線形代数 II の要綱と問題集（2013 年秋学期，地球学類）

坂井公 (筑波大学 数理物質系 数学専攻)

2014 年 1 月 22 日

目次

記法等

数やその集合

$\mathbb{N}$	自然数の全体 (0 も含まれるものとする)
$\mathbb{Z}$	整数の全体
$\mathbb{Q}$	有理数の全体
$\mathbb{R}$	実数の全体
$\mathbb{C}$	複素数の全体
i	虚数単位 $\sqrt{-1}$
$[a..b]$	閉区間 $\{x \mid a \leqq x \leqq b\}$ (他と混用の多い $[a,b]$ は避ける)
$(a..b)$	開区間 $\{x \mid a < x < b\}$ (他と混用の多い (a,b) は避ける)
$(a..b]$	半開区間 $\{x \mid a < x \leqq b\}$
$[a..b)$	半開区間 $\{x \mid a \leqq x < b\}$
$\lfloor x \rfloor$	x を超えない最大の整数 (混用の多いガウスの記号 $[x]$ は避ける)
$\lceil x \rceil$	x 以上の最小の整数
$\Re(z)$，$\Im(z)$	複素数 z の実数部と虚数部 (すなわち $z = \Re(z) + \Im(z)\mathrm{i}$ である)
$\overline{z}$	複素数 z の共役 $\Re(z) - \Im(z)\mathrm{i}$
$\log x$	常用対数 $\log_{10} x$
$\ln x$	自然対数 $\log_e x$
$\lg x$	底を 2 とする対数 $\log_2 x$

集合や関数

$\#X$	集合 X の要素数
Y^X	集合 X から集合 Y への関数の全体
2^X	(上の記号の流用) 集合 X の部分集合の全体
$\mathbf{id}_X$	X から X への恒等関数
$[P]$	Iverson の記法 (下記参照)
K	一般の体（本ノートの範囲では，$\mathbb{R}$ か $\mathbb{C}$ と考えてよい。）
$K[x]$	変数 x についての K 係数多項式の全体
$K[x]_n$	変数 x についての n 次以下の K 係数多項式の全体

P を任意の命題とするとき，Iverson の記号 $[P]$ は，P が真なら $[P] \overset{\text{def}}{=} 1$，$P$ が偽なら $[P] \overset{\text{def}}{=} 0$ と定義される。例えば，$[1 < 2] = 1$，$[4 \text{ は素数}] = 0$ である。また，クロネッカーの δ は，$\delta_{ij} = [i = j]$ と書ける。

行列とベクトルやその成分

$\vec{x}, \vec{y}$ など	（普通は列）ベクトル
$\vec{e}_i$	基本ベクトル（一般には基底ベクトル）
$\vec{0}$	ゼロベクトル
$\mathrm{M}(m, n; K)$	体 K の要素を成分とする m 行 n 列の行列全体。$K^{m\times n}$ と記すことも多い。 （K は本ノートの範囲では，$\mathbb{R}$ か $\mathbb{C}$ と考えてよい。）
$A[i, j]$	行列 A の i, j 成分
E	単位行列（すなわち $\mathrm{E}[i, j] = [i = j]$ である）
E_n	n 次単位行列（すなわち $\mathrm{E}_n = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ ）
O	零行列（すなわち $O[i, j] = 0$ である）
$\mathrm{O}_{m,n}$	m 行 n 列の零行列
$\mathrm{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$	対角成分が $a_1, a_2, \ldots, a_n$ である n 次対角行列。 すなわち $\mathrm{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n)[i, j] = [i = j]a_i$
$A^\top$	行列 A の転置 (すなわち $A^\top[i, j] = A[j, i]$
$\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle$	ベクトル $\vec{x}$ と $\vec{y}$ の内積 (混用の多い $(\vec{x}, \vec{y})$ や $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ などの記法は避ける)
$\mathrm{Span}(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_r)$	有限個のベクトル $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_r$ が生成する部分空間
$\mathrm{Span}(S)$	ベクトルの集合 S が生成する部分空間
$V_f(\lambda)$	固有値 λ に属する f の固有空間
$W_f(\lambda)$	固有値 λ に属する f の広義固有空間 (一般固有空間)
$\mathrm{Hom}(V, W)$	ベクトル空間 V からベクトル空間 W への線形写像の全体
$\mathrm{End}(V)$	ベクトル空間 V 上の線形写像の全体，すなわち $\mathrm{Hom}(V, V)$

ベクトルを表すのに $\mathbf{e}$ や $\mathbf{x}$ のような太字を用いている教科書も多いが，本稿では矢印つきの文字を用いる。

縦ベクトルは，紙面の節約のために，しばしば横ベクトルの転置として表記する。たとえば $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ は $(a, b)^\top$ と書くことが多い。

$\mathrm{Span}(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_r)$ や $\mathrm{Span}(S)$ は，教科書のように $\langle \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_r \rangle$ や $\langle S \rangle$ と書く流儀もあるが，混乱しやすいので本稿では用いない。

5 数ベクトル空間上の線形写像

5.1 線形写像と行列

定義 5.1 (数ベクトル空間上の線形写像)**.**
K^m と K^n をそれぞれ K 上のベクトル空間とする。K^m から K^n への写像 f が**線形**であるとは，f が任意の $\vec{x}, \vec{y} \in K^m$，$k \in K$ に対して，次を満たすことをいう。

(LM1) $f(\vec{x}+\vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$
(LM2) $f(k\vec{x}) = kf(\vec{x})$

K^m から K^n への線形写像の全体を $\mathrm{Hom}(K^m, K^n)$ と記す。また K^m から K^n 自身への線形写像の全体，すなわち $\mathrm{Hom}(K^m, K^m)$ を $\mathrm{End}(K^m)$ と記す。

任意の m 項数ベクトル $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_m)^\top \in K^m$ は，基本ベクトル $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_m$ を用いて，

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_m\vec{e}_m$$

と書ける。したがって，$f \in \mathrm{Hom}(K^m, K^n)$ ならば

$$f(\vec{x}) = x_1 f(\vec{e}_1) + \cdots + x_m f(\vec{e}_m)$$

である。このことは，さらに行列 $(f(\vec{e}_1), \ldots, f(\vec{e}_m))$ を A とおけば，$f(\vec{x}) = A(x_1, \ldots, x_m)^\top = A\vec{x}$ と書けることを意味する。逆に行列 $A \in \mathrm{M}(n, m; K)$ を用いて，写像 $L_A : K^m \to K^n$ を $L_A(\vec{x}) \overset{\text{def}}{=} A\vec{x}$ と定義すると，L_A は明らかに線形写像となる。

定義 5.2 (線形写像の行列表示)**.**
$f \in \mathrm{Hom}(K^m, K^n)$ とすると，$A \in \mathrm{M}(n, m; K)$ がただ一つ存在して $f = L_A$ となる。この行列 A を線形写像 f の**行列表示**という。

問題 5.1 (恒等写像，零写像の行列表示)**.**
恒等写像 $\mathbf{id}_{K^n}$ と零写像 $\mathbf{0} : \vec{x}\ (\in K^n) \longmapsto \vec{0}\ (\in K^m)$ の行列表示を求めよ。
解答例 恒等写像 $\mathbf{id}_{K^n}$ の行列表示は単位行列 E_n であり，零写像の行列表示は零行列 $\mathrm{O}_{m\times n}$ である。実際，任意のベクトル $\vec{x} \in K^n$ に対して

$$\mathbf{id}_{K^n}(\vec{x}) = \vec{x} = \mathrm{E}_n\vec{x}, \quad \mathbf{0}(\vec{x}) = \vec{0} = \mathrm{O}_{m\times n}\vec{x}$$

である。 □

問題 5.2 (合成写像の行列表示)**.**
f を K^m から K^l への線形写像，g を K^n から K^m への線形写像とする。f と g の行列表示をそれぞれ F と G とするとき，合成写像 $f \circ g$ の行列表示を求めよ。
解答例 任意のベクトル $\vec{x} \in K^n$ に対して

$$(f \circ g)(\vec{x}) = f(g(\vec{x})) = f(G\vec{x}) = FG\vec{x}$$

だから，$f \circ g$ の行列表示は FG である。 □

問題 5.3 (行列表示)**.**
次の線形写像 f の行列表示を求めよ。

(a) $f((x_1,\,x_2,\,x_3)^\top) = (x_1 - 5x_2,\,2x_1 + 7x_2 - x_3,\,-4x_2 + 9x_3)^\top$
(b) $f((x_1,\,x_2,\,x_3)^\top) = (x_2 - 7x_3,\,2x_1 - 5x_2)^\top$
(c) $f((x_1,\,x_2)^\top) = (2x_1 - x_2,\,5x_1 + 7x_2,\,-3x_2)^\top$
(d) $f((x_1,\,x_2,\,x_3)^\top) = (x_1 - 2x_2 + 3x_3,\,5x_1 - 7x_2 + 4x_3)^\top$

解答例　これは，定義により直ちに

$$\text{(a)}\ \begin{pmatrix}1 & -5 & 0\\ 2 & 7 & -1\\ 0 & -4 & 9\end{pmatrix}\quad \text{(b)}\ \begin{pmatrix}0 & 1 & -7\\ 2 & -5 & 0\end{pmatrix}\quad \text{(c)}\ \begin{pmatrix}2 & -1\\ 5 & 7\\ 0 & -3\end{pmatrix}\quad \text{(d)}\ \begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 5 & -7 & 4\end{pmatrix}$$

□

問題 5.4 (線形写像の行列表示)**.**
写像 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$，$g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ を

$$f(x_1,x_2,x_3)^\top = (x_1 + x_2 + 2x_3, x_1 - x_2)^\top,\quad g(x_1,x_2)^\top = (-x_1 + 2x_2, x_1 + x_2)^\top,$$

