnstone [6, A1.4]))**.**

(1) 圏 $\mathcal{C}$ が以下を満たすとき，*coherent category* という．
- finite limits を持つ．
- 任意の射は image factorization を持つ．
- regular epi は stable under pullback.
- 任意の object A に対して，$\mathbf{Sub}(C)$ は finite unions を持ち，さらにそれらは stable under pullback.

このとき $\mathbf{Sub}(C)$ は lattice になることに注意する．

(2) 圏 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ を coherent category とする．函手 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ が (1) の構造を保つとき，*coherent functor* という． □

1.1.2 Coherent Logic

logic はすべて many-sorted で考える．今回は full first-order logic ではなく，次の fragment（coherent logic [6, D1]）を考える．

Definition 1.3 (coherent formula)**.** $R(\bar{x}), s(\bar{x}) = t(\bar{x}), \top, \bot$ の形の論理式を原子論理式とし，論理記号 $\{\wedge, \vee, \exists\}$ から生成されるような論理式を *coherent formula* という． □

他にも様々な logic (regular/intuitionistic/geometric logic など) を考えられるが今回は扱わない．

Definitions 1.4.

(1) 変数集合が $\bar{x}$ に含まれる coherent formulas φ, ψ に対して，$\varphi \vdash_{\bar{x}} \psi$ を *coherent sequent* という．
(2) coherent sequent の集合 $T = \{\, \varphi_i \vdash_{\bar{x}_i} \psi_i \,\}_{i \in I}$ を *coherent theory* という． □

Remark 1.5. coherent formula には $\rightarrow$ が使えないので，formula 単体の代わりに sequent を axiom とする必要がある． □

Example 1.6. categorical logic においては，通常 $\forall \bar{x} \varphi(\bar{x})$ の形で表される公理に相当する表現として，$\top \vdash_{\bar{x}} \varphi(\bar{x})$ が用いられる．coherent theory になるようなものとして以下がある：

- 局所環の理論：「非単元全体がイデアルをなす」$\equiv \exists z((x+y)z = 1) \vdash_{x,y} \exists z(xz = 1) \vee \exists z(yz = 1)$
- 体の理論：「0 以外の元は単元」$\equiv \top \vdash_x (x = 0) \vee \exists y(xy = 1)$ □

coherent theory に対応して以下の syntax を考える：

coherent logic **の公理・推論規則（一部）**

$$\frac{\varphi \vdash_{\bar{x},y} \psi}{\exists y \varphi \vdash_{\bar{x}} \psi} \qquad \frac{\exists y \varphi \vdash_{\bar{x}} \psi}{\varphi \vdash_{\bar{x},y} \psi} \qquad (y \notin \mathbf{FV}(\psi))$$

$$\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \vdash_{\bar{x}} (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi) \qquad \text{(distributive law)}$$

$$\varphi \wedge \exists y \psi \vdash_{\bar{x}} \exists y(\varphi \wedge \psi) \qquad \text{(Frobenius law)}$$

$\rightarrow$ を用いないため，$\vee, \wedge$ の分配律や Frobenius 律を公理として追加していることに注意する．
syntax を定めたので，次は semantics を定める．

Definitions 1.7 (structure)**.** $\mathcal{L}$ を言語，$\mathcal{C}$ を coherent category とする．

(1)（$\mathcal{C}$ における）*$\mathcal{L}$-structure* M は以下の割り当てから成る：
  - 各 basic sort A に対して，object $A^M \in \mathcal{C}$
  - 定数記号 $c : A$ に対して，morphism $c^M : 1 \to A^M$
  - 函数記号 $f : A_1 \times \cdots \times A_n \to B$ に対して，morphism $f^M : A_1^M \times \cdots \times A_n^M \to B^M$
  - 関係記号 $R : A_1 \times \cdots \times A_n$ に対して，subobject $R^M \rightarrowtail A_1^M \times \cdots \times A_n^M$

(2) $\mathcal{L}$-term $t : A_1 \times \cdots \times A_n \to B$ に対して，解釈 $t^M : A_1^M \times \cdots \times A_n^M \to B^M$ が自然に帰納的に定まる．
(3) $\mathcal{L}$-formula $\varphi(\bar{x})$ $(x_i : A_i)$ に対して，subobject $\varphi^M \rightarrowtail A_1^M \times \cdots \times A_n^M$ を以下のように帰納的に定める．

- 原子論理式 $s(\bar{x}) = t(\bar{x})$ のとき，次の equalizer をとる：

$$\begin{tikzcd} (s(\bar{x}) = t(\bar{x}))^M \arrow[r, tail] & A_1^M \times \cdots \times A_n^M \arrow[r, shift left, "s^M"] \arrow[r, shift right, "t^M"'] & B^M \end{tikzcd}$$

- 原子論理式 $R(t_1(\bar{x}), \ldots, t_m(\bar{x}))$ のとき，次の pullback をとる：

$$\begin{tikzcd} R(t_1(\bar{x}), \ldots, t_m(\bar{x}))^M \arrow[r] \arrow[d] & R^M \arrow[d] \\ A_1^M \times \cdots \times A_n^M \arrow[r, "(t_1^M, \ldots, t_m^M)"] & B_1^M \times \cdots \times B_m^M \end{tikzcd}$$

- 原子論理式 $\top, \bot : A$ のとき，それぞれ $\mathbf{Sub}(A^M)$ の top (resp. bottom) element を対応させる．
- $\varphi \wedge \psi, \varphi \vee \psi$ のとき，それぞれ $\mathbf{Sub}(A_1^M \times \cdots \times A_n^M)$ における meet $\varphi^M \cap \psi^M$, join $\varphi^M \cup \psi^M$ を対応させる．
- $\exists y \varphi(x, y)$ のとき，次の image factorization をとる：

$$\begin{tikzcd} \varphi^M \arrow[r, tail] \arrow[dr, two heads] & A^M \times B^M \arrow[dr, "\text{proj.}"] & \\ & (\exists y \varphi)^M \arrow[r, tail] & A^M \end{tikzcd}$$

□

Definitions 1.8.

