古森-鹿島の問題への導入

東京工業大学

松田 直祐

matsuda.naosuke@gmail.com

数学基礎論若手の会 2015（館山）

概 要

中間論理は，直観主義論理と古典論理の間にある論理の総称である．この資料では，中間命題論理の性質をいくつか紹介し，鹿島 [4]・古森 [5] によって与えられた中間命題論理に関する興味深い予想を紹介する．

参考文献

[1] DM Gabbay, D Skvortsov, and V Sheftman. Quantification in nonclassical logic studies in logic and the foundation of mathematics, vol. 153, 2009.

[2] Dov M Gabbay. *Semantical investigations in Heyting's intuitionistic logic*, volume 148. Springer Science & Business Media, 2013.

[3] VA JANKOV. Constructing a sequence of strongly independent superintuitionistic propositional calculi. *Soviet Mathematics*, 9:806–807, 1968.

[4] Ryo Kashima. Problems on axiomatization of intermediate propositional logics. In *Proceedings of the 39th MLG meeting at Gamagori, Japan*, pages 59–62, 2005.

[5] Yuichi Komori. Independent axiom systems of minimal formulas for classical logic. In *Proceedings of the 39th MLG meeting at Gamagori, Japan*, pages 56–58, 2005.

[6] Dirk Van Dalen. Intuitionistic logic. In *Handbook of philosophical logic*, pages 225–339. Springer, 1986.

以下の議論では，論理記号として $\to$ を持つ命題論理を扱う．つまり，論理式の全体集合 Fml は，命題変数の可算集合 P を基に以下のように定義される．

$$\alpha, \beta \in \mathrm{Fml} ::= p \mid (\alpha \to \beta) \qquad p \in \mathrm{P}$$

命題変数は p, q, r 等を用いて表し，論理式は $\alpha, \beta, \gamma, \varphi, \psi$ 等を用いて表す．$(\alpha \to (\beta \to \gamma))$ を $\alpha \to \beta \to \gamma$ と書くことがある．

α 中に現れる命題変数 $p_1, \ldots, p_n$ に $\beta_1, \ldots, \beta_n$ を同時に代入して得られる論理式を $[\beta_1/p_1, \ldots, \beta_n/p_n]\alpha$ と書く．例えば，$[\alpha \to \beta/p, p/q](p \to q \to p)$ は $(\alpha \to \beta) \to p \to \alpha \to \beta$ という論理式となる．

論理式のサイズとは，その中に現れる $\to$ の個数である．例えば，$p \to q \to p$ のサイズは 2 である．

その他の基本的概念の説明などは，最終節に簡単な紹介が書いてあるので，適宜参照ください（より詳しくは，例えば [1, 2, 6] 等を参照）．

1 中間論理

「論理」とは何であろうか？本資料では，次のように「論理」と呼ばれる概念を与える：

定義 1.1. 論理式集合 L が

($\star$1) L が modus ponens

$$\frac{\alpha \to \beta \quad \alpha}{\beta} \ (\mathrm{MP})$$

について閉じている：$\alpha \to \beta \in L$ かつ $\alpha \in L$ ならば $\beta \in L$.

($\star$2) L が命題変数への論理式の代入操作について閉じている：$\alpha \in L$ ならば $[\beta_1/p_1, \ldots, \beta_n/p_n]\alpha \in L$.

を満たす時，L を**論理**と呼ぶ [1]．

補題 1.2. A を論理式の集合とする．A を含むような最小の論理 $A^{\oplus}$ が存在する．

Proof. A_i を以下のように作る．

(0) $A_0 = A$ とする．

$(i+1)$ A_i が与えられている時，まず A^-_{i+1} を

$$A^-_{i+1} = \{\alpha \mid \alpha \text{ はある } \alpha' \in A_i \text{ 中のいくつかの命題変数に論理式を代入したもの}\}$$

[1] 今回は，ある性質を満たす論理式の集合をもって「論理」の定義を与えた．しかし，このような定義は文脈によっては不適切であることもあるようである．「論理」とは何であろうか？そのようなヤバい問題をまじめに考えることは本資料では避けて通ることにする．

とし，

$$A_{i+1} = A^-_{i+1} \cup \{\alpha \mid \beta \to \alpha, \beta \in A^-_{i+1}\}$$

とする．

この時，$A^\oplus = \bigcup_{i=0}^\infty A_i$ とすれば，これが A を含むような最小の論理となる：

$\alpha \to \beta, \alpha \in A^\oplus$ とする．この時，ある j, k に対し，$\alpha \to \beta \in A_j, \alpha \in A_k$ である．さて，

$$A_0 \subseteq A^-_1 \subseteq A_1 \subseteq A^-_2 \subseteq A_2 \subseteq \dots$$

なので，$l = \max\{j, k\}$ とすれば $\alpha \to \beta, \alpha \in A_l \subseteq A^-_{l+1}$ である．従って，$\beta \in A_{l+1} \subseteq A^\oplus$ であり，$A^\oplus$ が $(\star 1)$ を満たすことがわかる．同様にして，$A^\oplus$ が $(\star 2)$ も満たすことが確認でき，この論理式集合が論理となることが示せる．

次に，$A^\oplus$ が A を含む論理のうち最小のものであることを示す．$A^\oplus$ が A を含むことは明らか．さて，$B \supseteq A$ が論理であるとする．B が $(\star 1), (\star 2)$ を満たすことから，$A_1 \subseteq B, A_2 \subseteq B, \dots$ が順に確認でき，従って $A^\oplus \subseteq B$.