と定義する。

(a) f，g が線形写像であることを示せ。
(b) f，g の行列表示を求めよ。
(c) $g\circ f$ の行列表示を求めよ。

問題 5.5 (線形写像の行列表示)**.**
次の定義される写像 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$，$g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ が線形でないことを示せ。

$$f(x_1,x_2,x_3)^\top = (x_2 + x_3, x_1 - x_2 + 3)^\top,\quad g(x_1,x_2)^\top = ({x_1}^2 + 2x_2, x_1 + x_2)^\top,$$

問題 5.6 (行列表示)**.**
$\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への次の関数 f,g,h に対して $f\circ g, f\circ h, g\circ h$ を求めよ。$f,g,h,f\circ g,f\circ h,g\circ h$ を線形写像か非線形写像かに分類し，線形写像については (標準基底に関する) その行列表示を求めよ。

$$f\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}xy\\ x+y\end{pmatrix},\quad g\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+y\\ x-y\end{pmatrix},\quad h\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+2y\\ 0\end{pmatrix}$$

解答例

$$f\circ g\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x^2-y^2\\ 2x\end{pmatrix},\quad f\circ h\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ x+2y\end{pmatrix},\quad g\circ h\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+2y\\ x+2y\end{pmatrix}$$

f は非線形，g は線形で行列表示は $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$，$h$ は線形で行列表示は $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，$f\circ g$ は非線形，$f\circ h$ は線形で行列表示は $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$，$g\circ h$ は線形で行列表示は $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ である。 □

問題 5.7 (線形写像の和とスカラー倍，行列表示)**.**
$f, g \in \mathrm{Hom}(K^n, K^m)$ と $k \in K$ に対して，和 $f+g$ とスカラー倍 kf を

$$(f+g)(\vec{x}) \stackrel{\text{def}}{=} f(\vec{x}) + g(\vec{x}), \quad (kf)(\vec{x}) \stackrel{\text{def}}{=} kf(\vec{x})$$

で定義すると， $f+g, kf \in \mathrm{Hom}(K^n, K^m)$ であることを示せ。f と g の行列表示を，それぞれ F と G とするとき，$f+g$ と kf の行列表示を求めよ。

問題 5.8 (回転の行列表示，加法定理)**.**
平面の回転運動の合成により三角関数の加法定理

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta, \quad \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

を証明せよ。

解答例　原点を中心とする角度 α，β の回転は，それぞれ $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$ と行列表示される。それらの合成は，角度 $\alpha+\beta$ の回転であり，線形写像の合成の行列表示は，各行列表示の積となるから

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix}\end{aligned}$$

である。よって，両辺の成分を比較すれば，

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

である。 □

5.2　部分空間，線形写像の核と像

定義 5.3 (数ベクトル空間上の線形写像)**.**
W を K^m の部分集合とする。W が K^m の（線形）**部分空間**であるとは，W が次を満たすことをいう。

(SS0)　$\vec{0} \in W$ である。
(SS1)　$\vec{x} \in W$，$\vec{y} \in W$ ならば $\vec{x}+\vec{y} \in W$ である。
(SS2)　$k \in K, \vec{x} \in W$ ならば $k\vec{x} \in W$ である。

定義 5.4 (線形写像の像と核)**.**
$f \in \mathrm{Hom}(K^m, K^n)$ とする。f の像 $\mathrm{Im}\, f$ と核 $\mathrm{Ker}\, f$ を次のように定義する。

$$\mathrm{Im}\, f \stackrel{\text{def}}{=} f(K^m) = \{f(\vec{x}) \mid \vec{x} \in K^m\}, \qquad \mathrm{Ker}\, f \stackrel{\text{def}}{=} f^{-1}(\vec{0}) = \{\vec{x} \mid f(\vec{x}) = \vec{0}\}$$

定理 5.5 (線形写像の核と像)**.**
$f \in \mathrm{Hom}(K^m, K^n)$ とする。

(a) $\mathrm{Im}\, f$ は K^n の部分空間である。
(b) $\mathrm{Ker}\, f$ は K^m の部分空間である。
(c) f が単射であるための必要十分条件は $\mathrm{Ker}\, f = \{\vec{0}\}$ である。
(d) f が全射であるための必要十分条件は $\mathrm{Im}\, f = K^n$ である。

問題 5.9 (恒等写像と零写像の像と核)**.**

(a) $f(\vec{0}) = \vec{0}$ である。
(b) $\mathrm{Im}\, f$ は K^m の部分空間である。
(c) $\mathrm{Ker}\, f$ は K^n の部分空間である。
(d) f が単射であるための必要十分条件は，$\mathrm{Ker}\, f = \{\vec{0}\}$ となることである。

解答例

(a) $f(\vec{0}) = f(0\,\vec{0}) = 0f(\vec{0}) = \vec{0}$
(b)
(c)
(d)

□

問題 5.10.
恒等写像 $\mathbf{id}_{K^n}$，零写像 $\mathbf{0} : K^n \longrightarrow K^m$ の像 $\mathrm{Im}(\mathbf{id}_{K^n})$，$\mathrm{Im}\,\mathbf{0}$ と核 $\mathrm{Ker}(\mathbf{id}_{K^n})$，$\mathrm{Ker}\,\mathbf{0}$ を求めよ。
解答例 $\mathrm{Im}(\mathbf{id}_{K^n}) = K^n$，$\mathrm{Im}\,\mathbf{0} = \{\vec{0}\}$，$\mathrm{Ker}(\mathbf{id}_{K^n}) = \{\vec{0}\}$，$\mathrm{Ker}\,\mathbf{0} = K^n$ である。 □

問題 5.11.
次の線形写像 f の核と像求めよ。

(a) $f((x_1,\, x_2,\, x_3)^\top) = (2x_1 + x_3,\, -x_1 + x_2,\, x_1 + x_2 + x_3)^\top$
(b) $f((x_1,\, x_2)^\top) = (x_1 + x_2,\, x_1,\, x_1 - x_2)^\top$
(c) $f((x_1,\, x_2)^\top) = (2x_1 - x_2,\, 5x_1 + 7x_2,\, -3x_2)^\top$
(d) $f((x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4)^\top) = (x_3 + x_4,\, x_1 + x_4,\, x_1 - x_3)^\top$

問題 5.12 (線形写像)**.**
$f((x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top) = k_1x_1 + k_2x_2 + \cdots + k_nx_n + k$ で定義される一次関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が線形変換になるための必要十分条件を与えよ。
解答例 f が線形写像ならば

$$0 = f(\vec{0}) = f((0, 0, \ldots, 0)^\top) = k_1 0 + k_2 0 + \cdots + k_n 0 + k = k$$

を満たさねばならないので，$k=0$ であることが必要だ。逆に $k=0$ ならば，

$$\begin{aligned}f((x_1,x_2,\ldots,x_n)^\top+(y_1,y_2,\ldots,y_n)^\top)&=k_1(x_1+y_1)+k_2(x_2+y_2)+\cdots+k_n(x_n+k_n)\\&=k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_nx_n+k_1y_1+k_2y_2+\cdots+k_ny_n\\&=f((x_1,x_2,\ldots,x_n)^\top)+f((y_1,y_2,\ldots,y_n)^\top)\\f(l(x_1,x_2,\ldots,x_n)^\top)&=k_1lx_1+k_2lx_2+\cdots+k_nlx_n\\&=l(k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_nx_n)\\&=lf((x_1,x_2,\ldots,x_n)^\top)\end{aligned}$$

により，f は線形写像になるので十分でもある。 □

問題 5.13 (線形写像)**.**
$f(x)=k_2x^2+k_1x+k_0$ で定義される二次関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が線形変換になるための必要十分条件を与えよ。

問題 5.14 (部分空間)**.**
方程式 $x+y=2$ の解の全体 $\{(x,y)^\top \mid x+y=2\}$ は $\mathbb{R}^2$ の部分空間でないことを示せ。

問題 5.15 (線形写像の核と像)**.**
線形写像 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ を

$$f(x_1,x_2)^\top=(0,x_1+2x_2,-2x_1-4x_2)^\top,$$

と定義する。

(a) ベクトル $(0,1,1)^\top$，$(0,5/2,-5)^\top$，$(1,5/2,-5)^\top$，が $\operatorname{Im} f$ に属するかどうか判定せよ。
(b) ベクトル $(0,1)^\top$，$(-2,-1)^\top$，$(1,1)^\top$ が $\operatorname{Ker} f$ に属するかどうか判定せよ。
(c) f が全射かどうか判定せよ。
(d) f が単射かどうか判定せよ。

問題 5.16 (部分空間)**.**
次の集合が $\mathbb{R}^2$ の部分空間かどうかを判定せよ。

(a) $y=3x$ を満たすベクトル $(x,y)^\top$ の全体
(b)$y=2x+1$ を満たすベクトル $(x,y)^\top$ の全体
(c)$y=x^2$ を満たすベクトル $(x,y)^\top$ の全体

問題 5.17 (部分空間)**.**
次の集合が $\mathbb{R}^3$ の部分空間かどうかを判定せよ。

(a) $\{(x_1,x_2,x_3)^\top \mid x_3=0\}$
(b) $\{(x_1,x_2,x_3)^\top \mid x_1+x_2+x_3=1\}$
(c) $\{(x_1,x_2,x_3)^\top \mid x_1x_2=0\}$
(d) $\{(x_1,x_2,x_3)^\top \mid x_1=3x_2=5x_3\}$

問題 5.18 (部分空間)**.**
数ベクトル空間 $K=K^1$ の部分空間をすべて求めよ。
解答例　$\{0\}$ と K 自身である。

念のため，これらだけが $K = K^1$ の部分空間であることを示しておく。

まず，$\{0\}$ と K は，K の部分空間である (部分空間の定義の 3 条件を確認すればいいが，それは明らかであろう)。

逆に K の部分空間は，$\{0\}$ と K 以外にないことを示す。W を K の部分空間とする。$0 \in W$ なので，W が 0 以外の要素を含まなければ， $W = \{0\}$ である。W が 0 以外の要素を含むとしよう。その要素を k_0 とする。任意の $k \in K$ に対して $k' = k/k_0$ とおくと，$k' \in K$ だから，部分空間の定義より $k = k'k_0 \in W$ でなければならない。よって $K \subset W$。逆の $W \subset K$ は明らかだから，$W = K$ である。 □