(1) $\sigma \equiv (\varphi \vdash_{\bar{x}} \psi)$ を $\mathcal{L}$-coherent sequent，$\mathcal{C}$ を coherent category とする．$\mathcal{C}$ における $\mathcal{L}$-structure M に対し，

$$M \models \sigma \quad \overset{\text{def.}}{\iff} \quad \varphi^M \leq \psi^M \quad \text{in } \mathbf{Sub}(A_1^M \times \cdots \times A_n^M)$$

(2) coherent theory T に対し，

$$M \models T \text{（\textit{i.e.} } M \textbf{ は } T \textbf{ のモデル}\text{）} \quad \overset{\text{def.}}{\iff} \quad \forall \sigma \in T,\ M \models \sigma$$

□

Theorem 1.9 (Soundness)**.** T を coherent theory，σ を coherent sequent とする．T から σ が証明できるとき，任意の coherent category $\mathcal{C}$ と（$\mathcal{C}$ における）任意の T のモデル M に対し $M \models \sigma$ となる． □

Example 1.10 (Models in a Topos)**.** coherent theory のモデルの具体例を見る．X を位相空間として，$\mathbf{Sh}(X)$ を X 上の層の成す圏とすると，これは coherent category である（実際にはさらに強く Grothendieck topos である）．

- $\mathbf{Sh}(X)$ においては，アーベル群の理論のモデルはアーベル群の層と同一視できる．
- $\mathbf{Sh}(X)$ においては，局所環の理論のモデルは局所環の層と同一視できる．

$\rightsquigarrow$（主に代数幾何で用いられる）「代数の層」の概念は，coherent theory のモデルとして categorical logic の文脈から捉え直せる． □

1.2 Syntactic Category and Completeness

Definition 1.11 (syntactic category)**.** coherent theory T に対して，coherent category $\mathcal{C}_T$ (*syntactic category* と呼ぶ) を以下のように定義する：

- coherent formulas を α-同値で割った集合を object 全体とする．φ を含む同値類を $\{\bar{x}.\,\varphi\}$ で表す．
- $\{\bar{x}.\,\varphi\}$ から $\{\bar{y}.\,\psi\}$ への morphism は coherent formula $\theta(\bar{x},\bar{y})$ であって以下が T から証明可能なもの（を T-同値で割った同値類 $[\theta]$）：

$$\theta \vdash_{\bar{x},\bar{y}} (\varphi \wedge \psi),$$
$$(\theta \wedge \theta[\bar{z}/\bar{y}]) \vdash_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}} (\bar{y} = \bar{z}),$$
$$\varphi \vdash_{\bar{x}} \exists \bar{y}\theta.$$

□

$\mathcal{C}_T$ の中には “canonical” model M_T が存在する：

- basic sort A に対して $A^{M_T} = \{x.\,\top\}$ （ただし x は A を sort にもつ変数）．
- 定数記号 $c : A$ に対して $c^{M_T} = [y = c] : \{[].\,\top\} \to \{y.\,\top\}$ （$[]$ は空ソート）．
- 函数記号 $f : A_1 \times \cdots \times A_n \to B$ に対して，$f^{M_T} = [f(\bar{x}) = y] : \{\bar{x}.\,\top\} \to \{y.\,\top\}$
- 関係記号 $R : A_1 \times \cdots \times A_n$ に対して，$R^{M_T} = [R(\bar{x}) \wedge \bar{x} = \bar{x'}] : \{\bar{x}.\,R(\bar{x})\} \rightarrowtail \{\bar{x'}.\,\top\}$．

すると実際に M_T は（$\mathcal{C}_T$ における）T のモデルとなる．こうして，理論に圏を対応させることができ，その圏には canonical model が存在することがわかった．これらを用いると，理論のモデルを以下のように圏論的に捉えることができる：

Theorem 1.12. σ を coherent sequent とする．

(1) T から σ が証明可能 $\Longleftrightarrow M_T \models \sigma$

(2) 任意の coherent category $\mathcal{D}$ に対して，圏同値

$$\mathbf{Coh}(\mathcal{C}_T, \mathcal{D}) \simeq T\text{-}\mathbf{Mod}(\mathcal{D})$$

が存在する．ここで，左辺は coherent functors と natural transformations の成す圏，右辺は T のモデルと準同型が成す圏．さらに，この圏同値は $\mathcal{D}$ について自然性を満たす．