□

定義 1.3. 以下の論理式を考える．

$$(H1)\ (p \to q \to r) \to (p \to q) \to p \to r$$
$$(H2)\ p \to q \to p$$
$$(H3)\ ((p \to q) \to p) \to p$$

$(H1)$, $(H2)$ を含む最小の論理（このような論理の存在については，補題 1.2 の証明を参照）を**直観主義論理**と呼び，IL と書く．また，$(H1)$, $(H2)$, $(H3)$ を含む最小の論理を**古典論理**と呼び，CL と書く．

上では，古典論理は直観主義論理に $(H3)$ を加えることで与えられた（つまり，$\mathrm{CL} = (\mathrm{IL} \cup \{((p \to q) \to p) \to p\})^\oplus$ と与えることができる）．一方で，例えば直観主義論理に

$$((p \to (((q \to r) \to q) \to q) \to p) \to p$$

という形の論理式を加えると直観主義論理より真に強く，古典論理より真に弱い論理が出来上がる．

さて，ここで以下のような疑問が生じる．

- 古典論理と直観主義論理の間にはどのような論理が存在するのか

- 古典論理と直観主義論理の間には論理はどれだけ存在するのか（古典論理と直観主義論理の間にはどれほどの差があるのか）

このような問いを考えるために,「超直観主義論理」や「中間論理」と呼ばれる論理のクラスを考える：

定義 1.4. 論理式集合 L が，$(\star 1), (\star 2)$ に加え，

$(\star 3)$ $\mathrm{IL} \subseteq L$.

$(\star 4)$ $L \subseteq \mathrm{CL}$.

の条件を満たすとき，L は**中間論理**と呼ばれる．また，$(\star 1)$-$(\star 3)$ だけを満たすものは**超直観主義論理**と呼ばれる．

補足 1.5. 定義から，$\mathrm{IL}, \mathrm{CL}, \mathrm{Fml}$ は超直観主義論理であり，IL, CL は中間論理である．

また，$A \subseteq \mathrm{CL}$ に対して，$(\mathrm{IL} \cup A)^{\oplus}$ は当然中間論理となる．これは，A を含む最小の中間論理となる．$(\mathrm{IL} \cup A)^{\oplus}$ を $\mathrm{IL}+A$ と書く．また，$\mathrm{IL}+\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ を単に $\mathrm{IL} + \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ と書く．

さて，上に書かれた問いを,「中間論理」という言葉を用いて述べなおしておこう：

- どのような性質を持つ中間論理が存在するであろうか？
- 中間論理はどのぐらい存在するであろうか？

このような問いが中間論理研究のひとつのテーマである．

1.1 超直観主義論理についての注意

上で中間論理とともに超直観主義論理なる概念を導入したが，ここで一つ注意を与えておく：

定理 1.6. 論理 L が超直観主義論理であって，かつ中間論理でなければ，$L = \mathrm{Fml}$ である．

Proof. まず，以下の補題を用意しておく．証明は論理式のサイズに関する簡単な帰納法で確認できるので，省略する．

補題 1.7. 論理式 α の中に現れる命題変数が p のみであるとする．この時，以下のいずれかが成り立つ．

1. $\alpha \to p \in \mathrm{IL}$ かつ $p \to \alpha \in \mathrm{IL}$.
2. $\alpha \to p \to p \in \mathrm{IL}$ かつ $(p \to p) \to \alpha \in \mathrm{IL}$.

定理の証明に戻る．仮定より L の中に $\varphi \notin \mathrm{CL}$ なる φ が存在する．従って，真理値関数 h があって，$\varphi^h = \mathbf{false}$ となる [2]．α に現れない命題変数

[2] 古典論理の意味論は 0.2 小節を参照.

p をひとつ任意にとる．φ の中の命題変数のうち，$h(q) = \mathbf{true}$ なる q を $p \to p$ で置き換え，$h(r) = \mathbf{false}$ なる r を p で置き換えて得られる論理式を φ' とする．φ' の作り方から，命題変数を p だけしか含まない論理式であり，かつトートロジでない．ここから，$(p \to p) \to \varphi' \notin \mathrm{IL}$ が得られ（$(p \to p) \to \varphi' \in \mathrm{IL} \subseteq \mathrm{CL}$ ならば $\varphi' \in \mathrm{CL}$ となり，φ' がトートロジでないことに反する），先ほどの補題より $\varphi' \to p \in \mathrm{IL} \subseteq L$ である．一方，φ' は φ から命題変数への論理式の代入を用いて得られるので，$\varphi' \in L$．これを用いて $p \in L$ を得る．L は代入について閉じているので，任意の論理式 α に対し，$\alpha \in L$ となる． □

2 クリプキ意味論・代数的意味論と中間論理

上の議論では，$A \subseteq \mathrm{CL}$ に対し $\mathrm{IL} + A$ によって中間論理を与えることができることを知った．では，この他に自然な方法で中間論理を作ってみせることは出来るだろうか．一つの自然な方法はクリプキ意味論や代数的意味論[3]を利用することで与えられる．

議論に入る前に，中間論理についての以下の性質を紹介しておく：

補題 2.1. $\{L_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を中間論理のクラスとする．この時，$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} L_\lambda$ は中間論理となる．この $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} L_\lambda$ は，全ての L_λ に包含されるような最大の中間論理である．

Proof. 中間論理となることは，$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} L_\lambda$ が $(\star 1)$-$(\star 4)$ を満たすことを確認すればよい．確認は容易である．また，全ての L_λ に包含されるような中間論理の中で最大のものであることは明らか． □

定理 2.2.

