

Representation for Classifying Toposes of Theories

荒武 永史 (Aratake Hisashi)

京都大学大学院理学研究科
数学・数理解析専攻 数理解析系 修士一回

2015 年 11 月 27 日@数学基礎論若手の会 2015

はじめに: おことわり

- オリジナルの結果は含まれていません。
- 時間の都合上, かなり駆け足でやります。
- スライド上はわかりやすさを優先して, 未定義語・正確さに欠ける表現も使用しています。
- 重要と思われる概念については, 正確な定義をハンドアウトに記してあります。また, いくつかの定理の証明についても, 概略をハンドアウトに載せています。
- 用語について日本語と英語がごちゃ混ぜですがご了承ください。

発表の流れ

1 First-Order Categorical Logic

- Syntax and Semantics
- Syntactic Category and Completeness
- Classifying Topos

2 Geometric Representation for Classifying Toposes

- Topological Groupoids and Equivariant Sheaves
- The Semantical Groupoid of Models and Isomorphisms
- Definable Sheaves on the Semantical Groupoid

1 First-Order Categorical Logic

- Syntax and Semantics
- Syntactic Category and Completeness
- Classifying Topos

2 Geometric Representation for Classifying Toposes

- Topological Groupoids and Equivariant Sheaves
- The Semantical Groupoid of Models and Isomorphisms
- Definable Sheaves on the Semantical Groupoid

Subobject Poset

Definition (subobject poset)

圏 $\mathcal{C}$ の object C に対して, C の subobject (i.e. C を codomain にもつ monomorphism の同値類) 全体がなす poset を $\text{Sub}_{\mathcal{C}}(C)$ で表す. 適宜 $\text{Sub}(C)$ などと省略する.

$$S \leq T \in \text{Sub}(C) \quad \stackrel{\text{def.}}{\iff} \quad \begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\exists} & T \\ \downarrow & \circlearrowleft & \swarrow \\ & C & \end{array}$$

Set-like ("Logical") Categories

圏 $\mathbf{Set}$ のいくつかの性質を公理として抽出する。

Definitions (cf. Johnstone [6, A1.4]))

(1) 圏 $\mathcal{C}$ が以下を満たすとき, *coherent category* という。

- finite limits を持つ。
- 任意の射は image factorization を持つ。
- regular epi は stable under pullback。
- 任意の object A に対して, $\mathbf{Sub}(\mathcal{C})$ は finite unions を持ち, さらにそれらは stable under pullback。

このとき $\mathbf{Sub}(\mathcal{C})$ は lattice になることに注意する。

(2) 圏 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ を coherent category とする。関手 $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ が (1) の構造を保つとき, *coherent functor* という。

Coherent Logic

logic はすべて many-sorted で考える.

今回は full first-order logic ではなく, 次の fragment を考える.

Definition (coherent formula)

$R(\bar{x}), s(\bar{x}) = t(\bar{x}), \top, \perp$ の形の論理式を原子論理式とし, 論理記号 $\{\wedge, \vee, \exists\}$ から生成されるような論理式を *coherent formula* という.

他にも様々な logic (regular/intuitionistic/geometric logic など) を考えられるが今回は扱わない.

Coherent Logic

Definitions

- (1) 変数集合が $\bar{x}$ に含まれる coherent formulas φ, ψ に対して, $\varphi \vdash_{\bar{x}} \psi$ を *coherent sequent* という.
- (2) coherent sequent の集合 $T = \{ \varphi_i \vdash_{\bar{x}_i} \psi_i \}_{i \in I}$ を *coherent theory* という.

Remark

coherent formula には $\rightarrow$ が使えないので, formula 単体の代わりに sequent を axiom とする必要がある.

Examples of Coherent Theories

categorical logic においては、通常 $\forall \bar{x} \varphi(\bar{x})$ の形で表される公理に相当する表現として、 $\top \vdash_{\bar{x}} \varphi(\bar{x})$ が用いられる。

coherent theory になるようなものとして以下がある：

- 局所環の理論：「非単元全体がイデアルをなす」

$$\exists z((x + y)z = 1) \vdash_{x,y} \exists z(xz = 1) \vee \exists z(yz = 1)$$

- 体の理論：「0 以外の元は単元」

$$\top \vdash_x (x = 0) \vee \exists y(xy = 1)$$

Syntax

coherent theory に対応して以下の syntax を考える.

coherent logic の公理・推論規則 (一部)

$$\frac{\varphi \vdash_{\bar{x},y} \psi}{\exists y \varphi \vdash_{\bar{x}} \psi}$$

$$\frac{\exists y \varphi \vdash_{\bar{x}} \psi}{\varphi \vdash_{\bar{x},y} \psi}$$

$$(y \notin \mathbf{FV}(\psi))$$

$$\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \vdash_{\bar{x}} (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$$