Proof (1) は syntactic category の定義を検討することで容易に得られる．
(2) は具体的に圏同値を構成する．

- functor $I : \mathbf{Coh}(\mathcal{C}_T, \mathcal{D}) \to T\text{-}\mathbf{Mod}(\mathcal{D})$ を次で定義：coherent functor $F : \mathcal{C}_T \to \mathcal{D}$ に対して，$\mathcal{D}$ における T のモデル $F(M_T)$ が得られる．そこで $I(F) := F(M_T)$ と定める．
- functor $J : T\text{-}\mathbf{Mod}(\mathcal{D}) \to \mathbf{Coh}(\mathcal{C}_T, \mathcal{D})$ を次で定義：T のモデル M に対して，$F_M : \mathcal{C}_T \to \mathcal{D}$ を $F_M(\{\bar{x}.\,\varphi\}) := \varphi^M$ で定めると，（morphism に対する作用も自然に定まって）coherent functor になる．そこで $J(M) := F_M$ と定める．

■

任意のモデルが M_T の像になることから，M_T は *universal model* と呼ばれる．

Corollary 1.13. T を coherent theory，σ を coherent sequent とする．任意の coherent category $\mathcal{C}$ と（$\mathcal{C}$ における）T のモデル M について $M \models \sigma$ となるならば，σ は T から証明可能である．

Proof syntactic category $\mathcal{C}_T$ と universal model M_T に対して，仮定を適用すれば良い． ■

1.3 Classifying Topos

1.3.1 Categorical Preliminaries II

数学との関わりを考える際は，一般の coherent category におけるモデルよりも，以下の圏におけるモデルを考えるのが重要になる：

Definition 1.14 (Grothendieck topos)**.** locally small coherent category $\mathcal{E}$ が以下の条件（Giraud の公理）を満たすとき，$\mathcal{E}$ は *Grothendieck topos* であるという：

- $\mathcal{E}$ は regular category として effective，すなわち任意の equivalence relation $a, b : R \rightrightarrows E$ に対して coequalizer $c : E \to F$ が存在し，さらに a, b は c の kernel-pair となる，
- $\mathcal{E}$ は small disjoint coproduct をもち，それらは stable under pullback,
- $\mathcal{E}$ は生成集合を持つ．すなわち，対象の集合 $\mathcal{C}$ で次の性質を満たすものが存在：$E, F \in \mathcal{E}$ の間の任意の 2 つの異なる射 $f, g : E \rightrightarrows F$ に対して，ある対象 $C \in \mathcal{C}$ と $h : C \to E$ が存在して，$fh \neq gh$ となる． □

Remark 1.15. ふつう，Grothendieck topos は以下の性質によって定義される：ある small site $(\mathcal{C}, J)$（圏と " 位相 " の組）が存在して

$$\mathcal{E} \simeq \mathbf{Sh}(\mathcal{C}, J).$$

（ここで，$\mathbf{Sh}(\mathcal{C}, J)$ は J に関する $\mathcal{C}$ 上の sheaf とその間の射の成す圏．）

この定義と先ほどの公理的定義（Giraud の公理）の同値性は，MacLane & Moerdijk [7, Appendix]，および Johnstone [6, C2.2] 参照.

また，Grothendieck topos よりも広い elementary topos と呼ばれる圏のクラスがある．elementary topos でも first-order logic （より一般に higher-order logic）を展開できるが，幾何的な文脈ではあまりうまく機能する概念ではないので今回は使わない．以後，topos という語は Grothendieck topos の意で用いる． □

Definition 1.16 (Geometric Morphism)**.** $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ を (Grothendieck) topos とする．*geometric morphism* $p : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ とは，函手の組 $p = \langle p^*, p_* \rangle$ であって次を満たすもののことを言う：

- $p_* : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ かつ $p^* : \mathcal{F} \to \mathcal{E}$
- $p^* \dashv p_*$ で，さらに p^* は finite limits を保つ.

一般に，p_* を *direct image functor*，p^* を *inverse image functor* という．また，$p, q : \mathcal{E} \rightrightarrows \mathcal{F}$ を geometric morphism とするとき，自然変換 $\eta : p^* \Rightarrow q^*$ のことを p から q への geometric transformation と言い，$\eta : p \Rightarrow q$ と書く．$\mathcal{E}$ から $\mathcal{F}$ への geometric morphisms とその間の geometric transformations が成す圏を $\mathbf{Geom}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ と表す． □

1.3.2 Classifying Topos

この節全般については，Johnstone [6, D3] および MacLane & Moerdijk [7, Ch. X] を参照.

Theorem 1.17. T を coherent theory とする．coherent category $\mathcal{C}_T$ には "canonical topology" J_T が定まり，そこから得られる Grothendieck topos $\mathbf{Sh}(\mathcal{C}_T, J_T)$ は次の性質を持つ：

任意の Grothendieck topos $\mathcal{E}$ に対して圏同値

$$\mathbf{Geom}(\mathcal{E}, \mathbf{Sh}(\mathcal{C}_T, J_T)) \simeq T\text{-}\mathbf{Mod}(\mathcal{E})$$

が成り立つ．しかも，この圏同値は $\mathcal{E}$ について自然性を満たす.