(1) クリプキフレーム $\mathcal{F}$ に対し，$L_K(\mathcal{F}) = \{\alpha \mid \mathcal{F} \models \alpha\}$ は中間論理.

(2) 空でないクリプキフレームのクラス $\mathbb{F}$ に対し，$L_K(\mathbb{F}) = \{\alpha \mid$ 任意の $\mathcal{F} \in \mathbb{F}$ に対し $\mathcal{F} \models \alpha\}$ は中間論理.

Proof.

(1) まず，クリプキモデルの性質から

- $\mathcal{F} \models \alpha \to \beta$ かつ $\mathcal{F} \models \alpha$ ならば $\mathcal{F} \models \beta$
- $\mathcal{F} \models \alpha$ ならば $\mathcal{F} \models [\beta_1/p_1, \ldots, \beta_n/p_n]\alpha$

[3] クリプキモデルの定義は 0.3 小節，含意直観主義代数や含意古典代数の定義は 0.4 小節に書かれている．

は明らかなので，$L_K(\mathcal{F})$ が modus ponens や論理式の代入について閉じていることが言える．また，直観主義論理のクリプキ完全性から $\alpha \in \mathrm{IL}$ なら $\mathcal{F} \models \alpha$ であるので，$\mathrm{IL} \subseteq L_K(\mathcal{F})$ は明らか．従って，この時点で $L_K(\mathcal{F})$ が超直観主義論理であることがわかる．さらに，$\mathcal{F} \not\models p$ は明らかなので，$p \notin L_K(\mathcal{F})$．つまり，$L_K(\mathcal{F}) \subseteq \mathrm{CL}$．従って，定理 1.6 により $L_K(\mathcal{F})$ は中間論理である．

(2) $L_K(\mathbb{F}) = \bigcap_{\mathcal{F} \in \mathbb{F}} L_K(\mathcal{F})$ である．従って，補題 2.1 により $L_K(\mathbb{F})$ は中間論理である．

□

定理 2.3.

(1) 含意直観主義代数 $\mathcal{A}(\neq \emptyset)$ に対し，$L_H(\mathcal{A}) = \{\alpha \mid \mathcal{A} \models \alpha\}$ は中間論理．

(2) 含意直観主義代数のクラス $\mathbb{A}$ に対し，$L_H(\mathbb{A}) = \{\alpha \mid$ 任意の $\mathcal{A} \in \mathbb{A}$ に対し $\mathcal{A} \models \alpha\}$ は中間論理．

Proof. 上と同様. □

補足 2.4. 含意直観主義代数のクラス $\mathbb{A}$ に対し，$\mathbb{A}$ に属する含意直観主義代数が全て含意古典代数ならば $L_H(\mathbb{A}) = \mathrm{CL}$.

含意直観主義代数と中間論理の関係は特に深く，以下が成り立つ．

定理 2.5. 任意の中間論理 L に対し，$L = L_H(\mathcal{A})$ なる含意直観主義代数 $\mathcal{A}$ が存在する．

Proof. Fml 上に同値関係 $\sim$ を

$$\alpha \sim \beta \ :\Longleftrightarrow\ \alpha \to \beta \in L \text{ かつ } \beta \to \alpha \in L$$

で定める．そして，$\mathrm{Fml}/\sim$ 上で $\triangleright$ を

$$[\alpha] \triangleright [\beta] := [\alpha \to \beta]$$

で定めると，$\triangleright$ は $\mathrm{Fml}/\sim$ 上の well-defined な関数となる．すると，$\langle \mathrm{Fml}/\sim, \triangleright, [p \to p] \rangle$ は L のリンデンバウム代数と呼ばれる含意直観主義代数となり，この代数を $\mathcal{A}$ と書くと，$L = L_H(\mathcal{A})$ となる（詳しくは [1] 等を参照）． □

3 中間論理全体のなす構造

中間論理と呼ばれる論理たちの成す構造は，どのようなものであろうか？つまり，$\mathbb{I}$ を中間論理全体のクラスとした時，$\mathcal{I} = \langle \mathbb{I}, \subseteq \rangle$ という構造はどのような性質を持つのだろうか？結論から言ってしまうと，この構造は IL を最小元，CL を最大限に持つような完備束となる．以下，$\mathcal{I}$ が完備束構造になることを示し，その完備束の持つ基本的な性質を紹介する．

3.1 中間論理が形成する完備束

この小節では，$\mathcal{I}$ が完備束となることを示す．まず，以下の補題は補題 1.2 より明らかである：

補題 3.1. $\{L_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subseteq \mathbb{I}$ に対し，$\mathrm{IL}+\bigcup_{\lambda\in\Lambda} L_\lambda$ は，全ての L_λ たちを包含する最小の中間論理となる．