(distributive law)

$$\varphi \wedge \exists y \psi \vdash_{\bar{x}} \exists y (\varphi \wedge \psi)$$

(Frobenius law)

Structures in a Coherent Category

Definition (structure)

$\mathcal{L}$ を言語, $\mathcal{C}$ を coherent category とする. ($\mathcal{C}$ における)
 $\mathcal{L}$ -structure M は以下の割り当てから成る:

- 各 basic sort A に対して, object $A^M \in \mathcal{C}$
- 定数記号 $c : A$ に対して, morphism $c^M : 1 \rightarrow A^M$
- 関数記号 $f : A_1 \times \cdots \times A_n \rightarrow B$ に対して, morphism $f^M : A_1^M \times \cdots \times A_n^M \rightarrow B^M$
- 関係記号 $R : A_1 \times \cdots \times A_n$ に対して, subobject $R^M \hookrightarrow A_1^M \times \cdots \times A_n^M$

Structures in a Coherent Category

Definitions (Continued)

- (1) $\mathcal{L}$ -term $t : A_1 \times \cdots \times A_n \rightarrow B$ に対して、解釈 $t^M : A_1^M \times \cdots \times A_n^M \rightarrow B^M$ が自然に帰納的に定まる。
- (2) $\mathcal{L}$ -formula $\varphi(\bar{x})$ ($x_i : A_i$) に対して、subobject $\varphi^M \rightarrowtail A_1^M \times \cdots \times A_n^M$ を以下のように帰納的に定める。

Structures in a Coherent Category

Definitions (Continued)

- 原子論理式 $s(\bar{x}) = t(\bar{x})$ のとき, 次の equalizer をとる:

$$(s(\bar{x}) = t(\bar{x}))^M \rightrightarrows A_1^M \times \cdots \times A_n^M \begin{matrix} \xrightarrow{s^M} \\ \xleftarrow{t^M} \end{matrix} B^M$$

- 原子論理式 $R(t_1(\bar{x}), \dots, t_m(\bar{x}))$ のとき, 次の pullback をとる:

$$\begin{array}{ccc} R(t_1(\bar{x}), \dots, t_m(\bar{x}))^M & \longrightarrow & R^M \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_1^M \times \cdots \times A_n^M & \xrightarrow{(t_1^M, \dots, t_m^M)} & B_1^M \times \cdots \times B_m^M \end{array}$$

Structures in a Coherent Category

Definitions (Continued)

- 原子論理式 $\top, \perp : A$ のとき, それぞれ $\text{Sub}(A^M)$ の top (resp. bottom) element を対応させる.
- $\varphi \wedge \psi, \varphi \vee \psi$ のとき, それぞれ $\text{Sub}(A_1^M \times \cdots \times A_n^M)$ における meet $\varphi^M \cap \psi^M$, join $\varphi^M \cup \psi^M$ を対応させる.
- $\exists y \varphi(x, y)$ のとき, 次の image factorization をとる:

$$\begin{array}{ccc}
 \varphi^M & \xrightarrow{\quad} & A^M \times B^M \\
 & \searrow & \downarrow \text{proj.} \\
 & & (\exists y \varphi)^M \xrightarrow{\quad} A^M
 \end{array}$$

Soundness

Definitions

- (1) $\sigma \equiv (\varphi \vdash_{\bar{x}} \psi)$ を $\mathcal{L}$ -coherent sequent, $\mathcal{C}$ を coherent category とする. $\mathcal{C}$ における $\mathcal{L}$ -structure M に対し,

$$M \models \sigma \quad \stackrel{\text{def.}}{\iff} \quad \varphi^M \leq \psi^M \quad \text{in } \text{Sub}(A_1^M \times \cdots \times A_n^M)$$

- (2) coherent theory T に対し,

$$M \models T \text{ (i.e. } M \text{ は } T \text{ のモデル)} \quad \stackrel{\text{def.}}{\iff} \quad \forall \sigma \in T, M \models \sigma$$

Theorem (Soundness)

T を coherent theory, σ を coherent sequent とする. T から σ が 証明できるとき, 任意の coherent category $\mathcal{C}$ と ($\mathcal{C}$ における) 任意の T のモデル M に対し $M \models \sigma$ となる.