Proof 一般に coherent category $\mathcal{C}$ とその上の canonical topology J について，任意の Grothendieck topos に対し次の圏同値が得られる：

$$\mathbf{Geom}(\mathcal{E}, \mathbf{Sh}(\mathcal{C}, J)) \simeq \mathbf{Coh}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$$

この圏同値と $\mathbf{Coh}(\mathcal{C}_T, \mathcal{D}) \simeq T\text{-}\mathbf{Mod}(\mathcal{D})$ を合わせれば良い. ■

この圏同値も $\mathbf{Sh}(\mathcal{C}_T, J)$ における universal model U_T を inverse image functor によって引き戻すことによって得られる．ここで U_T は，$\mathcal{C}_T$ における universal model M_T を米田埋め込み $\mathbf{y} : \mathcal{C}_T \to \mathbf{Sh}(\mathcal{C}_T, J_T)$ で送ることによって得られる．上の定理を成り立たせるような topos を（T の）*classifying topos* といい，$\mathbf{Set}[T]$ と書く.

topos 理論によって logic の定理を導く例を一つ挙げる．topos 理論における Deligne の定理を用いて次が得られる.

Theorem 1.18 (Classical Completeness)**.** T を coherent theory，$\sigma \equiv (\varphi \vdash_{\bar{x}} \psi)$ を coherent sequent とする．T の任意の $\mathbf{Set}$-モデル M について $M \models \sigma$ となるならば，σ は T から証明可能である.

Proof Deligne の定理から $\mathbf{Sh}(\mathcal{C}_T, J_T)$ は充分に点を持つ，すなわち，geometric morphism の族 $\{p_i : \mathbf{Set} \to \mathbf{Sh}(\mathcal{C}_T, J_T)\}_{i \in I}$ （I は集合）であって次の性質を持つものが存在する：

$\mathbf{Sh}(\mathcal{C}_T, J_T)$ の任意の対象 E と任意の $S, S' \in \mathbf{Sub}(E)$ に対して,

$$\forall i \in I,\, {p_i}^* S \le {p_i}^* S' \text{ in } \mathbf{Sub}({p_i}^* E) \implies S \le S'$$

一方，任意の $i \in I$ に対して，$M_i := {p_i}^*(U_T)$ は $\mathbf{Set}$ における T-モデルなので $M_i \models \sigma$．すなわち，$\varphi^{M_i} \le \psi^{M_i}$ in $\mathbf{Sub}(A^{M_i})$．ここで，$\varphi^{M_i} = {p_i}^*(\varphi^{U_T}), \psi^{M_i} = {p_i}^*(\psi^{U_T})$．したがって，任意の $i \in I$ に対して ${p_i}^*(\varphi^{U_T}) \le {p_i}^*(\psi^{U_T})$ in $\mathbf{Sub}({p_i}^*(A^{U_T}))$ となるので，$\varphi^{U_T} \le \psi^{U_T}$ in $\mathbf{Sub}(A^{U_T})$．これは $U_T \models \sigma$ を意味する. ■

Corollary 1.19. T の任意の $\mathbf{Set}$-モデル M について $M \models \sigma$ となるならば，任意の coherent category における任意の T のモデル M に対しても $M \models \sigma$ となる. □

1.3.3 Various Aspects of Grothendieck Toposes

$\mathbf{Set}[T]$ は universal model U_T を持ち，任意の topos におけるモデルは，geometric morphism $\mathbf{Set} \to \mathbf{Set}[T]$ による U_T の inverse image として得られる．したがって，$\mathbf{Set}[T]$ は T の semantical な情報を全

て持っていると言える．そして，先に見たように「圏論（トポス理論）の定理からロジックの定理を導ける」ことからも，トポスとロジックが深く関わっていることを示唆している．（実は，classical completeness は Deligne の定理と同値になる．）

さらに，$\mathbf{Set}[T]$ は " 代数的な " 表示ももつ．実際，" 有限表示 T-モデル " の圏（の双対圏）に適当な位相を定めることで，sheaf topos が $\mathbf{Set}[T]$ と圏同値になる．これは，有限表示 $\mathbb{Z}$ 代数（=有限生成 $\mathbb{Z}$ 代数）の双対圏に適当な位相を定めることで局所環の理論の classifying topos （*Zariski topos* と呼ばれる）が得られることの一般化である（*cf.* MacLane & Moerdijk [7, Ch. VIII.4]）．

そこで，$\mathbf{Set}[T]$ の論理的/代数的表示を用いて，T の " 論理的性質 " と " 代数的性質 " を関連づけることができる（*cf.* "Toposes as bridges" Caramello [4]）．また，classifing topos を用いて複数の理論を比較することも可能である．この意味で，$\mathbf{Set}[T]$ は T の " 不変量 " として機能する．

一方で，トポスが考案された背景には代数幾何的なモチベーションがあった（SGA4 [1]）．実際，Grothendieck topos においては，「層のコホモロジー論」や「ホモトピー論」を展開することができる．この理論を基礎にしてエタール・コホモロジーの理論が整備され，Weil 予想解決（by Deligne）につながった．また，トポスは代数的トポロジーの文脈においても，代数的不変量との深い関連がある．近年は ∞ 圏の理論の発展により，これらの幾何的側面は大きく深化している．

このように，トポスは幾何学との関わりも深い．そこで，$\mathbf{Set}[T]$ を幾何学的に表示し，T **を " 幾何的に " 捉えよう**とするのは自然なことと思われる．