定理 3.2. $\mathcal{I}$ は IL を最小元，CL を最大限に持つような順序束である．

Proof. 中間論理の定義から，IL, CL が I の最小元，最大元になることは自明．また，$\{L_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subseteq I$ の上限として $\mathrm{IL}+\bigcup_{\lambda\in\Lambda} L_\lambda$，下限としてそれぞれ $\bigcap L_\lambda$ がとれる（補題 2.1，補題 3.1）． □

3.2 $\mathcal{I}$ の性質いろいろ

ここでは，$\mathcal{I}$ の性質をいくつか紹介する．

まず，$\mathcal{I}$ には 2 番目に大きな中間論理が存在する：

定理 3.3. $H_3 = \{0, 1/2, 1\}$ とし，その上の 2 項関数 $\hookrightarrow$ を

$$\begin{aligned}
&0 \hookrightarrow 0 = 1, \quad 0 \hookrightarrow \frac{1}{2} = 1, \quad 0 \hookrightarrow 1 = 1,\\
&\frac{1}{2} \hookrightarrow 0 = 0, \quad \frac{1}{2} \hookrightarrow \frac{1}{2} = 1, \quad \frac{1}{2} \hookrightarrow 1 = 1,\\
&1 \hookrightarrow 0 = 0, \quad 1 \hookrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \quad 1 \hookrightarrow 1 = 1,
\end{aligned}$$

で定める．この時，$\mathcal{H}3 = \langle H3, \hookrightarrow, 1\rangle$ は含意古典代数となる．

さらに，$L_H(\mathcal{H}3)$ は古典論理の次に大きな中間論理となる．即ち，

- $L_H(\mathcal{H}3) \subsetneq \mathrm{CL}$
- $L \neq \mathrm{CL}$ なる全ての中間論理 L に対し，$L \subseteq L_H(\mathcal{H}3)$

となる．

Proof. まず，$L_H(\mathcal{H}3) \subsetneq \mathrm{CL}$ を言う．$\mathcal{H}3$ 上の付値 $h : \mathrm{P} \to \{0, 1/2, 1\}$ を $h(p) = 1/2,\ h(q) = 0$ となるようにとれば，$(((p \to q) \to p) \to p)^h = 1/2$ となり，$\mathcal{H}3 \not\models ((p \to q) \to p) \to p$ が言える．従って，$L_H(\mathcal{H}3) \subsetneq \mathrm{CL}$.

次に，任意の $L \neq \mathrm{CL}$ に対し，$L \subseteq L_H(\mathcal{H}3)$ であることを示す．L のリンデンバウム代数（定理 2.5 参照）を $\mathcal{A} = \{\mathrm{Fml}/\sim, \triangleright, [p \to p]\}$ とする（$L_H(\mathcal{A}) = L$ であったことを思い出そう）．$\mathcal{H}3$ から $\mathcal{A}$ への埋め込み（単射準同型）h が存在することを言えば，$\mathcal{H}3 \not\models \alpha \Rightarrow \mathcal{A} \not\models \alpha$ が言え，従って $L_H(\mathcal{A}) \subseteq L_H(\mathcal{H}3)$ が得られる．このような h は，$h(0) = [p]$, $h(1/2) = [((p \to q) \to p) \to p]$, $h(1) = [p \to p]$ と与えることができる． □

また，以下のようにクリプキ意味論を用いて同じ論理を捉えることが出来る．

定理 3.4. クリプキフレーム $\mathcal{K}2 = \langle \{0,1\}, \leq \rangle$ を考える．この時，$L_K(\mathcal{K}2)$ も 2 番目に大きな中間論理となる．すなわち，$L_K(\mathcal{K}2) = L_H(\mathcal{H}3)$.

Proof. まず，以下の 2 つの補題を用意する．

補題 3.5. $\mathcal{K}2$ を基にしたクリプキモデル $\mathcal{M} = \langle \mathcal{K}2, h \rangle$ が与えられた時，$\mathcal{H}3$ 上の付値 h' を

$$h'(p) = \begin{cases} 0 & \text{if } h(p) = \emptyset \\ 1/2 & \text{if } h(p) = \{0\} \\ 1 & \text{if } h(p) = \{0,1\} \end{cases}$$

で定める．この時，任意の論理式 α に対し，

$$\alpha^{h'} = \begin{cases} 0 & \text{if } \mathcal{M}, 0 \not\models \alpha \text{ かつ } \mathcal{M}, 1 \not\models \alpha \\ 1/2 & \text{if } \mathcal{M}, 0 \not\models \alpha \text{ かつ } \mathcal{M}, 1 \models \alpha \\ 1 & \text{if } \mathcal{M}, 0 \models \alpha \text{ かつ } \mathcal{M}, 1 \models \alpha \end{cases}$$

となる．

補題 3.6. $\mathcal{H}3$ 上の付値 h が与えられた時，$\mathcal{K}2$ を基にしたクリプキモデル $\mathcal{M} = \langle \mathcal{K}2, h' \rangle$ を

$$h'(p) = \begin{cases} \emptyset & \text{if } h(p) = 0 \\ \{0\} & \text{if } h(p) = 1/2 \\ \{0,1\} & \text{if } h(p) = 1 \end{cases}$$