Examples: Models in a Coherent Category

coherent theory のモデルの具体例を見る． X を位相空間として， $\text{Sh}(X)$ を X 上の層の成す圏とすると，これは coherent category になる（実際はさらに強く Grothendieck topos になる）．

- $\text{Sh}(X)$ においては，アーベル群の理論のモデルはアーベル群の層と同一視できる．
- $\text{Sh}(X)$ においては，局所環の理論のモデルは局所環の層と同一視できる．

⇝（主に代数幾何で用いられる）「代数の層」の概念は，coherent theory のモデルとして categorical logic の文脈から捉え直せる．

Theories as Categories

Definition

coherent theory T に対して, coherent category $\mathcal{C}_T$ (*syntactic category* と呼ぶ) を以下のように定義する:

- object: coherent formulas を α -同値で割った同値類. φ を含む同値類を $\{\bar{x}. \varphi\}$ で表す.
- morphism $[\theta] : \{\bar{x}. \varphi\} \rightarrow \{\bar{y}. \psi\}$: coherent formula $\theta(\bar{x}, \bar{y})$ であって以下が T から証明可能なもの (functional formula).

$$\begin{aligned} \theta &\vdash_{\bar{x}, \bar{y}} (\varphi \wedge \psi), \\ (\theta \wedge \theta[\bar{z}/\bar{y}]) &\vdash_{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}} (\bar{y} = \bar{z}), \\ \varphi &\vdash_{\bar{x}} \exists \bar{y} \theta. \end{aligned}$$

(正確には, このような θ たちを T -同値で割った同値類.)

Models as Functors

Definition

$\mathcal{C}_T$ の中には “canonical” model M_T が存在する：

- basic sort A に対して $A^{M_T} = \{x. \top\}$ (ただし x は A を sort にもつ変数).
- 定数記号 $c : A$ に対して, $c^{M_T} = [y = c] : \{\square. \top\} \rightarrow \{. \top\}$
- 関数記号 $f : A_1 \times \cdots \times A_n \rightarrow B$ に対して,

$$f^{M_T} = [f(\bar{x}) = y] : \{\bar{x}. \top\} \rightarrow \{y. \top\}$$

- 関係記号 $R : A_1 \times \cdots \times A_n$ に対して,

$$R^{M_T} = [R(\bar{x}) \wedge \bar{x} = \bar{x}'] : \{\bar{x}. R(\bar{x})\} \rightarrow \{\bar{x}'. \top\}$$

実際 M_T は ($\mathcal{C}_T$ における) T のモデルとなる.

Models as Functors

Theorem

σ を coherent sequent とする.

(1) T から σ が証明可能 $\iff M_T \models \sigma$

(2) 任意の coherent category $\mathcal{D}$ に対して, 圏同値

$$\text{Coh}(\mathcal{C}_T, \mathcal{D}) \simeq T\text{-Mod}(\mathcal{D})$$

が存在する. ここで, 左辺は coherent functors と natural transformations の成す圏, 右辺は T のモデルと準同型が成す圏.

Models as Functors

Proof.

- (1) は syntactic category の定義を検討することで容易に得られる。
 (2) は具体的に圏同値を構成する。

- functor $I : \text{Coh}(\mathcal{C}_T, \mathcal{D}) \rightarrow T\text{-Mod}(\mathcal{D})$ を次で定義：coherent functor $F : \mathcal{C}_T \rightarrow \mathcal{D}$ に対して， $\mathcal{D}$ における T のモデル $F(M_T)$ が得られる．そこで $I(F) := F(M_T)$ と定める．
- functor $J : T\text{-Mod}(\mathcal{D}) \rightarrow \text{Coh}(\mathcal{C}_T, \mathcal{D})$ を次で定義： T のモデル M に対して， $F_M : \mathcal{C}_T \rightarrow \mathcal{D}$ を $F_M(\{\bar{x}. \varphi\}) := \varphi^M$ で定めると，(morphism に対する作用も自然に定まって) coherent functor になる．そこで $J(M) := F_M$ と定める． ■

任意のモデルが M_T の像になることから， M_T は *universal model* と呼ばれる．

Completeness

Corollary

T を coherent theory, σ を coherent sequent とする. 「任意の coherent category $\mathcal{C}$ と ($\mathcal{C}$ における) T のモデル M について $M \models \sigma$ 」となるならば, σ は T から証明可能である.

Proof.

syntactic category $\mathcal{C}_T$ と universal model M_T に対して, 仮定を適用すれば良い. ■

Grothendieck Topos

数学との関わりを考える際は、一般の coherent category におけるモデルよりも、以下の圏におけるモデルを考えるのが重要になる：

Definition (Grothendieck topos)

locally small coherent category $\mathcal{E}$ が以下の条件 (Giraud の公理) を満たすとき、 $\mathcal{E}$ は *Grothendieck topos* であるという：

- $\mathcal{E}$ は regular category として effective, すなわち任意の equivalence relation $a, b : R \rightrightarrows E$ に対して coequalizer $c : E \rightarrow F$ が存在し、さらに a, b は c の kernel-pair となる,
- $\mathcal{E}$ は small disjoint coproduct をもち、それらは stable under pullback,
- $\mathcal{E}$ は生成集合を持つ.