2 Geometric Representation for Classifying Toposes

(classical) propositional theory T に対して，Lindenbaum 代数 L_T の ultrafilter 全体のなす Stone 空間 S_T は，T のモデル（*i.e.* T を真にするような付値）全体の集合に論理式から定まる基本開（閉）集合系によって位相を入れたものと同じである．そして，S_T は（Stone 双対により）T の論理的性質を内包する幾何的存在だと言える．

coherent theory T に対しても同様に「T の論理的性質を内包する空間」を構成したい．ここにおいて syntactic category $\mathcal{C}_T$ は Lindenbaum 代数の役割を果たす．

次の表のような対応を考える：

propositional case	coherent case
Lindenbaum 代数 L_T	syntactic category $\mathcal{C}_T$
T-model=Bool 準同型 $v : L_T \to \mathbf{2}$	T-model=coherent functor $M : \mathcal{C}_T \to \mathbf{Set}$
Stone 空間 $S_T = \mathrm{Hom}_{\mathbf{BA}}(L_T, \mathbf{2})$	semantical groupoid $\mathbb{G}_T$ " $\fallingdotseq$ " $\mathbf{Coh}(\mathcal{C}_T, \mathbf{Set})$

2.1 Topological Groupoids and Equivariant Sheaves

圏 $\mathcal{C}$ は次のようなデータから成っている：

- object の集まり $\mathcal{C}_0$
- morphism の集まり $\mathcal{C}_1$

- $\mathrm{dom}, \mathrm{cod} : \mathcal{C}_1 \rightrightarrows \mathcal{C}_0$ $\mathrm{id} : \mathcal{C}_0 \to \mathcal{C}_1$
- $\mathrm{comp} : \mathcal{C}_1 \times_{\mathcal{C}_0} \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_1$
  ただし $\mathcal{C}_1 \times_{\mathcal{C}_0} \mathcal{C}_1 := \{\, \langle g, f \rangle \in \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_1 \,;\, \mathrm{dom}\, g = \mathrm{cod}\, f \,\}$.
- $\mathrm{dom}, \mathrm{cod}, \mathrm{id}, \mathrm{comp}$ は適切な関係式を満たす.

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}_1 \times_{\mathcal{C}_0} \mathcal{C}_1 \arrow[r, "\mathrm{comp}"] & \mathcal{C}_1 \arrow[r, shift left=2, "\mathrm{dom}"] \arrow[r, shift right=2, "\mathrm{cod}"'] & \mathcal{C}_0 \arrow[l, "\mathrm{id}"']
\end{tikzcd}
$$

また，すべての morphism が可逆な圏を *groupoid* という．ここでは空間概念としてただの位相空間ではなく“ 位相的な圏 ”を考える．

Definition 2.1. *topological groupoid* $\mathbb{G}$ とは位相空間と連続写像の圏 **Top** における internal groupoid，すなわち，位相空間 G_0, G_1 とその間の以下のような連続写像の組で，適切な関係式を満たすものである：

$$
\begin{tikzcd}
G_1 \times_{G_0} G_1 \arrow[r, "\mathrm{comp}"] & G_1 \arrow[r, shift left=2, "\mathrm{dom}"] \arrow[r, shift right=2, "\mathrm{cod}"'] \arrow[loop below, "\mathrm{inv}"] & G_0 \arrow[l, "\mathrm{id}"']
\end{tikzcd}
$$

□

$G_0 = \{ * \}$（一点空間）となる topological groupoid は，位相群と同一視される．

Definition 2.2 (Spaces over a topological groupoid)**.** $\mathbb{G}$ を topological groupoid とする．連続写像 $\pi : E \to G_0$ に対して，空間 $\mathbb{G} * E, \mathbb{G} * \mathbb{G} * E$ を以下の pullback で定義する：

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{G} * E \arrow[r, "\mathrm{proj}_2"] \arrow[d, "\mathrm{proj}_1"'] & E \arrow[d, "\pi"] \\
G_1 \arrow[r, "\mathrm{dom}"'] & G_0
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{G} * \mathbb{G} * E \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{G} * E \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d, "\pi"] \\
G_1 \times_{G_0} G_1 \arrow[r] \arrow[d] & G_1 \arrow[r, "\mathrm{dom}"] \arrow[d, "\mathrm{cod}"] & G_0 \\
G_1 \arrow[r, "\mathrm{dom}"] & G_0 &
\end{tikzcd}
$$

上の定義から次のように見なせる：

- $\mathbb{G} * E = \{\, \langle \alpha, e \rangle \in G_1 \times E \,;\, \pi(e) = \mathrm{dom}\, \alpha \,\}$
- $\mathbb{G} * \mathbb{G} * E = \{\, \langle \beta, \alpha, e \rangle \in G_1 \times G_1 \times E \,;\, \pi(e) = \mathrm{dom}\, \alpha,\ \mathrm{cod}\, \alpha = \mathrm{dom}\, \beta \,\}$

また，$\mathbb{G} * \mathbb{G} * E$ は pullback の普遍性から次のようにも書ける：

$$\mathbb{G} * \mathbb{G} * E \simeq G_1 \times_{G_0} (\mathbb{G} * E) \simeq (G_1 \times_{G_0} G_1) \times_{G_0} E \simeq (G_1 \times_{G_0} G_1) \times_{G_1} (\mathbb{G} * E)$$