で定める．この時，任意の論理式 α に対し，

$$\begin{cases} \mathcal{M}, 0 \not\models \alpha \text{ かつ } \mathcal{M}, 1 \not\models \alpha & \text{if } \alpha^h = 0 \\ \mathcal{M}, 0 \not\models \alpha \text{ かつ } \mathcal{M}, 1 \models \alpha & \text{if } \alpha^h = 1/2 \\ \mathcal{M}, 0 \models \alpha \text{ かつ } \mathcal{M}, 1 \models \alpha & \text{if } \alpha^h = 1 \end{cases}$$

これらの補題は α のサイズに関する簡単な帰納法で確かめられる．さて，これらの補題が示すことは，いかの主張である．

- $\mathcal{K}2$ を基にするクリプキモデル $\mathcal{M}$ で $\mathcal{M} \not\models \alpha$ なるものがあれば，$\mathcal{H}3$ 上の付値 h で $\alpha^h \neq 1$ となるものを作ることが出来る．

- $\mathcal{H}3$ 上の付値 h で $\alpha^h \neq 1$ なるものがあれば，$\mathcal{K}2$ を基にするクリプキモデル $\mathcal{M}$ で $\mathcal{M} \not\models \alpha$ なるものを作ることが出来る．

従って，$\alpha \notin L_K(\mathcal{K}2)$ と $\alpha \notin L_H(\mathcal{H}3)$ の同値性が言える． □

さて，定理 1.6 と定理 3.3 から，以下が言える．

系 3.7. $\mathrm{IL}+\alpha=\mathrm{CL}$ となる必要十分条件は，α がトートロジかつ $\mathcal{H}3 \not\models \alpha$ となること．

また，$\mathrm{IL} \subsetneq \mathrm{IL}+\alpha \subsetneq \mathrm{CL}$ となる必要十分条件は，

- α がトートロジ
- $\alpha \notin \mathrm{IL}$（例えば，$\mathcal{F} \not\models \alpha$ なるクリプキフレーム $\mathcal{F}$ の存在で確かめられる）
- $\mathcal{H}3 \models \alpha$

を満たすことである．

一方，２番目に小さい中間論理は存在しない：

定理 3.8. 任意の中間論理 $L \supsetneq \mathrm{IL}$ に対し，$\mathrm{IL} \subsetneq J \subsetneq L$ を満たす J が存在する．

Proof. $\mathrm{IL} \supsetneq L$ より，$\varphi \in L \setminus \mathrm{IL}$ を取ってくることが出来る．ここで，p を φ に現れない命題変数とし，$J=\mathrm{IL}+((p\to\varphi)\to p)\to p$ とする．この J が $\mathrm{IL} \subsetneq J \subsetneq L$ を満たす．以下，そのことを確かめる．

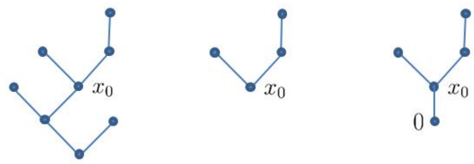

図 1: $\mathcal{G}$（左），$\mathcal{G}'$（中央），$\mathcal{G}''$（右）

1. $J \subsetneq L$

   まず，$\varphi \to ((p\to\varphi)\to p)\to p \in \mathrm{IL} \subseteq L$ が以下の **LJ**-証明図[4] により確かめられる．

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi}{p,\varphi \Rightarrow \varphi}\,(\text{Weakening})}{\varphi \Rightarrow p\to\varphi}\,(\mathrm{R}\to) \qquad p \Rightarrow p}{(p\to\varphi)\to p, \varphi \Rightarrow p}\,(\mathrm{L}\to)}{\varphi \Rightarrow ((p\to\varphi)\to p)\to p}\,(\mathrm{R}\to)}{\Rightarrow \varphi \to ((p\to\varphi)\to p)\to p}\,(\mathrm{R}\to)
$$

   従って，$\varphi \in L$ と合わせて $((p\to\varphi)\to p)\to p \in L$ を得る．故に，$J \subseteq L$.

[4] **LJ** については，0 章に説明が書かれている．

次に，$J \neq L$ を示す．$\varphi \notin \mathrm{IL}$ より，$\mathcal{G} \not\models \varphi$ なる有限クリプキフレーム $\mathcal{G} = \langle W, \leq \rangle$ が存在する．S は有限なので，

$\{w \in W \mid w, \mathcal{M} \not\models \varphi$ なる $\mathcal{G}$ を基にするクリプキモデル $\mathcal{M}$ が存在する$\}$

には極大元 x_0 が存在する．これを用い，新しいクリプキフレーム $\mathcal{G}' = \langle W', \leq' \rangle$ を，

$$W' = \{w \in W \mid x_0 \leq w\}$$

$$w_1 \leq' w_2 \iff w_1, w_2 \in W' \text{ かつ } w_1 \leq w_2$$

で与える（図 1）．x_0 の取り方から，$\mathcal{G}'$ は以下のような性質を持つ．

- $\mathcal{G}'$ を基にするあるクリプキモデル $\mathcal{N}$ があって，$x_0, \mathcal{N} \not\models \varphi$.
- $x_0 \neq y \in W'$ ならば，$\mathcal{G}'$ を基にするどんなクリプキモデル $\mathcal{M}$ に対しても，$y, \mathcal{M} \models \varphi$.