Grothendieck Topos

Remark

ふつう、Grothendieck topos は以下の性質によって定義される：
ある small site $(\mathcal{C}, J)$ が存在して、

$$\mathcal{E} \simeq \text{Sh}(\mathcal{C}, J).$$

(ここで、 $\text{Sh}(\mathcal{C}, J)$ は J に関する $\mathcal{C}$ 上の層とその間の射の成す圏.)
よって、Grothendieck topos は“幾何的な”圏とも言える。
また、Grothendieck topos よりも広い *elementary topos* と呼ばれる
圏のクラスがある。elementary topos でも first-order logic (より
一般に higher-order logic) を展開できるが、幾何的な文脈ではあ
まりうまく機能しないので今回は使わない。

以後、topos という語は Grothendieck topos の意で用いる。

Geometric Morphism

Definition (Geometric Morphism)

$\mathcal{E}, \mathcal{F}$ を (Grothendieck) topos とする. *geometric morphism* $p : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ とは, 関手の組 $p = \langle p^*, p_* \rangle$ であって次を満たすもののことを言う:

- $p_* : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ かつ $p^* : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}$
- $p^* \dashv p_*$ で, さらに p^* は finite limits を保つ.

一般に, p_* を *direct image functor*, p^* を *inverse image functor* と言う. また, $\mathcal{E}$ から $\mathcal{F}$ への geometric morphisms (とその間の geometric transformations) が成す圏を $\text{Geom}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ と表す.

Classifying Topos

Theorem

T を coherent theory とする． coherent category $\mathcal{C}_T$ には “canonical topology” J_T が定まり，そこから得られる Grothendieck topos $\mathrm{Sh}(\mathcal{C}_T, J_T)$ は次の性質を持つ：
任意の Grothendieck topos $\mathcal{E}$ に対して圏同値

$$\mathrm{Geom}(\mathcal{E}, \mathrm{Sh}(\mathcal{C}_T, J_T)) \simeq T\text{-Mod}(\mathcal{E})$$

が成り立つ．しかも，この圏同値は $\mathcal{E}$ について自然性を満たす．

この圏同値も $\mathrm{Sh}(\mathcal{C}_T, J)$ における universal model U_T を inverse image functor によって引き戻すことによって得られる．上の定理を成り立たせるような topos を (T の) *classifying topos* といい， $\mathrm{Set}[T]$ と書く．

Classical Completeness for Coherent Logic

topos 理論における Deligne の定理を用いて次が得られる。

Theorem (Classical Completeness)

T を coherent theory, σ を coherent sequent とする。 T の任意の Set-モデル M について $M \models \sigma$ となるならば, σ は T から証明可能である。

Corollary

T の任意の Set-モデル M について $M \models \sigma$ となるならば, 任意の coherent category における任意の T のモデル M に対しても $M \models \sigma$ となる。

Various Aspects of Grothendieck Toposes

$\mathbf{Set}[T]$ は universal model U_T を持ち、任意の topos におけるモデルは、geometric morphism $\mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}[T]$ による U_T の inverse image として得られる。したがって、 $\mathbf{Set}[T]$ は T の semantical な情報を全て持っていると言える。そして、先に見たように「圏論（トポス理論）の定理からロジックの定理を導ける」ことから、トポスとロジックが深く関わっていることを示唆している。（実は、classical completeness は Deligne の定理と同値になる。）

さらに、 $\mathbf{Set}[T]$ は“代数的な”表示ももつ。実際、“有限表示 T -モデル”の圏（の双対圏）に適当な位相を定めることで、sheaf topos が $\mathbf{Set}[T]$ と圏同値になる。これは、有限表示 $\mathbb{Z}$ 代数（=有限生成 $\mathbb{Z}$ 代数）の双対圏に適当な位相を定めることで局所環の理論の classifying topos（*Zariski topos* と呼ばれる）が得られる（MacLane & Moerdijk [7, Ch. VIII.4]）ことの一般化である。

Various Aspects of Grothendieck Toposes

一方で、トポスが考案された背景には代数幾何的なモチベーションがあった (SGA4 [1]). 実際, Grothendieck topos においては, 「層のコホモロジー論」や「ホモトピー論」を展開することができる. この理論を基礎にしてエタール・コホモロジーの理論が整備され, Weil 予想解決 (by Deligne) につながった.

また, トポスは代数的トポロジーの文脈においても, 代数的不変量との深い関連がある. 近年は ∞ 圏の理論の発展により, これらの幾何的側面は大きく深化している.

このように, トポスは幾何学との関わりも深い. そこで, $\mathbf{Set}[T]$ を幾何学的に表示し, T を“幾何的に”捉えようとするのは自然なことと思われる.