□

Definition 2.3. 位相空間 X 上の**エタール空間**とは，位相空間 E と局所同相写像 $\pi : E \to X$ の組のこと．ここで局所同相写像とは，「任意の点 $e \in E$ に対して e の開集合 U が存在して $\pi|_U$ が同相写像」となるような

連続写像のこと．$\pi_1 : E \to X$, $\pi_2 : F \to X$ をともにエタール空間とするとき，エタール空間の射とは連続写像 $f : E \to F$ であって次の図式を可換にするもの：

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & & F \arrow[dl, "\pi_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

幾何学における慣習に合わせ，エタール空間は π を明示せずに「E はエタール空間」と呼ぶ．X 上のエタール空間とその間の射が成す圏は X 上の sheaf とその間の射が成す圏 $\mathbf{Sh}(X)$ と圏同値になることが知られている． $\square$

Definition 2.4 (Equivariant Sheaves)**.** $\mathbb{G}$ を topological groupoid とする．

(1) $\mathbb{G}$ 上の *equivariant sheaf* は以下のデータから成る：
- G_0 上のエタール空間，すなわち，局所同相写像 $\pi : E \to G_0$,
- 連続写像 $\rho : \mathbb{G} * E \to E$,
- これらは以下の図式を可換にする：

$$\begin{tikzcd} \mathbb{G} * E \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\mathrm{proj}_1"'] & E \arrow[d, "\pi"] \\ G_1 \arrow[r, "\mathrm{cod}"'] & G_0 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} E \arrow[r, "\langle \mathrm{id} \circ \pi, \mathrm{id}_E \rangle"] \arrow[dr, equal] & \mathbb{G} * E \arrow[d, "\rho"] \\ & E \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbb{G} * \mathbb{G} * E \arrow[r, "\mathrm{comp} \times \mathrm{id}_E"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{G_1} \times \rho"'] & \mathbb{G} * E \arrow[d, "\rho"] \\ \mathbb{G} * E \arrow[r, "\rho"'] & E \end{tikzcd}$$

equivariant sheaf は $\langle E, \rho \rangle$ などで表す．

(2) $\langle E, \rho \rangle$, $\langle E', \rho' \rangle$ をともに equivariant sheaf とする．equivariant sheaf の間の射とは，（G_0 上の）エタール空間の射 $f : E \to E'$ で次の図式を可換にするもの：

$$\begin{tikzcd} \mathbb{G} * E \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{G_1} \times f"'] & E \arrow[d, "f"] \\ \mathbb{G} * E' \arrow[r, "\rho'"'] & E' \end{tikzcd}$$

$\mathbb{G}$ 上の equivariant sheaf とその間の射が成す圏を $\mathbf{Sh}(\mathbb{G})$ と表す． $\square$

equivariant sheaf の定義における可換図式の意図は次のようになっている：

$\alpha : \mu \xrightarrow{\sim} \nu \in G_1$ に対して $\rho_\alpha := \rho(\alpha, -) : E_\mu \to E$ （E_μ は E の μ 上の stalk）と置く．このとき ρ_α 達は次を満たす；

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(\rho_\alpha) &\subseteq E_\nu && \text{（この条件より } \rho_\alpha : E_\mu \xrightarrow{\sim} E_\nu \text{ と書ける）} \\ \rho_{\mathrm{id}_\mu} &= \mathrm{id}_{E_\mu} && \\ \rho_\beta \circ \rho_\alpha &= \rho_{\beta \circ \alpha} && (\mu \xrightarrow[\sim]{\alpha} \nu \xrightarrow[\sim]{\beta} \lambda) \end{aligned}$$

つまり，“ $\mathbb{G}$ が E の stalk に作用している ” ような状況になっている．また，この記法を使うと equivariant sheaf の射の定義における条件は次のように書ける：任意の $\alpha : \mu \xrightarrow{\sim} \nu \in G_1$ に対して，

$$\begin{tikzcd} E_\mu \arrow[r, "\rho_\alpha"] \arrow[d, "f_\mu"'] & E_\nu \arrow[d, "f_\nu"] \\ E'_\mu \arrow[r, "\rho'_\alpha"'] & E'_\nu \end{tikzcd}$$

Theorem 2.5 (*cf.* Moerdijk [8])**.** $\mathbf{Sh}(\mathbb{G})$ は Grothendieck topos である． □

2.2 The Semantical Groupoid $\mathbb{G}_T$ of Models and Isomorphisms

以下，coherent theory T を固定する．Breiner [3, Ch. 1] の方法に従って，*semantical groupoid* $\mathbb{G}_T$ を構成する．無限基数 $\kappa \geq |\mathcal{L}|$ を固定する．

Definition 2.6 (Space of Models)**.** 位相空間 $(G_T)_0 = G_0$ を以下で定める：

- G_0 の点 μ は以下のデータから成る：
  - κ-small model M_μ．すなわち，任意の basic sort A に対して $|A^{M_\mu}| \leq \kappa$ となるような T-モデル，
  - 各 basic sort A に対して $K^A_\mu \subseteq \kappa$，および infinite-to-one valuation $v^A_\mu : K^A_\mu \twoheadrightarrow A^{M_\mu}$．