さて，この性質から $\mathcal{G}' \models ((p \to \varphi) \to p) \to p$ が言え，$J = \mathrm{IL} + ((p \to \varphi) \to p) \to p \subseteq L_K(\mathcal{G}')$ となる．一方，$\mathcal{G}' \not\models \varphi$ より，$L \ni \varphi \notin L_K(\mathcal{G}')$. 従って，$J \neq L$.

2. $\mathrm{IL} \subsetneq J$

   $\mathrm{IL} \subseteq \mathrm{IL} + ((p \to \varphi) \to p) \to p = J$ は明らかなので，$\mathrm{IL} \neq J$ を言えばよい．まず，上で作った $\mathcal{G}'$ を使って新しいクリプキフレーム $\mathcal{G}'' = \langle W'', \leq'' \rangle$ を，

$$W'' = W' \cup \{0\}$$

$$w_1 \leq'' w_2 \iff w_1 \leq' w_2 \text{ または } w_1 = 0$$

   で与える（図 1）．ここで，クリプキモデル $\mathcal{M} = \langle \mathcal{G}'', h \rangle$ を

$$\mathcal{M}, x_0 \not\models \varphi$$

$$h(p) = W'' \setminus \{0\}$$

   を満たすようにとれば，$\mathcal{M}, 0 \not\models ((p \to \varphi) \to p) \to p$. 従って，$((p \to \varphi) \to p) \to p \notin \mathrm{IL}$ が言え，$\mathrm{IL} \neq J$ となる．

□

系 3.9. 論理式の可算列 $\psi_1, \psi_2, \dots \in \mathrm{CL}$ で $\mathrm{CL} \supsetneq \mathrm{IL} + \psi_1 \supsetneq \mathrm{IL} + \psi_2 \supsetneq \dots$ となるものが存在する．

Proof. 命題変数の可算列 $q, p_0, p_1, p_2, \dots$ を用意し，$\psi_0 \equiv ((p_0 \to q) \to p_0) \to p_0$，$\psi_{i+1} \equiv ((p_{i+1} \to \psi_i) \to p_{i+1}) \to p_{i+1}$ とすればよい． □

3.3 中間論理の個数

はじめに挙げられた問いの一つ「どれほど多くの中間論理が存在するのか」については，Jankov により一つの答えが与えられた：

定理 3.10. 非可算個の中間論理が存在する．

証明は Jankov [3] により与えられている（らしい）が，ここでは省略する（正直に言うと，人に説明できるほど証明を理解できていない...）．

4 古森-鹿島の問題：古典論理と直観主義論理の差

系 3.9 では，中間論理の無限下降列を具体的に与えている．その際用いられた ψ_i は, 古典論理で証明可能な論理式 $((p \to q) \to p) \to p$ に別の論理式を代入することで与えられていた．一般に，古典論理で証明可能な論理式 φ のある代入例 φ' に対し，$\mathrm{IL} + \varphi$ が中間論理となることは明らかである．また，φ' が φ から論理式の代入で得られる時，中間論理の性質 $(\star 2)$ により，$\mathrm{IL} + \varphi \supseteq \mathrm{IL} + \varphi'$ となることは明らかである．

論理式間の関係 $\sqsubseteq, \sqsubset$ を

$$\alpha \sqsubseteq \beta \ :\Longleftrightarrow\ \beta \text{ は } \alpha \text{ に論理式を代入して得られる}$$

$$\alpha \sqsubset \beta \ :\Longleftrightarrow\ \alpha \sqsubseteq \beta \text{ であり}, \beta \sqsubseteq \alpha \text{ でない}$$

と入れる．上の議論から，より強い中間論理を作りたい時には，$\sqsubset$ の意味で小さい論理式を IL に加えればよいことがわかる．ここで，以下の疑問が生じる [5] ：

問題 4.1 (古森-鹿島の問題). 論理式 α が $\alpha \in \mathrm{CL}$ かつ

$$\text{全ての } \beta \in \mathrm{CL} \text{ に対し}, \beta \not\sqsubset \alpha$$

を満たす時 α **は古典論理で極小**であると言う．

$\varphi \in \mathrm{CL} \setminus \mathrm{IL}$ が古典論理で極小ならば，$\mathrm{IL} + \varphi = \mathrm{CL}$ となるか？

古典論理の部分論理を古典論理で極小な論理式のみを用いて与えることは非常に自然である．例えば，直観主義論理や BCK 論理など，証明論的にきれいな性質をもつ論理の多くは実際に極小な論理式のみを用いて公理化されている．Jankov によって，古典論理と直観主義論理の間には非常に大きな差があるということがある意味で示されたのであるが，上の問題は「（ある意味では）直観主義論理は古典論理のすぐ下の論理なのではないか」という問いになっていることが読み取れよう．中間論理研究のひとつのテーマが「古典論理と直観主義論理の差はどれほど大きいのか」という点にあるのであれば，上の問題はとても重要な問題である（と私は理解している）．

[5] この問題は [4] により与えられた問題である．[4] の問題の基となったものは，[5] により与えられた問題である．[5] では，BCK 論理以上の論理を対象に考えられている．