1 First-Order Categorical Logic

- Syntax and Semantics
- Syntactic Category and Completeness
- Classifying Topos

2 Geometric Representation for Classifying Toposes

- Topological Groupoids and Equivariant Sheaves
- The Semantical Groupoid of Models and Isomorphisms
- Definable Sheaves on the Semantical Groupoid

(classical) propositional theory T に対して, Lindenbaum 代数 L_T の ultrafilter 全体のなす Stone 空間 S_T は, T のモデル (i.e. T を真にするような付値) 全体の集合に論理式から定まる基本開 (閉) 集合系によって位相を入れたものと同じである. そして, S_T は (Stone 双対により) T の論理的性質を内包する幾何的存在だと言える.

coherent theory T に対しても同様に「 T の論理的性質を内包する空間」を構成したい. ここにおいて syntactic category $\mathcal{C}_T$ は Lindenbaum 代数の役割を果たす. 次の表のような対応を考える:

propositional case	coherent case
Lindenbaum 代数 L_T	syntactic category $\mathcal{C}_T$
T -model=Bool 準同型 $v : L_T \rightarrow \mathbf{2}$	T -model=coherent functor $M : \mathcal{C}_T \rightarrow \mathbf{Set}$
Stone 空間 $S_T = \text{Hom}_{\mathbf{BA}}(L_T, \mathbf{2})$	semantical groupoid $\mathbb{G}_T \text{ "}\doteq\text{" Coh}(\mathcal{C}_T, \mathbf{Set})$

圏 $\mathcal{C}$ は次のようなデータから成っている：

- **object の集まり $\mathcal{C}_0$**
- **morphism の集まり $\mathcal{C}_1$**
- **$\text{dom}, \text{cod} : \mathcal{C}_1 \rightrightarrows \mathcal{C}_0$ $\text{id} : \mathcal{C}_0 \rightarrow \mathcal{C}_1$**
- **$\text{comp} : \mathcal{C}_1 \times_{\mathcal{C}_0} \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_1$**
ただし $\mathcal{C}_1 \times_{\mathcal{C}_0} \mathcal{C}_1 := \{ \langle g, f \rangle \in \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_1 ; \text{dom } g = \text{cod } f \}$.
- **$\text{dom}, \text{cod}, \text{id}, \text{comp}$ は適切な関係式を満たす.**

$$\mathcal{C}_1 \times_{\mathcal{C}_0} \mathcal{C}_1 \xrightarrow{\text{comp}} \mathcal{C}_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{dom}} \\ \xleftarrow{\text{id}} \\ \xrightarrow{\text{cod}} \end{array} \mathcal{C}_0$$

また，すべての morphism が可逆な圏を *groupoid* という．

Topological Groupoids

Definition

topological groupoid $\mathbb{G}$ とは位相空間と連続写像の圏 $\mathbf{Top}$ における internal groupoid, すなわち, 位相空間 G_0, G_1 とその間の以下のような連続写像の組で, 適切な関係式を満たすものである:

$$G_1 \times_{G_0} G_1 \xrightarrow{\text{comp}} G_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{dom}} \\ \xleftarrow{\text{id}} \\ \xrightarrow{\text{cod}} \end{array} G_0$$



inv

$G_0 = \{*\}$ (一点空間) となる topological groupoid は, 位相群と同一視される.

Spaces over a Topological Groupoid

$\mathbb{G}$ を topological groupoid とする．連続写像 $\pi : E \rightarrow G_0$ に対して，空間 $\mathbb{G} * E$, $\mathbb{G} * \mathbb{G} * E$ を以下で定義する（ただし，位相は $\mathbf{Top}$ における pullback として定める）：

- $\mathbb{G} * E := \{ \langle \alpha, e \rangle \in G_1 \times E ; \pi(e) = \text{dom } \alpha \}$
- $\mathbb{G} * \mathbb{G} * E$
 $:= \{ \langle \beta, \alpha, e \rangle \in G_1 \times G_1 \times E ; \pi(e) = \text{dom } \alpha, \text{cod } \alpha = \text{dom } \beta \}$

$$\begin{array}{ccc}
 \boxed{\text{in } E} & & e \\
 & \downarrow \pi & \\
 \boxed{\text{in } G_0} & & \mu \xrightarrow[\sim]{\alpha} \nu \xrightarrow[\sim]{\beta} \lambda
 \end{array}$$

Étale Spaces

位相空間 X 上のエタール空間とは、位相空間 E と局所同相写像 $\pi : E \rightarrow X$ の組のこと。ここで局所同相写像とは、「任意の点 $e \in E$ に対して e の開集合 U が存在して $\pi|_U$ が同相写像」となるような連続写像のこと。 $\pi_1 : E \rightarrow X, \pi_2 : F \rightarrow X$ をともにエタール空間とするとき、エタール空間の射とは連続写像 $f : E \rightarrow F$ であって次の図式を可換にするもの：

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ & \searrow \pi_1 & \swarrow \pi_2 \\ & X & \end{array}$$

幾何学における慣習に合わせ、エタール空間は π を明示せずに「 E はエタール空間」と呼ぶ。 X 上のエタール空間とその間の射が成す圏は X 上の sheaf とその間の射が成す圏 $\text{Sh}(X)$ と圏同値になることが知られている。

Equivariant Sheaves

Definition

$\mathbb{G}$ を topological groupoid とする.