問題 5.19 ($\mathbb{R}^2$ の部分空間).
平面 $\mathbb{R}^2$ の $\{\vec{0}\}$ でも $\mathbb{R}^2$ でもない部分空間は，原点を通る直線であることを示せ。

問題 5.20 ($\mathbb{R}^3$ の部分空間).
（3 次元ユークリッド）空間 $\mathbb{R}^3$ の $\{\vec{0}\}$ でも $\mathbb{R}^3$ でもない部分空間はどういうものか述べよ。

5.3 線形結合，部分空間の生成

定義 5.6 (線形結合).
$\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_r \in K^n$ とする。このとき，$k_1, \ldots, k_r$ を用いて $\vec{x} = k_1\vec{x}_1 + \cdots + k_r\vec{x}_r$ の形に表わせるベクトル $\vec{x} \in K^n$ を $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_r$ の**線形結合**と呼ぶ。$\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_r$ の線形結合の全体

$$W = \{k_1\vec{x}_1 + \cdots + k_r\vec{x}_r \mid k_1, \ldots, k_r \in K\}$$

は，いつでも K^n の部分空間となるので，これを $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_r$ が**張る** (または**生成する**) 部分空間と呼び，$\mathrm{Span}(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_r)$ と記す[*1]。

定理 5.7 (線形写像の像).
$f \in \mathrm{Hom}(K^m, K^n)$ とする。f の像は基本ベクトルの像で生成される。すなわち，

$$\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Span}(f(\vec{e}_1), \ldots, f(\vec{e}_m))$$

問題 5.21 (線形結合).

(a) $(4,5)^\top$ を $(2,1)^\top$，$(1,2)^\top$ の線形結合で表せ。

(b) $(5,11)^\top$ を $(3,1)^\top$，$(2,-4)^\top$ の線形結合で表せ。

(c) 列ベクトル $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ の線形結合で表せ。

解答例

(a)

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+b \\ a+2b \end{pmatrix}$$

[*1] 教科書にあるように $\langle \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_r \rangle$ と記すことも多い

を満たす a と b を求めればいい。連立方程式

$$2a + b = 4, \quad a + 2b = 5$$

を解いて，$a = 1$，$b = 2$ だから，求める線形結合は

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

である。

(b)

(c) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$。

□

問題 5.22 (生成される部分空間)**.**
次の $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}$ が $\mathrm{Span}((1,2,3)^\top, (4,5,6)^\top)$ に属するかどうかを判定せよ。

$$\vec{x} = (2,4,6)^\top, \quad \vec{y} = (2,2,2)^\top, \quad \vec{z} = (1,2,4)^\top$$

問題 5.23 (生成される部分空間)**.**
$\vec{a} = (1,2,-3)^\top$，$\vec{b} = (-2,0,5)^\top$ とする。平面 $\mathrm{Span}(\vec{a}, \vec{b})$ の方程式を $ax + by + cz = d$ の形に表わせ。

問題 5.24 (部分空間)**.**
$A \in \mathrm{M}(m, n; K)$ を K 上の $m \times n$ 行列，$\vec{b} \in K^m$ を m 項縦ベクトルとする。 K^n の部分集合

$$S = \{\vec{x} \in K^n \mid A\vec{x} = \vec{b}\}$$

が K^n の部分空間になるための条件を求めよ。

解答例　S が部分空間になるための条件は $\vec{b} = \vec{0}$ である。実際，$\vec{b} = \vec{0}$ であれば，任意の $\vec{x}, \vec{y} \in S$ と任意の $k \in K$ に対して，

$$A(\vec{x} + \vec{y}) = A\vec{x} + A\vec{y} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$$
$$A(k\vec{x}) = k(A\vec{x}) = k\vec{0} = \vec{0}$$

より，$\vec{x} + \vec{y}, k\vec{x} \in S$ だから S は部分空間である。一方，$\vec{b} \neq \vec{0}$ ならば，$A\vec{0} = \vec{0} \neq \vec{b}$ より，$\vec{0} \notin S$ だから S は部分空間にはなりえない。 □

6 （一般の）ベクトル空間上の線形写像

6.1 ベクトル空間，部分空間，線形結合

定義 6.1 (ベクトル空間)**.**
V を集合とする。V の任意の 2 要素 $\vec{x}$ と $\vec{y}$ に対して和と呼ばれる V の要素 $\vec{x}+\vec{y}$ が定義され，K の任意の要素 k と V の任意の要素 $\vec{x}$ との間にスカラー倍と呼ばれる V の要素 $k\vec{x}$ が定義され，V の任意の要素 $\vec{x}$ に対して逆ベクトルと呼ばれる V の要素 $-\vec{x}$ が定義され，さらに零ベクトルと呼ばれる V の要素 $\vec{0}$ が存在して，次の (VS1)–(VS8) を満たすとき，V を K 上のベクトル空間 (vector space) という。

(VS1) 任意の $\vec{x},\vec{y},\vec{z}\in V$ に対して $(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z}=\vec{x}+(\vec{y}+\vec{z})$ である。
(VS2) 任意の $\vec{x},\vec{y}\in V$ に対して $\vec{x}+\vec{y}=\vec{y}+\vec{x}$ である。
(VS3) 任意の $\vec{x}\in V$ に対して $\vec{x}+\vec{0}=\vec{x}$ である。
(VS4) 任意の $\vec{x}\in V$ に対して $\vec{x}+(-\vec{x})=\vec{0}$ である。
(VS5) 任意の $k\in K$ と任意の $\vec{x},\vec{y}\in V$ に対して $k(\vec{x}+\vec{y})=k\vec{x}+k\vec{y}$ である。
(VS6) 任意の $k,l\in K$ と任意の $\vec{x}\in V$ に対して $(k+l)\vec{x}=k\vec{x}+l\vec{x}$ である。
(VS7) 任意の $k,l\in K$ と任意の $\vec{x}\in V$ に対して $(kl)\vec{x}=k(l\vec{x})$ である。
(VS8) 任意の $\vec{x}\in V$ に対して $1\vec{x}=\vec{x}$ である。

ベクトル空間の要素をベクトルと呼び，K の要素をスカラーと呼ぶ。$\mathbb{R}$ 上のベクトル空間を実ベクトル空間，$\mathbb{C}$ 上のベクトル空間を複素ベクトル空間 と呼ぶ。

問題 6.1 (零ベクトル)**.**
V を K 上のベクトル空間とする。$\vec{x}\in V$, $k\in K$ に対して，$k\vec{x}=\vec{0}$ となるのは，$k=0$ または $\vec{x}=\vec{0}$ となる場合でかつその場合に限ることを示せ。
解答例　$k=0$ の場合，

$$\begin{aligned}\vec{0}&=0\vec{x}+(-0\vec{x})=(0+0)\vec{x}+(-0\vec{x})=(0\vec{x}+0\vec{x})+(-0\vec{x})\\&=0\vec{x}+(0\vec{x}+(-0\vec{x}))=0\vec{x}+\vec{0}=0\vec{x}=k\vec{x}\end{aligned}$$

同様に $\vec{x}=\vec{0}$ の場合，

$$\begin{aligned}\vec{0}&=k\vec{0}+(-k\vec{0})=k(\vec{0}+\vec{0})+(-k\vec{0})=(k\vec{0}+k\vec{0})+(-k\vec{0})\\&=k\vec{0}+(k\vec{0}+(-k\vec{0}))=k\vec{0}+\vec{0}=k\vec{0}=k\vec{x}\end{aligned}$$

逆に $k\vec{x}=0$ の場合，$k\neq 0$ とすると，

$$\vec{x}=1\vec{x}=(\frac{1}{k}k)\vec{x}=\frac{1}{k}(k\vec{x})=\frac{1}{k}\vec{0}=\vec{0}$$

□

問題 6.2.
$\vec{x}\neq\vec{0}$ のとき，$k\vec{x}=l\vec{x}$ ならば $k=l$ であることを示せ。
解答例　左辺を移項して整理すると

$$\vec{0}=l\vec{x}-k\vec{x}=(l-k)\vec{x}$$

である。これは $l-k=0$ または $\vec{x}=\vec{0}$ の場合に限られるが，$\vec{x}\neq\vec{0}$ という条件より，$l-k=0$，すなわち $k=l$ である。 □

問題 6.3 (逆ベクトル)**.**
V を K 上のベクトル空間とする。任意の $\vec{x}\in V$ に対して，次を示せ。

$$(-1)\vec{x}=-\vec{x}$$

解答例

$$\begin{aligned}-\vec{x}&=-\vec{x}+\vec{0}=-\vec{x}+0\vec{x}=-\vec{x}+(1+(-1))\vec{x}=-\vec{x}+(1\vec{x}+(-1)\vec{x})\\&=(-\vec{x}+1\vec{x})+(-1)\vec{x}=(-\vec{x}+\vec{x})+(-1)\vec{x}=\vec{0}+(-1)\vec{x}=(-1)\vec{x}\end{aligned}$$

□

問題 6.4 (移項)**.**
ベクトル空間では移項ができる。すなわち V をベクトル空間とするとき, 任意の $\vec{x},\vec{y},\vec{z}\in V$ に対して

$$\vec{x}+\vec{z}=\vec{y}\iff\vec{x}=\vec{y}-\vec{z}$$

であることを示せ。

例 6.2 (ベクトル空間の例)**.**
次の集合は，(通常の和とスカラー倍に関して) K 上のベクトル空間である。

(a) n 項数ベクトルの全体 K^n
(b) 行列の全体 $\mathrm{M}(m,n;K)$
(c) 平面あるいは空間の幾何ベクトルの全体 (通常はデカルト座標によって $\mathbb{R}^2$，$\mathbb{R}^3$ と同一視する)
(d) ある集合 X から K への関数の全体 K^X。
(e) K の要素からなる数列の全体。数列は，非負整数の集合 $\mathbb{N}=\{0,1,2,\ldots\}$ から K への関数と考えることができるので，(d) で $X=\mathbb{N}$ とした場合と考えてもいい。
(f) 変数 x についての K 係数多項式の全体 $K[x]$