補足 4.2. 今回，論理記号は $\to$ のみを用いて議論を行ってきた．それは以下の理由による：

論理記号として $\vee, \neg$ を含むと，例えば $\neg(p \vee q) \to (\neg p \vee \neg q)$ という論理式が上の問いの反例となっていることがわかる．しかし，この例は $\neg$ の代わりに $\perp$ を用いて書き換えると反例になっていない．$(p \vee q \to \perp) \to ((p \to \perp) \vee (q \to \perp))$ には $(p \vee q \to r) \to ((p \to r) \vee (q \to r))$ という（$\sqsubset$ の意味で）より小さい論理式が存在するのである．上の $\neg$ を用いた反例は,「$p \to \perp$ が $p \to r$ の代入例である」という事実を $\neg p$ という省略記法で隠してしまっている状況であり，あまり本質的でない．その他の論理記号に関しても，上と同じように「論理式の極小性」という概念の本質を崩してしまうことがあるため好ましくない．従って,「論理式の極小性」の本質的な性質を調べるためには，言語として $\to$ のみを用いて考えるのが適当である．

4.1 問題の現状

この問題については有効な手法が与えられていないのが現状である（[4] では，上の問題に対して構文論的な証明方針が提案されているが未だ未解決）．しかし，具体的に与えられた α に対しては,「$\mathrm{IL} + \alpha = \mathrm{CL}$ であるか？」や「α が古典論理で極小であるか？」といった問題が決定可能であることを述べておく．

補題 4.3. 与えられた α に対し,「$\mathrm{IL} + \alpha = \mathrm{CL}$ であるか？」という問題は決定可能.

Proof. 系 3.7 から，α がトートロジかつ $\mathcal{H}3 \not\models \alpha$（あるいは $\mathcal{K}2 \not\models \alpha$）であることと，$\mathrm{IL} + \alpha = \mathrm{CL}$ であることが同値であることがわかる．α のトートロジ判定はもちろん決定可能．$\mathcal{H}3 \not\models \alpha$ の判定も有限の表で計算できる [6]． □

補題 4.4. 与えられた α に対し,「α が古典論理で極小であるか？」という問題は決定可能.

Proof. α が古典論理で極小でないという状況は，以下の状況である．

α のある $\underline{\text{部分論理式 } \beta}$ があって，以下のいずれかを満たす．

- β のサイズが 2 以上であり，α に現れる $\underline{\text{いくつかの } \beta \text{ の出現}}$ を α に現れない命題変数 q で置き換えたものがトートロジとなる．
- β が α 中に $i(\geq 2)$ 個現れる命題変数であり，その内の $i-1$ 以下の箇所を新しい命題変数 r で置き換えたものがトートロジとなる．

[6] α に現れる命題変数の個数を n とすれば，3^n マスの表で確かめられよう．従って，おおよそトートロジ判定と同等のコスト（こんなことを言うと専門家に怒られるかもしれません）で確認ができる．

従って，極小であるかどうかの判定は,「部分論理式 β」と「いくつかの β の出現」という部分を全てしらみつぶしに動かして確認していくことで判定できる．もちろんこれらの動かし方は有限通りである． □

0 事前知識

0.1 古典論理と直観主義論理のシーケント計算体系

定義 0.1 (古典論理と直観主義論理のシーケント計算体系)**.** Γ, Δ を論理式の有限集合とした時，$\Gamma \Rightarrow \Delta$ という表現を**シーケント**と呼ぶ．以下，シーケントの上では $\Gamma \cup \Delta$ を Γ, Δ と書き，$\{\alpha\}$ を単に α と書く．また，空集合 $\emptyset$ は省略して書かないこともある．従って，例えば，$\emptyset \Rightarrow \Gamma \cup \{\alpha\}$ というシーケントを $\Rightarrow \Gamma, \alpha$ と書く．

古典論理のシーケント計算体系 **LK** は，$\alpha \Rightarrow \alpha$ および $\bot \Rightarrow \alpha$ という形のシーケントを公理として持ち，以下の推論規則を持ったシステムである．

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \quad \alpha, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta} \text{ (Cut)} \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma', \Gamma \Rightarrow \Delta, \Delta'} \text{ (Weakening)}$$

$$\frac{\alpha, \Gamma \Rightarrow \Delta, \beta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \to \beta} \text{ (R} \to\text{)} \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \quad \beta, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\alpha \to \beta, \Gamma \Rightarrow \Delta} \text{ (L} \to\text{)}$$

直観主義論理のシーケント計算体系 **LJ** は **LK** と同様の公理と推論規則を持ったシステムであるが,「扱うシーケントの右辺が常に空か単元集合となっている」という制限が付く．

シーケント計算の体系 S で，$\Gamma \Rightarrow \Delta$ が証明できる時，$S \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ と書く．また，$S \vdash \emptyset \Rightarrow \alpha$ を $S \vdash \alpha$ と書く．

0.2 古典論理の二値意味論

定義 0.2. h が各命題変数に対して **true** または **false** を割り当てる関数である時，h を真理値関数と呼ぶ．

真理値関数 h が与えられた時，以下の規則に従って，$\alpha^h \in \{\mathbf{true}, \mathbf{false}\}$ を定める．

1. $p^h = h(p)$
2. $(\alpha \to \beta)^h = \mathbf{true}$ if $\alpha^h = \mathbf{false}$ or $\beta^h = \mathbf{true}$

任意の真理値関数 h に対して $\alpha^h = \mathbf{true}$ となる α は**トートロジ**と呼ばれる．

定理 0.3 (古典論理の完全性)**.** φ がトートロジであることと $\varphi \in \mathrm{CL}$ であることは同値．

0.3　クリプキ意味論

定義 0.4 (クリプキモデル)**.** 最小元を持った半順序集合 $\langle W, \leq\rangle$ を**クリプキフレーム**と呼ぶ．W の元は**可能世界**と呼ばれる．