(1) $\mathbb{G}$ 上の *equivariant sheaf* は以下のデータ $\langle E, \rho \rangle$ から成る:

- G_0 上のエタール空間, すなわち, 局所同相写像 $\pi : E \rightarrow G_0$,
- 連続写像 $\rho : \mathbb{G} * E \rightarrow E$,
- $\alpha : \mu \xrightarrow{\sim} \nu \in G_1$ に対して $\rho_\alpha := \rho(\alpha, -) : E_\mu \rightarrow E$ (E_μ は E の μ 上の stalk) と置く. このとき ρ_α 達は次を満たす:

$$\mathrm{Im}(\rho_\alpha) \subseteq E_\nu \quad (\text{この条件より } \rho_\alpha : E_\mu \xrightarrow{\sim} E_\nu \text{ と書ける})$$

$$\rho_{\mathrm{id}_\mu} = \mathrm{id}_{E_\mu}$$

$$\rho_\beta \circ \rho_\alpha = \rho_{\beta \circ \alpha} \quad \left(\mu \xrightarrow{\sim} \nu \xrightarrow{\sim} \lambda \right)$$

Equivariant Sheaves

Definition (Continued)

in E

in G_0

$$\begin{array}{ccccc}
 e & \xrightarrow{\rho_\alpha} & \rho_\alpha(e) & \xrightarrow{\rho_\beta} & \rho_{\beta \circ \alpha}(e) \\
 \downarrow \pi & & \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\
 \mu & \xrightarrow[\sim]{\alpha} & \nu & \xrightarrow[\sim]{\beta} & \lambda
 \end{array}$$

Equivariant Sheaves

Definition (Continued)

(2) $\langle E, \rho \rangle, \langle E', \rho' \rangle$ をともに equivariant sheaf とする. equivariant sheaf の射 $f : \langle E, \rho \rangle \rightarrow \langle E', \rho' \rangle$ とは, (G_0 上の) エタール空間の射 $f : E \rightarrow E'$ で次を満たすもの: 任意の $\alpha : \mu \xrightarrow{\sim} \nu \in G_1$ に対して,

$$\begin{array}{ccc} E_\mu & \xrightarrow{\rho_\alpha} & E_\nu \\ f_\mu \downarrow & & \downarrow f_\nu \\ E'_\mu & \xrightarrow{\rho'_\alpha} & E'_\nu \end{array}$$

$\mathbb{G}$ 上の equivariant sheaf とその間の射が成す圏を $\mathrm{Sh}(\mathbb{G})$ と表す. このとき, $\mathrm{Sh}(\mathbb{G})$ は Grothendieck topos になる (cf. Moerdijk [8]).

Space of Models

以下, coherent theory T を固定する. *semantical groupoid* $\mathbb{G}_T$ を構成する (cf. Breiner [3]). 無限基数 $\kappa \geq |\mathcal{L}|$ を固定する.

Definition

位相空間 $(G_T)_0 = G_0$ を以下で定める:

- G_0 の点は κ の部分集合を台集合に持つようなモデル. 点 $\mu \in G_0$ に対応する T のモデルを M_μ で表す.
また, M_μ と変数 $\bar{x} : A = \langle x_i : A_i \rangle_i$ に対して,
 $|M_\mu|^{\bar{x}} := A_1^{M_\mu} \times \cdots \times A_n^{M_\mu} \subseteq \kappa^n$ とおく.
- $\varphi(\bar{x})$ と $\bar{k} \in \kappa^{\bar{x}} := \kappa^n$ に対して,

$$V_{\varphi(\bar{k})} := \{\mu \in G_0 ; \bar{k} \in |M_\mu|^{\bar{x}}, M_\mu \models \varphi(\bar{k}) \quad (\text{i.e. } \bar{k} \in \varphi^{M_\mu})\}$$

を基本開集合とする位相が G_0 に定まる.

Semantical Groupoid

Definition

位相空間 $(G_T)_1 = G_1$ を以下で定める：

- G_1 の点はモデルの同型 $\alpha : M_\mu \xrightarrow{\sim} M_\nu$ ($\mu, \nu \in G_0$) .
また、このような α と $\bar{x} : A$ に対して、 α の “ $\bar{x}$ 成分” を $\alpha^{\bar{x}} : |M_\mu|^{\bar{x}} \xrightarrow{\sim} |M_\nu|^{\bar{x}}$ と書く .
- 以下の写像を自然に定める：

$$G_1 \times_{G_0} G_1 \xrightarrow{\text{comp}} G_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{dom}} \\ \xleftarrow{\text{id}} \\ \xrightarrow{\text{cod}} \end{array} G_0$$

$\bigcup$
 inv

$\text{dom } \alpha = \mu, \text{cod } \alpha = \nu$ のとき、 $\alpha : \mu \xrightarrow{\sim} \nu$ と書く .