定義 6.3 (部分空間)**.**
V を K 上のベクトル空間とする。V の部分集合 W は，次の (SS0)–(SS2) を満たすとき，V の**部分空間** (subspace) であるという。

(SS0) $\vec{0}\in W$ である。
(SS1) $\vec{x}\in W$，$\vec{y}\in W$ ならば $\vec{x}+\vec{y}\in W$ である。
(SS2) $k\in K,\vec{x}\in W$ ならば $k\vec{x}\in W$ である。

例 6.4 (部分空間の例)**.**

(a) 集合 X から K の関数 f で逆像 $f^{-1}(X\setminus\{0\})$ が有限であるもの，すなわち，X の有限個の要素を除いて値 $f(x)$ が 0 であるような関数 f の全体は K^X の部分空間である。
(b) 次は，どれも，区間 $[a..b]\subset\mathbb{R}$ $(a<b)$ で定義された実数値関数の空間 $\mathbb{R}^{[a..b]}$ の部分空間になる。
  (b1) 連続関数の全体 $C([a..b],\mathbb{R})$

(b2) 区間 $[a..b]$ で n 回微分可能でその結果が連続であるような関数 (C^n 級の関数) の全体 $C^n([a..b], \mathbb{R})$

(b3) 何回でも微分可能な関数 (C^∞ 級の関数) の全体 $C^\infty([a..b], \mathbb{R})$

(c) 変数 x についての n 次以下の K 係数多項式の全体 $K[x]_n$ は，$K[x]$ の部分空間になる。

(d) 次は，どれも，数列の全体 $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ や $\mathbb{C}^\mathbb{N}$ の部分空間になる。特に (d3) の l_2 は，色々なところで登場する重要なベクトル空間である。

(d0) 有界な数列の全体 l_∞

(d1) 収束する数列の全体

(d2) 0 に収束する数列の全体

(d3) $p \geqq 1$ とするとき $\sum_{n=0}^\infty |a(n)|^p < \infty$ を満たす数列 $\{a(n)\}$ の全体 l_p

(e) K の要素からなる数列のうち，有限個を除いて全成分の値が 0 であるようなものの全体（K^* と記す[*2]）は，数列の全体 $K^\mathbb{N}$ の部分空間である。これは (a) の例の特殊なケースとしてみることもできるし，実質的には例 6.2 の (f)，すなわち $K[x]$ とも同一視できる。

問題 6.5.
例 6.4 の各集合が確かに部分空間になっていることを確認せよ。

解答例 $f(x), g(x)$ を $C([a..b], \mathbb{R})$ の任意の要素とし，c を任意の実数とすると，明らかに $f(x)+g(x)$ も $cf(x)$ も連続だから，$f(x)+g(x) \in C([a..b], \mathbb{R})$，$cf(x) \in C([a..b], \mathbb{R})$，したがって $C([a..b], \mathbb{R})$ は部分空間である。同様に，C^n 級の関数の和とスカラー倍は，C^n 級だから $C^n([a..b], \mathbb{R})$ も $C^\infty([a..b], \mathbb{R})$ も部分空間である。n 次以下の多項式の和とスカラー倍は n 次以下だから，$K[x]_n$ は部分空間である。 □

定義 6.5 (線形結合，部分空間の生成)**.**
V を K 上のベクトル空間，$\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_r \in V$ をベクトルとする。$k_1, k_2, \ldots, k_r \in K$ によって

$$k_1\vec{x}_1 + k_2\vec{x}_2 + \cdots + k_r\vec{x}_r$$

の形に書けるベクトルを $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_r$ の**線形結合**と呼ぶ。$\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_r \in V$ の線形結合の全体を $\mathrm{Span}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_r)$ と記す。すなわち，

$$\mathrm{Span}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_r) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{k_1\vec{x}_1 + k_2\vec{x}_2 + \cdots + k_r\vec{x}_r \mid k_1, k_2, \ldots, k_r \in K\}$$

である。$\mathrm{Span}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_r)$ は，V の部分空間をなすので，これをベクトル $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_r \in V$ が**張る** (または**生成する**) 部分空間と呼ぶ。

さらに S を（有限とは限らない）任意の V の部分集合とする。このとき，S の要素有限個の線形結合，すなわち，$\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_r \in S$ と $k_1, k_2, \ldots, k_r \in K$ によって

$$k_1\vec{x}_1 + k_2\vec{x}_2 + \cdots + k_r\vec{x}_r$$

の形に書けるベクトルの全体を $\mathrm{Span}(S)$ と記す，$\mathrm{Span}(S)$ は，いつでも V の部分空間になるので，S が**張る** (または**生成する**) 部分空間と呼ぶ。V の部分空間 W は，$W = \mathrm{Span}(S)$ となる有限集合 S が存在するとき，**有限生成**（または**有限次元**）であるという

[*2] A^* は A の要素からなる有限列を表わすのにしばしば使われる記号だが，有限列は，その後ろに無限個の 0 を並べることで，有限個を除いて全成分が 0 であるような数列を表現することができるので，この記号を流用する

問題 6.6.
例 6.2 や例 6.4 の空間のうち有限次元なのはどれか？

特定のベクトル空間の場合は，無限次元の場合のこともあるが，以降，一般のベクトル空間 V などという場合，特に断らない限り V は原則として**有限次元**であることを仮定する。本稿で述べることは，任意次元のベクトル空間について成立することも多いが，無限次元の場合は成立しても証明がやや面倒になるので，一般には有限次元という仮定の下でのみ成立すると考えられたい。

定義 6.6 (線形結合の行列表記)**.**
ベクトル $\vec{y}$ がベクトル $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ の線形結合によって，

$$\vec{y} = c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 + \cdots + c_n\vec{x}_n$$

と書けるとき，ベクトルの横ベクトル $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$ とスカラーの縦ベクトル $(c_1, c_2, \ldots, c_n)^\top$ の積の形に

$$\vec{y} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)(c_1, c_2, \ldots, c_n)^\top$$

と書く。さらにベクトル $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_m$ がベクトル $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ の線形結合によって，

$$\begin{aligned}
\vec{y}_1 &= c_{11}\vec{x}_1 + c_{21}\vec{x}_2 + \cdots + c_{n1}\vec{x}_n \\
\vec{y}_2 &= c_{12}\vec{x}_1 + c_{22}\vec{x}_2 + \cdots + c_{n2}\vec{x}_n \\
&\vdots \\
\vec{y}_m &= c_{1m}\vec{x}_1 + c_{2m}\vec{x}_2 + \cdots + c_{nm}\vec{x}_n
\end{aligned}$$

と書けるとき，スカラー行列 $C \overset{\text{def}}{=} (c_{ij})$ を用いて，

$$(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_m) = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)C$$

と表される。このとき，さらにベクトル $\vec{z}_1, \vec{z}_2, \ldots, \vec{z}_k$ が

$$(\vec{z}_1, \vec{z}_2, \ldots, \vec{z}_k) = (\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_m)D$$

と書けるなら，代入と機械的な変形で

$$(\vec{z}_1, \vec{z}_2, \ldots, \vec{z}_k) = ((\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)C)D = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)(CD)$$

としてもいい。

問題 6.7 (部分空間の共通部分)**.**
ベクトル空間 V の部分空間 W_1 と W_2 の共通部分 $W_1 \cap W_2$ は，また V の部分空間となることを示せ。
解答例: $\vec{0} \in W_1$，$\vec{0} \in W_2$ だから $\vec{0} \in W_1 \cap W_2$ である。また，$k \in K$，$\vec{x}, \vec{y} \in W_1 \cap W_2$ とすると，$\vec{x}, \vec{y} \in W_1$ かつ $\vec{x}, \vec{y} \in W_2$ だから，$\vec{x}+\vec{y}$, $k\vec{x} \in W_1$ かつ $\vec{x}+\vec{y}, k\vec{x} \in W_2$ であり，よって $\vec{x}+\vec{y}, k\vec{x} \in W_1 \cap W_2$ である。ゆえに $W_1 \cap W_2$ は部分空間である。 □

問題 6.8 (行列の空間，部分空間)**.**
2 次正方行列の全体 $\mathrm{M}(2, 2; K)$ は通常の和とスカラー倍により，明らかにベクトル空間をなす。次が部分空間になるかどうかを判定せよ。

(a)　正則な 2 次正方行列の全体
(b)　正則でない 2 次正方行列の全体
(c)　対称な 2 次正方行列の全体
(d)　トレース (対角成分の和) が 0 である 2 次正方行列の全体
(e)　X をある特定の 2 次正方行列とするとき，X と可換な行列の全体，すなわち $\{A \mid XA = AX\}$。

解答例　2 次正方行列の全体 $\mathrm{M}(2,2;K)$ をベクトル空間と考えると，明らかに零ベクトルは零行列 $\mathrm{O}_{2\times 2}$ になる。

(a)　部分空間にはならない。部分空間になるためには，零ベクトル，すなわち $\mathrm{O}_{2\times 2}$ を含んでいなければならないが，$\mathrm{O}_{2\times 2}$ は正則ではない。
(b)　部分空間にならない。行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は正則でないが，その和 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は正則になってしまう。
(c)
(d)　部分空間になる。行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ のトレース $a+d$，$a'+d'$ が $0 <$ ならば，和 $\begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix}$ のトレース $a+a'+d+d' = (a+d)+(a'+d')$ も，k 倍 $\begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix}$ のトレース $ka+kd = k(a+d)$ も，明らかに 0 である。
(e)

□

問題 6.9 (関数の空間，部分空間)**.**
閉区間 $[-1..1]$ で定義された実数値関数の全体が作るベクトル空間 $\mathbb{R}^{[-1..1]}$ の中で，次の集合が部分空間かどうかを判定せよ。