クリプキフレーム $\mathcal{F} = \langle W, \leq\rangle$ に対し，組 $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, h\rangle$ が（$\mathcal{F}$ を基にした）**クリプキモデル**であるとは，h が P から 2^W への関数であり，

$$\forall p \in \mathrm{P},\ w \leq v \text{ かつ } w \in h(p) \implies v \in h(p)$$

という性質（**遺伝性**）を満たす時である．このような h は付値と呼ばれる．クリプキモデル $\mathcal{M} = \langle\langle W, \leq\rangle, h\rangle$ が与えられたとき,「可能世界 w で α が正しい」という関係 $\mathcal{M}, w \models \alpha$ を以下のように帰納的に与える．

1. $\mathcal{M}, w \models p \iff w \models p$
2. $\mathcal{M}, w \models \alpha \to \beta \iff$ 任意の $v \geq w$ に対し,$\mathcal{M}, v \models \alpha$ ならば $\mathcal{M}, v \models \beta$

クリプキモデル $\mathcal{M} = \langle\langle W, \leq\rangle, \models\rangle$ に対し，任意の $w \in W$ に対し $\mathcal{M}, w \models \alpha$ となる時，論理式 α は $\mathcal{M}$ で恒真であると言い，$\mathcal{M} \models \alpha$ と書く．クリプキフレーム $\mathcal{F} = \langle W, \leq\rangle$ に対し，$\mathcal{F}$ を基にする任意のクリプキモデル $\mathcal{M}$ で $\mathcal{M} \models \alpha$ となる時，α は $\mathcal{F}$ で恒真であると言い，$\mathcal{F} \models \alpha$ と書く．

定理 0.5 (直観主義論理のクリプキ完全性)**.** 以下の条件は同値.

- $\alpha \in \mathrm{IL}$.
- 任意のクリプキフレーム $\mathcal{F}$ に対し，$\mathcal{F} \models \alpha$.
- 任意の有限クリプキフレーム $\mathcal{F}$ に対し，$\mathcal{F} \models \alpha$.

また，以下の定理は定理 0.3 から明らかである．

定理 0.6. 以下の 2 条件は同値.

- $\alpha \in \mathrm{CL}$.
- $\langle \{a\}, =, a\rangle \models \alpha$.

0.4　含意古典代数と含意直観主義代数

定義 0.7 (含意古典代数･含意直観主義代数)**.** M を台集合とする構造 $\langle M, \triangleright, 1\rangle$ が**含意古典代数**であるとは，1 が M の元，$\triangleright$ が M 上の 2 項関数であり

- $x \neq 1$ なる M の元 x が存在する．
- $1 \triangleright x = x$ for each $x \in M$.

- $x \triangleright 1 = 1$ for each $x \in M$.
- $(x \triangleright y \triangleright z) \triangleright (x \triangleright y) \triangleright x \triangleright z = 1$ for each $x, y, z \in M$.
- $x \triangleright y \triangleright x = 1$ for each $x, y \in M$.
- $((x \triangleright y) \triangleright x) \triangleright x = 1$.

を満たす時をいう[7]．また，最初の 5 項目を満たす構造を**含意直観主義代数**と呼ぶ.

含意直観主義代数 $\mathcal{A} = \langle M, \triangleright, 1 \rangle$ と関数 $h : \mathrm{P} \to M$（$\mathcal{A}$ 上の付値と呼ばれる）が与えられた時，論理式 α に対し $\alpha^h \in M$ を以下のように定める.

1. $p^h = h(p)$
2. $(\alpha \to \beta)^h = \alpha^h \triangleright \beta^h$

全ての $h : \mathrm{P} \to M$ に対し $\alpha^h = 1$ となる時，α は $\mathcal{A}$ で恒真であると言い，$\mathcal{A} \models \alpha$ と書く.

定理 0.8 (古典論理と含意古典代数)**.** 台集合を $\mathrm{TF} = \{\mathbf{true}, \mathbf{false}\}$ とし，その上に

$$x \triangleright y \ :\Longleftrightarrow\ x = \mathbf{false} \ \text{ or } \ y = \mathbf{true}$$

で $\triangleright$ を定める．この時，$\mathcal{TF} = \langle \mathrm{TF}, \triangleright, \mathbf{true} \rangle$ は含意古典代数.

また，以下の条件は同値.

- $\alpha \in \mathrm{CL}$.
- 任意の含意古典代数 $\mathcal{A}$ に対し，$\mathcal{A} \models \alpha$.
- 2 値の含意古典代数 $\mathcal{TF}$ に対し，$\mathcal{TF} \models \alpha$.

定理 0.9 (直観主義論理と含意直観主義代数)**.** 以下の条件は同値.

- $\alpha \in \mathrm{IL}$.
- 任意の含意代数 $\mathcal{A}$ に対し，$\mathcal{A} \models \alpha$.
- 任意の有限含意直観主義代数 $\mathcal{A}$ に対し，$\mathcal{A} \models \alpha$.

[7] 最後の 5 項目を満たすものを含意古典代数と呼ぶ流儀も存在する．また，含意古典代数という言葉はあまり一般的なものではないので注意.