Semantical Groupoid

Definition (Continued)

- $\varphi(\bar{x}), \psi(\bar{y}), \langle \bar{k}, \bar{l} \rangle \in \kappa^{\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle}, \bar{i}, \bar{j} \in \kappa^{\bar{z}}$ に対して,

$$V[\varphi(\bar{k}), \psi(\bar{l}), \bar{i} \xrightarrow{\bar{z}} \bar{j}] \\ := \{ \alpha : \mu \xrightarrow{\sim} \nu \in G_1 ; \mu \in V_{\varphi(\bar{k})}, \nu \in V_{\psi(\bar{l})}, \alpha^{\bar{z}}(\bar{i}) = \bar{j} \}$$

を基本開集合とする位相が G_1 に定まる．

さらに、上の定義に現れる写像は G_0, G_1 の位相について連続になる．したがって、topological groupoid $\mathbb{G}_T$ が得られた．この $\mathbb{G}_T$ を T の *semantical groupoid* という．

Definable Sheaves

Definition

$\{\bar{x}. \varphi\} \in \mathcal{C}_T$ に対して, $\mathbb{G}_T$ 上の equivariant sheaf $[\![\varphi]\!]$ (*definable sheaf* と呼ぶ) を以下で定義:

- $[\![\varphi]\!] := \{\langle \mu, \bar{k} \rangle; \mu \in G_0, \bar{k} \in |M_\mu|^{\bar{x}}, M_\mu \models \varphi(\bar{k})\}$
- $\psi(\bar{x}, \bar{y}), \langle \bar{k}, \bar{l} \rangle \in \kappa^{\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle}$ に対して,

$$W_{\psi(\bar{k}, \bar{l})} := \{\langle \mu, \bar{k} \rangle \in [\![\varphi]\!]; \bar{l} \in |M_\mu|^{\bar{y}}, M_\mu \models \psi(\bar{k}, \bar{l})\}$$

を基本開集合とする位相が $[\![\varphi]\!]$ に定まる. さらに自然な射影 $[\![\varphi]\!] \rightarrow G_0$ について $[\![\varphi]\!]$ は G_0 上のエタール空間になる.

Definable Sheaves

Definition (Continued)

- $\rho_\varphi : \mathbb{G}_T * \llbracket \varphi \rrbracket \rightarrow \llbracket \varphi \rrbracket$ を以下で定める：

$$\rho_\varphi(\alpha, \langle \mu, \bar{k} \rangle) := \langle \nu, \alpha^{\bar{x}}(\bar{k}) \rangle \quad (\langle \mu, \bar{k} \rangle \in \llbracket \varphi \rrbracket, \alpha : \mu \xrightarrow{\sim} \nu \in G_1)$$

ここで α がモデルの同型であることと $M_\mu \models \varphi(\bar{k})$ であることから, $M_\nu \models \varphi(\alpha^{\bar{x}}(\bar{k}))$ となることに注意する. ρ_φ は連続写像になる. したがって, $\langle \llbracket \varphi \rrbracket, \rho_\varphi \rangle$ は $\mathbb{G}_T$ 上の equivariant sheaf になる.

$\llbracket \varphi \rrbracket$ について, 点 $\mu \in G_0$ 上の stalk を取ると

$$\llbracket \varphi \rrbracket_\mu = \varphi^{M_\mu}.$$

Representation Theorem

Theorem (Forssell [5, §2.3.4, §3.2.2])

coherent theory T に対し, $\mathrm{Sh}(\mathbb{G}_T)$ は classifying topos $\mathrm{Set}[T]$ と圏同値:

$$\mathrm{Sh}(\mathbb{G}_T) \simeq \mathrm{Set}[T].$$

Sketch of the Proof.

- (Step 1) $\{\bar{x}. \varphi\} \in \mathcal{C}_T$ から $\llbracket \varphi \rrbracket \in \mathrm{Sh}(\mathbb{G}_T)$ への対応は自然に関手 $\llbracket - \rrbracket : \mathcal{C}_T \rightarrow \mathrm{Sh}(\mathbb{G}_T)$ へと拡張できる.
- (Step 2) さらに $\llbracket - \rrbracket$ は, $\mathcal{C}_T$ と, definable sheaf 全体が成す $\mathrm{Sh}(\mathbb{G}_T)$ の充満部分圏 $\mathcal{D}$ との間の圏同値を与える.
- (Step 3) $\mathcal{D}$ には $\mathrm{Sh}(\mathbb{G}_T)$ から自然に位相 J が定まり, $\mathrm{Sh}(\mathcal{D}, J) \simeq \mathrm{Sh}(\mathbb{G}_T)$ となる. さらに, 上の圏同値 $\mathcal{C}_T \simeq \mathcal{D}$ によって, $(\mathcal{C}_T, J_T)$ と $(\mathcal{D}, J)$ は site として同一視される. よって, $\mathrm{Set}[T] \simeq \mathrm{Sh}(\mathcal{C}_T, J_T) \simeq \mathrm{Sh}(\mathcal{D}, J) \simeq \mathrm{Sh}(\mathbb{G}_T)$. ■