(a)　奇関数の全体 $\{f \mid f(-x) = -f(x)\}$
(b)　偶関数の全体 $\{f \mid f(-x) = f(x)\}$
(c)　グラフが原点を通る関数の全体 $\{f \mid f(0) = 0\}$
(d)　非負の関数の全体 $\{f \mid f(x) \geq 0\}$
(e)　両端点での値が等しい関数の全体 $\{f \mid f(-1) = f(1)\}$
(f)　両端点での値の和が 0 である関数の全体 $\{f \mid f(-1) + f(1) = 0\}$
(g)　2 階微分可能でかつ $f''(x) + f(x) = 0$ を満たすような関数 f の全体
(h)　何回でも微分可能な関数 f の全体

問題 6.10 (部分空間の生成)**.**
V を K 上のベクトル空間とし，$\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_m, \vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_n \in V$ とする。$A \in \mathrm{M}(m,n;K)$ によって

$$(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_n) = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_m)A$$

と書けるなら，$\mathrm{Span}(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_n) \subset \mathrm{Span}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_m)$ であることを示せ。
解答例　$\vec{v} \in \mathrm{Span}(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_n)$ を取り，$\vec{v} = (\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_n)(c_1, c_2, \ldots, c_n)^\top$ と表わせば，仮定より $\vec{v} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_m)A(c_1, c_2, \ldots, c_n)^\top$ である。従って，$\vec{v} \in \mathrm{Span}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_m)$ である。□

問題 6.11 (部分空間の生成)**.**
$\vec{x} \in \mathrm{Span}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ ならば $\mathrm{Span}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n) = \mathrm{Span}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n, \vec{x})$ であることを示せ。
解答例　条件より $\vec{x} = a_1\vec{x}_1 + a_2\vec{x}_2 + \cdots + a_n\vec{x}_n$ と書ける。$\mathrm{Span}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n) \subset \mathrm{Span}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n, \vec{x})$ は明らかだから，その逆，つまり $\mathrm{Span}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n, \vec{x}) \subset \mathrm{Span}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ であることを示せばいい。$\vec{v} \in \mathrm{Span}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n, \vec{x})$ ならば，

$$\vec{v} = k_1\vec{x}_1 + k_2\vec{x}_2 + \cdots + k_n\vec{x}_n + k\vec{x}$$

と書ける。従って，

$$\begin{aligned} \vec{v} &= k_1\vec{x}_1 + k_2\vec{x}_2 + \cdots + k_n\vec{x}_n + k(a_1\vec{x}_1 + a_2\vec{x}_2 + \cdots + a_n\vec{x}_n) \\ &= (k_1 + ka_1)\vec{x}_1 + (k_2 + ka_2)\vec{x}_2 + \cdots + (k_n + ka_n)\vec{x}_n \end{aligned}$$

だから，$\vec{v} \in \mathrm{Span}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ である。 □

問題 6.12 (線形結合)**.**
多項式 x^3 を x，$x(x-1)$，$x(x-1)(x-2)$ の線形結合で表せ。
解答例　$x^3 = x + 3x(x-1) + x(x-1)(x-2)$。 □

問題 6.13 (線形結合)**.**
$\sin x$ を $\sin(x+\alpha)$ と $\sin(x+\beta)$ の線形結合で表せ。ただし，α と β は定数で，その差は π の整数倍ではないとする。
解答例　$\sin x = a\sin(x+\alpha) + b\sin(x+\beta)$ となるような a, b を求めればよい。加法定理を用いて右辺を展開し整理すると，$(a\sin\alpha + b\sin\beta)\cos x + (a\cos\alpha + b\cos\beta)\sin x$ であるから，$a\sin\alpha + b\sin\beta = 0, a\cos\alpha + b\cos\beta = 1$ を満たす a, b を求めればよい。クラメルの公式により，そのような a, b は，

$$a = \frac{\det\begin{pmatrix} 0 & \sin\beta \\ 1 & \cos\beta \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} \sin\alpha & \sin\beta \\ \cos\alpha & \cos\beta \end{pmatrix}} = \frac{-\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}, \quad b = \frac{\det\begin{pmatrix} \sin\alpha & 0 \\ \cos\alpha & 1 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} \sin\alpha & \sin\beta \\ \cos\alpha & \cos\beta \end{pmatrix}} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}$$

で与えられる。 □

6.2　線形従属，線形独立

定義 6.7 (線形従属と線形独立)**.**
V を K 上のベクトル空間とする。$\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n \in V$ が**線形従属** (linearly dependent) とは，

$$\vec{0} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)(c_1, c_2, \dots, c_n)^\top$$

となるような $(c_1, c_2, \dots, c_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$ が存在することである。$\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n \in V$ が**線形独立** (linearly independent) とは，

$$\vec{0} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)(c_1, c_2, \dots, c_n)^\top$$

となるのが $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ の場合に限ることである。

定理 6.8 (線形独立の拡大条件)**.**
$\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \in V$ が線形独立とする。$\vec{x} \in V$ が $\vec{x} \notin \mathrm{Span}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ を満たせば，$\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{x}$ も線形独立である。

定理 6.9 (線形従属の条件)**.**
$\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \in V$ が線形従属であるための必要十分条件は，これらのうちのあるベクトルが他のベクトルの線形結合で書けることである。

問題 6.14 (線形結合表示の一意性)**.**
$A, B \in \mathrm{M}(n, m; K)$ とする。$\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ が線形独立のとき，$(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)A = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)B$ ならば $A = B$ であることを示せ。
解答例　$(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)A$ と $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)B$ の第 i 番目のベクトル同士を比較すると，

$$A[1,i]\vec{x}_1 + \cdots + A[n,i]\vec{x}_n = B[1,i]\vec{x}_1 + \cdots + B[n,i]\vec{x}_n$$

である。したがって $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ が線形独立だから $A[1,i] - B[1,i] = \cdots = A[n,i] - B[n,i] = 0$ である。これがすべての i についていえるので，$A = B$ である。 □

問題 6.15 (線形独立)**.**
a, b, c, d, e, f を正の実数とするとき，$\begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e \\ f \\ 0 \end{pmatrix}$ が線形独立であることを示せ。
解答例　問題のベクトルが線形独立であるためには行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & c & e \\ a & 0 & f \\ b & d & 0 \end{pmatrix}$$

が正則であることが必要かつ十分である。

$$\det A = ade + bcf > 0$$

より A は正則だから，問題のベクトルは線形独立である。 □

問題 6.16 (線形独立)**.**
次のベクトル (列ベクトル，多項式, 連続関数) の各グループに対して，中から線形独立なもの 1 組を選び，他をそれらの線形結合で表せ。

(a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) $x^2 + x + 2, \quad x + 1, \quad 3x^2 + 2x + 5, \quad x + 2, \quad 2x^2 + x + 3$

(c) $\sin(x), \quad \sin(x + \frac{\pi}{6}), \quad \sin(x + \frac{\pi}{3}), \quad \sin(x + \frac{\pi}{2})$

解答例

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ を簡約化すると $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ だから，$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ は

線形独立であり，残りは

$$\begin{pmatrix}-2\\0\\-1\end{pmatrix} = -5\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$$

と書ける。

(b)　明らかに $x^2, x, 1$ は線形独立であり，$(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5) = (x^2, x, 1)\begin{pmatrix}1&0&3&0&2\\1&1&2&1&1\\2&1&5&2&3\end{pmatrix}$ なので，行列 $\begin{pmatrix}1&0&3&0&2\\1&1&2&1&1\\2&1&5&2&3\end{pmatrix}$ を簡約化すると，その結果は，$\begin{pmatrix}1&0&3&0&2\\0&1&-1&0&-1\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}$ である。f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 は，この行列の 5 つの列ベクトルと同じ線形関係を共有するので，f_1, f_2, f_4 は線形独立であり，$f_3 = 3f_1 - f_2, f_5 = 2f_1 - f_2$ と表せる。

(c)　まず $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$ である。$a\sin x + b\cos x = 0$ とすると，x に 0 を代入して $b = 0$，$\frac{\pi}{2}$ を代入して $a = 0$ が導かれるので，$\sin x$ と $\cos x$ は線形独立である。残りは，加法定理により

$$\sin(x + \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x, \quad \sin(x + \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$$

と書ける。

□

問題 6.17.
実数値関数全体の作るベクトル空間 $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ の中で，次の関数の組は線形独立であることを示せ。

(a)　$1, x, x^2, x^3$
(b)　$1, \sin x, \sin 2x$，$\sin 3x$
(c)　$1, \cos x, \cos 2x$，$\cos 3x$
(d)　$1, e^x, e^{2x}$，e^{3x}

解答例　一般に関数 $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ が線形独立であることを示すには，$k_1 f_1(x) + \cdots + k_n f_n(x) = 0$ とおいて，$k_1 = \cdots = k_n = 0$ を示せばよい。その手段は，いろいろと考えられるが，簡便な方法としては，具体的な値を代入する方法がある。たとえば (a) ならば，$k_1 + k_2 x + k_3 x^2 + k_4 x^3 = 0$ の x に $-1, 0, 1, 2$ を代入すると，

$$k_1 - k_2 + k_3 - k_4 = 0, \quad k_1 = 0, \quad k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 0, \quad k_1 + 2k_2 + 4k_3 + 8k_4 = 0,$$

となる。これを解けば $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$ となる。(b) なら $k_1 + k_2 \sin x + k_3 \sin 2x + k_4 \sin 3x = 0$ の x に $0, \pi/6, \pi/3, \pi/2$ を代入すると，

$$k_1 = 0, \quad k_1 + \frac{1}{2}k_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}k_3 + k_4 = 0, \quad k_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}k_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}k_3 = 0, \quad k_1 + k_2 - k_4 = 0,$$

となる。(c)–(d) も同様の方法で示される。□

定義 6.10 (基底)**.**
V を K 上のベクトル空間とする。ベクトルの列 $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n \in V$ は，次を満たすとき，ベクトル空間 (部分空間) V の**基底** (basis) と呼ぶ。

(BS1) 任意の V の要素が $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ の線形結合で表せる。すなわち $V = \mathrm{Span}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$ である。

(BS2) $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ は線形独立である。

問題 6.18 (K^n の標準基底)**.**
基本ベクトルの列 $(\vec{\mathrm{e}}_1, \vec{\mathrm{e}}_2, \ldots, \vec{\mathrm{e}}_n)$ は，数ベクトル空間の K^n の基底であることを示せ。これを K^n の標準基底と呼ぶ。