  また，M_μ と変数 $\bar{x} : A = \langle x_i : A_i \rangle_i$ に対して次のように記号を定める

$$|M_\mu|^{\bar{x}} := A_1^{M_\mu} \times \cdots \times A_n^{M_\mu}$$
$$K^{\bar{x}}_\mu := K^{A_1}_\mu \times \cdots \times K^{A_n}_\mu$$
$$v^{\bar{x}}_\mu := v^{A_1}_\mu \times \cdots \times v^{A_n}_\mu : K^{\bar{x}}_\mu \twoheadrightarrow |M_\mu|^{\bar{x}}$$

- $\varphi(\bar{x})$ と $\bar{k} \in \kappa^{\bar{x}} := \kappa^n$ に対して，

$$V_{\varphi(\bar{k})} := \{\mu \in G_0\,;\, \bar{k} \in K^{\bar{x}}_\mu,\, M_\mu \models \varphi(v^{\bar{x}}_\mu(\bar{k})) \quad (\textit{i.e.}\ v^{\bar{x}}_\mu(\bar{k}) \in \varphi^{M_\mu})\}$$

  を基本開集合とする位相が G_0 に定まる． □

Definition 2.7 (Semantical Groupoid)**.** 位相空間 $(G_T)_1 = G_1$ を以下で定める：

- G_1 の点はモデルの同型 $\alpha : M_\mu \xrightarrow{\sim} M_\nu$ $(\mu, \nu \in G_0)$.
  また，このような α と $\bar{x} : A$ に対して，α の “ $\bar{x}$ 成分 ” を $\alpha^{\bar{x}} : |M_\mu|^{\bar{x}} \xrightarrow{\sim} |M_\nu|^{\bar{x}}$ と書く．
- 以下の写像を自然に定める：

$$\begin{tikzcd} G_1 \times_{G_0} G_1 \arrow[r, "\mathrm{comp}"] & G_1 \arrow[loop below, "\mathrm{inv}"] \arrow[r, shift left=2, "\mathrm{dom}"] \arrow[r, shift right=2, "\mathrm{cod}"'] & G_0 \arrow[l, "\mathrm{id}" description] \end{tikzcd}$$

  $\mathrm{dom}\,\alpha = \mu$, $\mathrm{cod}\,\alpha = \nu$ のとき，$\alpha : \mu \xrightarrow{\sim} \nu$ と書く．
- $\varphi(\bar{x})$, $\psi(\bar{y})$, $\langle \bar{k}, \bar{l} \rangle \in \kappa^{\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle}$, $\bar{i}, \bar{j} \in \kappa^{\bar{z}}$ に対して，

$$V[\varphi(\bar{k}), \psi(\bar{l}), \bar{i} \overset{\bar{z}}{\mapsto} \bar{j}] := \{\, \alpha : \mu \xrightarrow{\sim} \nu \ \in G_1\,;\, \mu \in V_{\varphi(\bar{k})},\, \nu \in V_{\psi(\bar{l})},\, \alpha^{\bar{z}}(v^{\bar{z}}_\mu(\bar{i})) = v^{\bar{z}}_\nu(\bar{j}) \,\}$$

  を基本開集合とする位相が G_1 に定まる．

さらに，上の定義に現れる写像は G_0, G_1 の位相について連続になる．したがって，topological groupoid $\mathbb{G}_T$ が得られた．この $\mathbb{G}_T$ を T の *semantical groupoid* という． □

2.3 Definable Sheaves on $\mathbb{G}_T$

Definition 2.8 (Definable Sheaves)**.** $\{\bar{x}.\varphi\} \in \mathcal{C}_T$ に対して，$\mathbb{G}_T$ 上の equivariant sheaf $[\![\varphi]\!]$（*definable sheaf* と呼ぶ）を以下で定義：

- $[\![\varphi]\!] := \{\langle \mu, \bar{a}\rangle\,;\, \mu \in G_0,\, \bar{a} \in |M_\mu|^{\bar{x}},\, M_\mu \models \varphi(\bar{a})\}$
- $\psi(\bar{x}, \bar{y})$, $\langle \bar{k}, \bar{l}\rangle \in \kappa^{\langle \bar{x}, \bar{y}\rangle}$ に対して，

  $$W_{\psi(\bar{k},\bar{l})} := \{\langle \mu, \bar{a}\rangle \in [\![\varphi]\!]\,;\, \langle \bar{k}, \bar{l}\rangle \in K_\mu^{\langle \bar{x}, \bar{y}\rangle},\, v_\mu^{\bar{x}}(\bar{k}) = \bar{a},\, M_\mu \models \psi(\bar{a}, v_\mu^{\bar{y}}(\bar{l}))\}$$

  を基本開集合とする位相が $[\![\varphi]\!]$ に定まる．さらに自然な射影 $[\![\varphi]\!] \to G_0$ について $[\![\varphi]\!]$ は G_0 上のエタール空間になる．
- $\rho_\varphi : \mathbb{G}_T * [\![\varphi]\!] \to [\![\varphi]\!]$ を以下で定める：

  $$\rho_\varphi(\alpha, \langle \mu, \bar{a}\rangle) := \langle \nu, \alpha^{\bar{x}}(\bar{a})\rangle \quad (\langle \mu, \bar{a}\rangle \in [\![\varphi]\!],\, \alpha : \mu \xrightarrow{\sim} \nu \in G_1)$$