Future Work

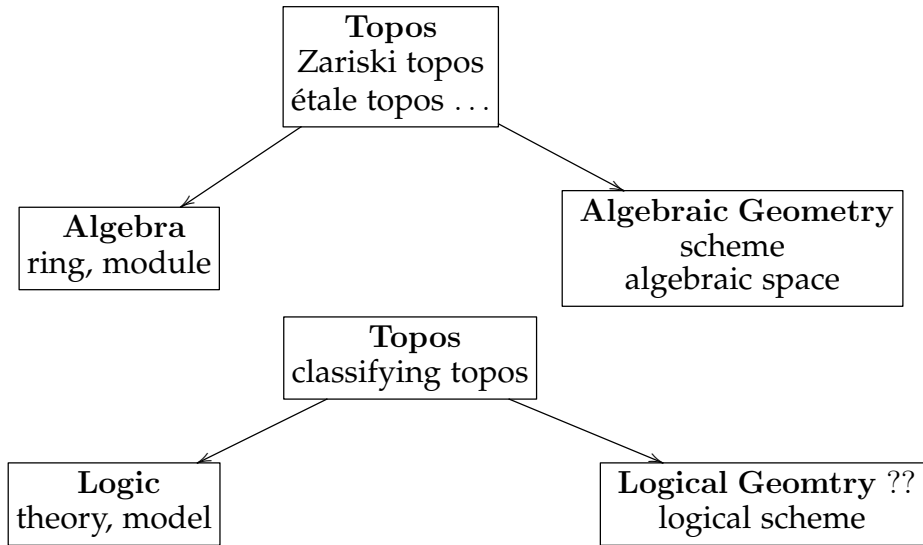
モデル理論 = 代数幾何 – 体

ここにおいて「代数幾何」は古典代数幾何の意.

⇒ 現代的な代数幾何 (*i.e.* スキーム論) の手法をモデル理論に持ち込むことができるだろうか？

Observation

- モデル理論における type は素イデアルのように振る舞う.
type 全体は Stone 空間になる.
- Stone duality と ring-affine-scheme duality の類似.



Future Work

- classifying topos の表示を用いて，理論の“数学的性質”（特にモデル理論的性質）や理論間の関係性について調べる．
(cf. “Toposes as bridges” Caramello [4])
- classifying topos を媒介することで“モデル理論のスキーム論”を展開し，代数幾何的な手法をモデル理論に持ち込む．
(cf. Breiner [3])

まとめ

- coherent category においては, Set と同様にして coherent logic の syntax と semantics が展開でき, 健全性と完全性が成り立つ. ここにおいて,
 - theory = coherent category
 - model = coherent functor
- syntactic category $\mathcal{C}_T$ から classifying topos $\text{Set}[T]$ まで考察対象を深めることで, 圏論とロジックの深い関わりがあらわになる.
- $\text{Set}[T]$ の複数の表示を用いることで, T を様々な視点 (logical/algebraic/geometric) から観察できる.
 $\rightsquigarrow T$ の “不変量” としての $\text{Set}[T]$.

参考文献 I

- [1] M. Artin, A. Grothendieck and J. L. Verdier, *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas* (SGA 4), LNM 269, 270 and 305, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1972.
- [2] S. Awodey and H. Forssell, *First-Order Logical Duality*, Annals of Pure and Applied Logic, vol. 164, pp. 319-348, 2013.
- [3] S. Breiner, *Scheme representation for first-order logic*, Ph.D. thesis, Carnegie Mellon University, 2014. Available at <http://arxiv.org/abs/1402.2600>.
- [4] O. Caramello, *The unification of Mathematics via Topos Theory*, 2010. Available at <http://arxiv.org/abs/1006.3930>.
- [5] H. Forssell, *First-Order Logical Duality*, Ph.D. thesis, Carnegie Mellon University, 2008, Available at <https://www.andrew.cmu.edu/user/awodey/students/>.

参考文献 II

- [6] P. T. Johnstone, *Sketches of an Elephant: A Topos Theory Compendium* Volumes 1 and 2, Oxford Logic Guides, vols. 43 and 44, Clarendon Press, Oxford, 2002.
- [7] S. MacLane and I. Moerdijk, *Sheaves in Geometry and Logic: A First Introduction to Topos Theory*, Universitext, Springer-Verlag, New York, 1992.
- [8] I. Moerdijk, *The Classifying Topos of a Continuous Groupoid*. I, Transactions of the American Mathematical Society, vol. 310, no. 2, pp. 629-668, 1988.