解答例 $(k_1, \ldots, k_n)^\top = k_1\vec{\mathrm{e}}_1 + \cdots + k_n\vec{\mathrm{e}}_n$ だから，$K^n = \mathrm{Span}(\vec{\mathrm{e}}_1, \vec{\mathrm{e}}_2, \ldots, \vec{\mathrm{e}}_n)$ である。また，$k_1\vec{\mathrm{e}}_1 + \cdots + k_n\vec{\mathrm{e}}_n = \vec{0} = (0, \ldots, 0)^\top$ ならば，明らかに $k_1 = \cdots = k_n = 0$ だから $\vec{\mathrm{e}}_1, \vec{\mathrm{e}}_2, \ldots, \vec{\mathrm{e}}_n$ は線形独立である。 □

問題 6.19.
次の数ベクトルの組 (a)–(b) が $\mathbb{R}^3$ の基底になるかどうか判定せよ。

(a) $((1, 0, -1)^\top, (0, 1, 1)^\top, (1, 1, 0)^\top)$

(b) $((2, 0, 1)^\top, (1, 2, 1)^\top, (-1, 0, 3)^\top)$

問題 6.20.
次の各線形 (部分) 空間 W の基底を 1 組づ与えよ。

(a) $W = \{(x, y, z)^\top \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0\}$

(b) $W = \{f(x) \in \mathbb{R}[x]_3 \mid (x + 1)f'(x) = 2f(x)\}$

(c) $W = \{f(x) \in \mathbb{R}[x]_3 \mid x^2 f''(x) - 3xf'(x) + 3f(x) = 0\}$

(d) $W = \{f(x) \in \mathbb{R}[x]_3 \mid f(0) = f(1) = f(2) = 0\}$

(注意: $\mathbb{R}[x]_3$ は x についての 3 次以下の実係数多項式の全体を表す。)

解答例

(a) $\{(2\ \ 1\ \ 0)^\top,\ (-3\ \ 0\ \ 1)^\top\}$

(b)

(c)

(d) $\{x^3 - 3x^2 + 2x (= x(x - 1)(x - 2))\}$

□

定義 6.11 (成分表示，座標)**.**
V をベクトル空間とし，V の基底のひとつを $\beta = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$ とする。V の元 $\vec{x}$ は $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$ の線形結合として

$$\vec{x} = a_1\vec{x}_1 + a_2\vec{x}_2 + \cdots a_n\vec{x}_n = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)(a_1, a_2, \ldots, a_n)^\top$$

の形にただ一通りに書ける。$(a_1, a_2, \ldots, a_n)^\top$ を基底 β に関する $\vec{x}$ の**成分表示** (または β-**座標**) という。[*3]

[*3] 本講義ノートでは，成分表示や座標は一貫して縦ベクトルとして扱うが，教科書によっては横ベクトルとして定義されることもある

6.3 次元

定理 6.12 (基底と正則性)**.** V をベクトル空間とし，$(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n)$ を V の 1 つの基底とする。V のベクトル $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_n$ が行列 A を用いて

$$(\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_n) = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n)A$$

と書けるとき，次の条件は同値である。

(a) $(\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_n)$ が V の基底である。
(b) $(\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_n)$ が線形独立である。
(c) $V = \mathrm{Span}(\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_n)$ である。
(d) A が正則である。

定義 6.13 (次元)**.**
ベクトル空間 (部分空間) V が基底を持つとき，基底を構成するベクトルの個数は一定である。その数が有限のとき，それを V の**次元** (dimension) といい，$\dim V$ で表す。

問題 6.21 (0 次元空間)**.**
V をベクトル空間とする。$V = \{\vec{0}\}$ のとき，かつそのときに限り $\dim V = 0$ であることを示せ。

解答例 $V = \{\vec{0}\}$ のとき，明らかに V 中には線形独立のベクトルが 1 つもない。よって $\dim V = 0$ である。逆に $V \neq \{\vec{0}\}$ としよう。V には零ベクトル以外の要素 $\vec{x}$ がある。$\vec{x}$ は線形独立だから，$\dim V \geq 1$ である。 □

問題 6.22 (次元)**.**
次のベクトル空間の次元を求めよ。

$$K^n, \quad K[x]_n$$

解答例 $\dim K^n = n$，$\dim K[x]_n = n+1$ である。実際，$(\vec{\mathrm{e}}_1, \vec{\mathrm{e}}_2, \ldots, \vec{\mathrm{e}}_n)$ は K^n の基底である。また，$1, x, x^2, \ldots, x^n$ は $K[x]_n$ において線形独立であり，n 次以下の K 係数多項式は，すべて $a_0, a_1, \ldots, a_n \in K$ に $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ と書けるから，$K[x]_n = \mathrm{Span}(1, x, x^2, \ldots, x^n)$ である。よって $(1, x, x^2, \ldots, x^n)$ は $K[x]_n$ の基底となる。 □

定義 6.14 (座標の変換行列)**.**
V をベクトル空間とし，$\beta = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$，$\gamma = (\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_n)$ を V の基底とするとき，

$$(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_n) = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)A$$

となるような行列 A がただひとつ定まる。これを γ-座標から β-座標への**変換行列**という。変換行列は n 次正則行列である。逆に A を n 次正則行列とすれば，$\gamma = \beta A$ はいつでも V の基底となる。$\vec{x} \in V$ の β-座標 と γ-座標をそれぞれ $(b_1, b_2, \ldots, b_n)^\top$ と $(c_1, c_2, \ldots, c_n)^\top$ とするとき

$$(b_1, b_2, \ldots, b_n)^\top = A(c_1, c_2, \ldots, c_n)^\top$$

が成立する。

定理 6.15 (基底の拡張)**.**
V を n 次元ベクトル空間とする。$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r$ $(r \leq n)$ が線形独立ならば，これに $n-r$ 個のベクトル $\vec{v}_{r+1}, \vec{v}_{r+2}, \dots, \vec{v}_n$ を補充して V の基底 $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$ を作ることができる。特に W を V の r 次元部分空間とすれば，W の基底に $n-r$ 個のベクトルを補充する形で V の基底を作ることができる。

問題 6.23 (基底)**.**
K^3 の次の基底 β に対してベクトル $\vec{v} = (1 \ \ 1 \ \ 1)^\top$ と $\vec{w} = (10 \ \ 100 \ \ 334)^\top$ の β-座標を求めよ。

(a) $\beta = ((0 \ \ 1 \ \ 0)^\top,\ (0 \ \ 0 \ \ 1)^\top,\ (1 \ \ 0 \ \ 0)^\top)$
(b) $\beta = ((1 \ \ 1 \ \ 1)^\top,\ (1 \ \ 2 \ \ 3)^\top,\ (0 \ \ 2 \ \ 2)^\top)$
(c) $\beta = ((1 \ \ -2 \ \ 2)^\top,\ (2 \ \ -3 \ \ 2)^\top,\ (3 \ \ -4 \ \ 4)^\top)$

解答例

(a) $\vec{v}$ の座標は $(1 \ \ 1 \ \ 1)^\top$。$\vec{w}$ の座標は $(100 \ \ 334 \ \ 10)^\top$。
(b) $\vec{v}$ の座標は $(1 \ \ 0 \ \ 0)^\top$。$\vec{w}$ の座標は $(-224 \ \ 234 \ \ -72)^\top$。
(c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & -4 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を解いて，$\vec{v}$ の座標は $\begin{pmatrix} -5/2 \\ -2 \\ 5/2 \end{pmatrix}$。$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & -4 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 100 \\ 334 \end{pmatrix}$ を解いて，$\vec{w}$ の座標は $\begin{pmatrix} 47 \\ -434 \\ 277 \end{pmatrix}$。

□

問題 6.24 (基底)**.**
$K[x]_2$ の次の基底 β に対してベクトル (多項式) $\vec{v} = x^2 + x + 1$ と $\vec{w} = 5x^2 - 3$ の β-座標を求めよ。

(a) $\beta = (1, x, x(x+1))$
(b) $\beta = ((x-1)x, x(x+1),\ (x+1)(x-1))$

解答例

(a) $\vec{v}$ の座標は $(1 \ \ 0 \ \ 1)^\top$。$\vec{w}$ の座標は $(-3 \ \ -5 \ \ 5)^\top$。
(b) $\vec{v}$ の座標は $(\frac{1}{2} \ \ \frac{3}{2} \ \ -1)^\top$。$A(x-1)x + Bx(x+1) + C(x+1)(x-1) = (A+B+C)x^2 + (-A+B)x + (-C) = 5x^2 - 3$ を未定係数法で解いて，$\vec{w}$ の座標は $(1 \ \ 1 \ \ 3)^\top$。

□

問題 6.25 (基底)**.**
$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ を満たす数列 $\{a_n\}$ を一般フィボナッチ数列と呼ぶ。一般フィボナッチ数列の全体を W とするとき，

(a) W が数列全体の空間 $K^{\mathbb{N}}$ の部分空間となることを示せ。
(b) $\phi_+ = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，$\phi_- = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ に対して，$\vec{v}_+ = \{{\phi_+}^n\}$，$\vec{v}_- = \{{\phi_-}^n\}$ とするとき，$\beta = (\vec{v}_+, \vec{v}_-)$ が W の基底になることを証明せよ。
(c) $f_0 = 0$，$f_1 = 1$，$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ で定義される (狭義の) フィボナッチ数列 $\vec{v} = \{f_n\}$ の β-座標を

求めよ。

解答例

(a)　$0 = 0 + 0$ より，$\vec{v} = \{0\} \in W$ である。

次に $\{a_n\}, \{b_n\} \in W$，すなわち，$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, b_{n+2} = b_{n+1} + b_n$ が満たされるとすると，

$$a_{n+2} + b_{n+2} = (a_{n+1} + a_n) + (b_{n+1} + b_n) = (a_{n+1} + b_{n+1}) + (a_n + b_n)$$
$$ka_{n+2} = k(a_{n+1} + a_n) = ka_{n+1} + ka_n$$