  ここで α がモデルの同型であることと $M_\mu \models \varphi(\bar{a})$ であることから，$M_\nu \models \varphi(\alpha^{\bar{x}}(\bar{a}))$ となることに注意する．ρ_φ は連続写像になる．したがって，$\langle [\![\varphi]\!], \rho_\varphi\rangle$ は $\mathbb{G}_T$ 上の equivariant sheaf になる． □

Remark 2.9. $[\![\varphi]\!]$ について，点 $\mu \in G_0$ 上の stalk を取ると $[\![\varphi]\!]_\mu = \varphi^{M_\mu}$． □

Proposition 2.10 (Forssell [5, §2.3.4, §3.2.2])**.**

(1) $\{\bar{x}.\varphi\} \in \mathcal{C}_T$ から $[\![\varphi]\!] \in \mathbf{Sh}(\mathbb{G}_T)$ への対応は自然に函手 $[\![-]\!] : \mathcal{C}_T \to \mathbf{Sh}(\mathbb{G}_T)$ へと拡張できる．
(2) さらにこの函手は coherent, fully faithful, cover-reflecting である．特に $\mathcal{C}_T$ と，definable sheaf 全体が成す $\mathbf{Sh}(\mathbb{G}_T)$ の充満部分圏 $\mathcal{D}$ は圏同値．
(3) definable sheaf 全体の集合は $\mathbf{Sh}(\mathbb{G}_T)$ を生成する．すなわち，$E, F \in \mathbf{Sh}(\mathbb{G}_T)$ の間の任意の 2 つの異なる射 $f, g : E \rightrightarrows F$ に対して，ある $[\![\varphi]\!]$ と $h : [\![\varphi]\!] \to E$ が存在して，$fh \neq gh$ となる． □

Theorem 2.11 (Representation Theorem)**.** coherent theory T に対し, $\mathbf{Sh}(\mathbb{G}_T)$ は classifying topos $\mathbf{Set}[T]$ と圏同値：

$$\mathbf{Sh}(\mathbb{G}_T) \simeq \mathbf{Set}[T].$$

Proof 一般に Grothendieck topos $\mathcal{E}$ と $\mathcal{E}$ の生成集合から成る充満部分圏 $\mathcal{C}$ について, $\mathcal{E}$ から $\mathcal{C}$ 上の canonical topology J が定まり $\mathcal{E} \simeq \mathbf{Sh}(\mathcal{C}, J)$ となる．したがって，Grothendieck topos $\mathbf{Sh}(\mathbb{G}_T)$ の definable sheaf が成す圏 $\mathcal{D}$ に canonical topology J が定まり，$\mathbf{Sh}(\mathbb{G}_T) \simeq \mathbf{Sh}(\mathcal{D}, J)$.

一方，$[\![-]\!] : \mathcal{C}_T \to \mathbf{Sh}(\mathbb{G}_T)$ が coherent, fully faithful, cover-reflecting であることから，$[\![-]\!]$ から誘導される圏同値 $\mathcal{C}_T \simeq \mathcal{D}$ によって，$(\mathcal{C}_T, J_T)$ と $(\mathcal{D}, J)$ は site として同一視される．

以上より，$\mathbf{Set}[T] \simeq \mathbf{Sh}(\mathcal{C}_T, J_T) \simeq \mathbf{Sh}(\mathcal{D}, J) \simeq \mathbf{Sh}(\mathbb{G}_T)$. ■

まとめ

- coherent category においては，$\mathbf{Set}$ と同様にして coherent logic の syntax と semantics が展開でき，健全性と完全性が成り立つ．ここにおいて，
  - theory = coherent category
  - model = coherent functor
- syntactic category $\mathcal{C}_T$ から classifying topos $\mathbf{Set}[T]$ まで考察対象を深めることで，圏論とロジックの深い関わりがあらわになる．
- $\mathbf{Set}[T]$ の表現を用いることで，T を様々な視点（logical/algebraic/geometric）から観察できる．
  $\rightsquigarrow$ T の " 不変量 " としての $\mathbf{Set}[T]$.

参考文献

[1] M. Artin, A. Grothendieck and J. L. Verdier, *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas* (SGA 4), LNM 269, 270 and 305, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1972.

[2] S. Awodey and H. Forssell, *First-Order Logical Duality*, Annals of Pure and Applied Logic, vol. 164, pp. 319-348, 2013.

[3] S. Breiner, *Scheme representation for first-order logic*, Ph.D. thesis, Carnegie Mellon University, 2014. Available at `http://arxiv.org/abs/1402.2600`.

[4] O. Caramello, *The unification of Mathematics via Topos Theory*, 2010. Available at `http://arxiv.org/abs/1006.3930`.

[5] H. Forssell, *First-Order Logical Duality*, Ph.D. thesis, Carnegie Mellon University, 2008, Available at `https://www.andrew.cmu.edu/user/awodey/students/`.

[6] P. T. Johnstone, *Sketches of an Elephant: A Topos Theory Compendium* Volumes 1 and 2, Oxford Logic Guides, vols. 43 and 44, Clarendon Press, Oxford, 2002.

[7] S. MacLane and I. Moerdijk, *Sheaves in Geometry and Logic: A First Introduction to Topos Theory*, Universitext, Springer-Verlag, New York, 1992.

[8] I. Moerdijk, *The Classifying Topos of a Continuous Groupoid.* I, Transactions of the American Mathematical Society, vol. 310, no. 2, pp. 629-668, 1988.