により，$\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\} \in W$，$k\{a_n\} = \{ka_n\} \in W$ である。ゆえに W は部分空間である。

(b)

$$\phi_\pm{}^{n+1} + \phi_\pm{}^{n} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\phi_\pm{}^{n} = \left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right)^2 \phi_\pm{}^{n} = \phi_\pm{}^{n+2} \quad (\text{複号同順})$$

だから $\vec{v}_+, \vec{v}_- \in W$ である。

$k_+\vec{v}_+ + k_-\vec{v}_- = \vec{0}$ ならば，$n = 0, 1$ の場合について考えると $k_+ + k_- = 0, \phi_+k_+ + \phi_-k_- = 0$ を満たさねばならない。それには $k_+ = k_- = 0$ しかないので，$\vec{v}_+, \vec{v}_-$ は線形独立である。

最後に $\{a_n\} \in W$，すなわち，$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ とする。このとき，$\{a_n\} = k_+\vec{v}_+ + k_-\vec{v}_-$ なる k_+, k_- を見つけるには，$n = 0, 1$ の場合の $a_0 = k_+ + k_-, a_1 = k_+\phi_+ + k_-\phi_-$ を解いて，$k_+ = \dfrac{a_1 - a_0\phi_-}{\phi_+ - \phi_-} = \dfrac{a_1 - a_0\phi_-}{\sqrt{5}}$，$k_- = \dfrac{a_1 - a_0\phi_+}{\phi_- - \phi_+} = \dfrac{a_0\phi_+ - a_1}{\sqrt{5}}$ を得る。このとき実際 $\{a_n\} = k_+\vec{v}_+ + k_-\vec{v}_-$ と表すことができることは数学的帰納法で容易に示される。従って $\beta = (\vec{v}_+, \vec{v}_-)$ は基底をなす。

(c)　上の a_0 と a_1 に $f_0 = 0$，$f_1 = 1$ を代入して，$k_+ = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$k_- = \dfrac{-1}{\sqrt{5}}$ だから，求める座標は $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}^\top$ である。(これは f_n が $\dfrac{\phi_+{}^n - \phi_-{}^n}{\sqrt{5}}$ と表されることを意味する。)

□

問題 6.26 (変換行列)**.**

V を実ベクトル空間とする。$\beta = \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ を V の基底の 1 つとするとき，次のベクトルの組 γ が基底になるかどうか判定し，基底になる場合は，β-座標から γ-座標への変換行列と γ-座標から β-座標への変換行列を求めよ。

(a)　$\gamma = \vec{x} + 2\vec{y} + 3\vec{z}, -2\vec{x} - 3\vec{y} - 4\vec{z}, 2\vec{x} + 2\vec{y} + 4\vec{z}$

(b)　$\gamma = 5\vec{x} - \vec{y} + 3\vec{z}, -\vec{x} + 3\vec{y} - \vec{z}, 3\vec{x} - 2\vec{y} + 2\vec{z}$

(c)　$\gamma = \vec{x} + 3\vec{y} + 2\vec{z}, 2\vec{x} + 6\vec{y} + 3\vec{z}, -2\vec{x} - 5\vec{y} - 2\vec{z}$

(d)　$\gamma = \vec{x} + a\vec{y}, \vec{y} + a\vec{z}, a\vec{x} + \vec{z}$（$a$ は実数とする）

解答例

(a)　$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 4 \end{pmatrix}$ は正則だから γ は基底になる。γ-座標から β-座標への変換行列は

$\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ 2 & -3 & 2\\ 3 & -4 & 4\end{pmatrix}$，$\beta$-座標から γ-座標への変換行列は $\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ 2 & -3 & 2\\ 3 & -4 & 4\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ -1 & -1 & 1\\ 1/2 & -1 & 1/2\end{pmatrix}$ である。

(b) $\begin{pmatrix}5 & -1 & 3\\ -1 & 3 & -2\\ 3 & -1 & 2\end{pmatrix}$ は正則でないから，γ は基底にならない。

(c) $\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 3 & 6 & -5\\ 2 & 3 & -2\end{pmatrix}$ は正則だから γ は基底になる。γ-座標から β-座標への変換行列は $\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 3 & 6 & -5\\ 2 & 3 & -2\end{pmatrix}$，$\beta$-座標から γ-座標への変換行列は $\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 3 & 6 & -5\\ 2 & 3 & -2\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}3 & -2 & 2\\ -4 & 2 & -1\\ -3 & 1 & 0\end{pmatrix}$ である。

(d) $a = -1$ のとき基底にならない。$a \neq -1$ のときは基底である。(V が複素ベクトル空間で a が複素数の場合，$a = (1 \pm \sqrt{-3})/2$ のときも基底にならない。) β-座標から β-座標への変換行列は $\dfrac{1}{1+a^3}\begin{pmatrix}1 & a^2 & -a\\ -a & 1 & a^2\\ a^2 & -a & 1\end{pmatrix}$ である。

□

問題 6.27 (変換行列)**.**

V をベクトル空間，$\beta = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$ を V の基底の 1 つとする。

(a) $(\vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{v}_2 + \vec{v}_3, \dots, \vec{v}_{n-1} + \vec{v}_n, \vec{v}_n + \vec{v}_1)$ が V の基底になるかどうか判定せよ。

(b) $(\vec{v}_1 - \vec{v}_2, \vec{v}_2 - \vec{v}_3, \dots, \vec{v}_{n-1} - \vec{v}_n, \vec{v}_n - \vec{v}_1)$ が V の基底になるかどうか判定せよ。

(c) $\gamma = (\vec{v}_1, \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \cdots + \vec{v}_n)$ が V の基底になることを示せ。また，γ-座標から β-座標への変換行列と β-座標から γ-座標への変換行列を求めよ。

(d) $\vec{w} = k_1\vec{w}_1 + k_2\vec{w}_2 + \cdots + k_n\vec{w}_n$ とするとき，$(\vec{w} - \vec{w}_1, \vec{w} - \vec{w}_2, \dots, \vec{w} - \vec{w}_n)$ が V の基底になるための必要十分条件が $k_1 + k_2 + \cdots + k_n \neq 1$ であることを示せ。

解答例

(a) n が奇数ならば基底になる。n が偶数ならば基底にならない。

(b) 基底にならない。

(c) 行列 $A = \begin{pmatrix}1 & 1 & \dots & 1\\ & \ddots & \ddots & \vdots\\ & & 1 & 1\\ \mathrm{O} & & & 1\end{pmatrix}$ は正則だから γ は基底になる。また，γ-座標から β-座標への変換行列は A であり，β-座標から γ-座標への変換行列は $A^{-1} = \begin{pmatrix}1 & -1 & & \mathrm{O}\\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -1\\ \mathrm{O} & & & 1\end{pmatrix}$ である。

(d) $k = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$ とおく。γ が基底になるとすると，γ-座標から β-座標への変換行列は $A = \begin{pmatrix} k_1 - 1 & k_1 & \cdots & k_1 \\ k_2 & k_2 - 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & k_{n-1} \\ k_n & \cdots & k_n & k_n - 1 \end{pmatrix}$ である。第 2 行以降をすべて第 1 行に加えることにより，

$$\det A = \det \begin{pmatrix} k-1 & k-1 & k-1 & \cdots & k-1 \\ k_2 & k_2 - 1 & k_2 & \cdots & k_2 \\ k_3 & k_3 & k_3 - 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & k_{n-1} \\ k_n & k_n & \cdots & k_n & k_n - 1 \end{pmatrix} = (k-1)\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ k_2 & k_2 - 1 & k_2 & \cdots & k_2 \\ k_3 & k_3 & k_3 - 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & k_{n-1} \\ k_n & k_n & \cdots & k_n & k_n - 1 \end{pmatrix}$$

$$= (k-1)\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & -1 & & \mathrm{O} \\ & & \ddots & \\ \mathrm{O} & & & -1 \end{pmatrix} = (k-1)(-1)^{n-1}$$

となる。従って $k \neq 1$ のとき A は正則で，$k = 1$ のとき正則でない。

□

問題 6.28 (基底)**.**
a, b, c を互いに異なる K の要素とする。ベクトル空間 $K[x]_2$ において，$\gamma = ((x-a)^2, (x-b)^2, (x-c)^2)$ が基底になることを示せ。

解答例 $K[x]_2$ の基底として $\beta = (x^2, x, 1)$ を選ぶと行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2a & -2b & -2c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$$

により $\gamma = \beta A$ と書ける。

$$\det A = -2\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} = -2(c-a)(c-b)(b-a) \neq 0$$

となり A は正則だから，γ は基底になる。 □

問題 6.29 (基底)**.**
n 次元の複素ベクトル空間は，$2n$ 次元の実ベクトル空間とみなすことができる。$\mathbb{C}^2$ を 4 次元実ベクトル空間とみなしたときの基底を 1 組を与えよ。

6.4 空間の和と直和

定義 6.16. ベクトル空間 V の部分空間 $W_1, W_2, \ldots, W_r$ に対し，和 $W_1 + W_2 + \cdots + W_r$ を

$$W_1 + W_2 + \cdots + W_r \overset{\text{def}}{=} \{\vec{w}_1 + \vec{w}_2 + \cdots + \vec{w}_r \mid \vec{w}_1 \in W_1, \vec{w}_2 \in W_2, \ldots, \vec{w}_r \in W_r\}$$

と定める。部分空間の和は，また部分空間になる。$W = W_1 + W_2 + \cdots + W_r$ の要素 $\vec{w}$ を $\vec{w}_1 \in W_1, \vec{w}_2 \in W_2, \ldots, \vec{w}_r \in W_r$ の和 $\vec{w}_1 + \vec{w}_2 + \cdots + \vec{w}_r$ として書き表す方法がただ一通りのとき，W を W_1，$W_2, \cdots, W_r$ の**直和**といい，$W = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_r$ と記す。

問題 6.30 (部分空間の和)**.**
ベクトル空間 V の部分空間 W, W' に対して $W + W'$ がまた V の部分空間になることを証明せよ。
解答例 $\vec{0} = \vec{0} + \vec{0}$ と書け，$\vec{0} \in W, W'$ であるから，$\vec{0} \in W + W'$ である。$v_1, v_2 \in W + W'$ とすると，$w_1, w_2 \in W$ と $w_1', w_2' \in W'$ が存在して，$v_1 = w_1 + w_1', v_2 = w_2 + w_2'$ と書ける。$v_1 + v_2 = (w_1 + w_2) + (w_1' + w_2')$ であり，W, W' がそれぞれ部分空間だから $w_1 + w_2 \in W, w_1' + w_2' \in W'$ なので，$v_1 + v_2 \in W + W'$ である。また，スカラー c に対しては，$cv_1 = cw_1 + cw_1'$ であり，$cw_1 \in W, cw_1' \in W'$ なので，$cv_1 \in W + W'$ である。以上により，$W + W'$ は，$\vec{0}$ を含み和とスカラー倍について閉じていることが示されたので，部分空間である。 □

定理 6.17 (直和条件)**.** V をベクトル空間，W_1 と W_2 を V の部分空間とし，$W = W_1 + W_2$ とする。このとき，条件 $W = W_1 \oplus W_2$ と条件 $W_1 \cap W_2 = \{\vec{0}\}$ とは同値である。

定理 6.18 (和空間の次元公式)**.**

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

定義 6.19. V をベクトル空間とする。W を V の部分空間とするとき，$V = W \oplus W'$ となる空間を W の (V に対する) **補空間**と言う。補空間は一意には決まらないが，n 次元空間に対する m 次元部分空間の補空間は，$n - m$ 次元になる。

問題 6.31.
W_1，W_2 を V の部分空間とする。$W_1 + W_2 = W_1$ となるための必要十分条件は $W_2 \subset W_1$ であることを示せ。

問題 6.32.
W_1，W_2，W_3 を V の部分空間とする。

$$(W_1 \cap W_2) + W_3 \subset (W_1 + W3) \cap (W_2 + W_3), \quad (W_1 + W_2) \cap W_3 \supset (W_1 \cap W3) + (W_2 \cap W_3)$$

を示せ。逆向きの包含関係は一般には成立しない。$V = \mathbb{R}^2$ の場合に反例を示せ。

問題 6.33.
$W_1, \ldots, W_r$ を V の部分空間とする。$W = W_1 + \cdots + W_r$ に対して，次の条件が同値になることを示せ。

(a) $W = W_1 \oplus \cdots \oplus W_r$
(b) 任意の i について $W_i \cap (W_1 + \cdots + W_{i-1} + W_{i+1} + \cdots + W_r) = \{\vec{0}\}$ である。
(c) $\dim W = \dim W_1 + \cdots + \dim W_r$

問題 6.34.
V をベクトル空間とする。$\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n \in V$ が V の基底を成すための必要十分条件は $V = \mathrm{Span}(\vec{x}_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Span}(\vec{x}_n)$ であることを示せ。

問題 6.35 (行列空間の直和)**.**
K 上の n 次正方行列の全体 $\mathrm{M}(n,n;K)$ は，K 上 n^2 次元のベクトル空間を作る。n 次対称行列の全体 $W_s = \{A \in \mathrm{M}(n,n;K) \mid A^\top = A\}$ と n 次交代行列の全体 $W_a = \{A \in \mathrm{M}(n,n;K) \mid A^\top = -A\}$ について次の問いに答えよ。

(a)　W_s が $\mathrm{M}(n,n;K)$ の部分空間になることを示せ。
(b)　$W_s + W_a = \mathrm{M}(n,n;K)$ を示せ。ただし，部分空間 W と W' に対して $W+W'$ を $\{w+w' \mid w \in W, w' \in W'\}$ で定義する。
(c)　$W_s \cap W_a = \{\mathrm{O}\}$ を示せ。

解答例

(a)　まず明らかに $\mathrm{O} \in W_s$ である。$A, B \in W_s$ と仮定すると ${}^tA = A$ かつ ${}^tB = B$ である。よって ${}^t(A+B) = ({}^tA) + ({}^tB) = A + B, {}^t(cA) = c({}^tA) = cA$ より $A+B, cA \in W_s$ である。以上により W_s は部分空間である。
(b)　$W_s + W_a \subset \mathrm{M}(n,n;K)$ は明らかであるから $W_s + W_a \supset \mathrm{M}(n,n;K)$ を示す。任意の n 次正方行列 $A \in \mathrm{M}(n,n;K)$ に対して $B = (A +{}^t A)/2, C = (A -{}^t A)/2$ とおくと，明らかに ${}^tB = B, {}^tC = -C$ なので $B \in W_s, C \in W_a$ である。従って $A = B + C \in W_s + W_a$ である。
(c)　$W_s \cap W_a \supset \{\mathrm{O}\}$ は明らかであるから $W_s \cap W_a \subset \{\mathrm{O}\}$ を示す。$A \in W_s \cap W_a$ とすると，${}^tA = A = -A$ より $A = \mathrm{O}$ である。

□

6.5　線形写像

定義 6.20 (線形写像)**.**
ベクトル空間 U からベクトル空間 V への写像 f が**線形写像** (linear mapping) であるとは，次を満たすことを言う。

(LM1)　任意のベクトル $\vec{x} \in U$，$\vec{y} \in U$ に対して，$f(\vec{x}+\vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$ である。
(LM2)　任意のベクトル $\vec{x} \in U$ と任意のスカラー $k \in K$ に対して，$f(k\vec{x}) = kf(\vec{x})$ である。

U から V への線形写像の全体を $\mathrm{Hom}(U,V)$ と記す。V から V への線形写像を V 上の**線形変換** (linear tranformation) と呼び，その全体を $\mathrm{End}(V)$ と記す。すなわち $\mathrm{End}(V) = \mathrm{Hom}(V,V)$ である。

例 6.21 (線形写像の例)**.**

(a)　行列が表現する線形写像
A を $m \times n$ 行列とするとき，
$$L_A(\vec{x}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} A\vec{x}$$
で定義される L_A は，K^n から K^m への線形写像である。
(b)　合成写像
f を V_1 から V_2 への線形写像，g を V_2 から V_3 への線形写像とするとき，合成写像 $g \circ f$ は V_1 から V_3 への線形写像である。

(c) 恒等写像，零写像

V，W を任意のベクトル空間とする。V のすべてのベクトルを $\vec{0} \in W$ に写す写像を零写像と呼び $\mathbf{0}$ と記す。恒等写像 $\mathbf{id}_V$ と零写像 $\mathbf{0}$ は，線形写像である。

(d) 微分作用素

微分作用素 $D_x = \dfrac{d}{dx}$ は，$K[x]$ や $C^\infty([a,b],\mathbb{R})$ 上の線形変換である。また，$K[x]_{n+1}$ から $K[x]_n$ への，$C^{n+1}([a,b],\mathbb{R})$ から $C^n([a,b],\mathbb{R})$ への線形写像でもある。

(e) 数列の極限，総和

収束する数列 $\{a_i\}$ をその極限値 $\lim_{i\to\infty} a_i$ に対応させる写像は収束する数列の全体から $\mathbb{R}$ への線形写像である。また，写像 $\{a_i\} \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} a_i$ も和が絶対収束する数列全体から $\mathbb{R}$ への線形写像である。

問題 6.36.

上の例 (a)–(c) が線形変換であることを確かめよ。

解答例

(a) 任意のベクトル $\vec{x}, \vec{y} \in K^n$ と任意のスカラー $k \in K$ に対して，

$$L_A(\vec{x}+\vec{y}) = A(\vec{x}+\vec{y}) = A\vec{x} + A\vec{y} = L_A(\vec{x}) + L_A(\vec{y})$$
$$L_A(k\vec{x}) = A(k\vec{x}) = k(A\vec{x}) = kL_A(\vec{x})$$

である。

(b) 任意のベクトル $\vec{x}, \vec{y} \in V_1$ と任意のスカラー $k \in K$ に対して，

$$(f\circ g)(\vec{x}+\vec{y}) = f(g(\vec{x}+\vec{y})) = f(g(\vec{x}) + g(\vec{y})) = f(g((\vec{x})) + f(g((\vec{y})) = (f\circ g)(\vec{x}) + (f\circ g)(\vec{y})$$
$$(f\circ g)(k\vec{x}) = f(g(k\vec{x})) = f(kg(\vec{x})) = kf(g(\vec{x})) = k(f\circ g)(\vec{x})$$

である。

(c) 任意のベクトル $\vec{x}, \vec{y} \in V$ と任意の $k \in K$ に対して

$$\mathbf{id}_V(\vec{x}+\vec{y}) = \vec{x}+\vec{y} = \mathbf{id}_V(\vec{x}) + \mathbf{id}_V(\vec{y}), \quad \mathbf{id}_V(k\vec{x}) = k\vec{x} = k\mathbf{id}_V(\vec{x})$$
$$\mathbf{0}(\vec{x}+\vec{y}) = \vec{0} = \vec{0}+\vec{0} = \mathbf{0}(\vec{x}) + \mathbf{0}(\vec{y}), \quad \mathbf{0}(k\vec{x}) = \vec{0} = k\vec{0} = k\mathbf{0}(\vec{x})$$

である。 □

定義 6.22 (像と核)**.**

f を V から U への線形写像とする。数ベクトル空間 K^n の場合（定義 5.4）と同様に，f の**像** $\operatorname{Im} f$ と**核** $\operatorname{Ker} f$ を

$$\operatorname{Im} f \stackrel{\text{def}}{=} f(V) = \{f(\vec{x}) \in V \mid \vec{x} \in U\}, \quad \operatorname{Ker} f \stackrel{\text{def}}{=} f^{-1}(\vec{0}) = \{\vec{x} \in U \mid f(\vec{x}) = \vec{0}\}$$

で定義する。

定義 6.23 (同型写像)**.**

線形写像 $f : U \longrightarrow V$ が全単射であるとき，f は**同型写像** (isomorphism) であるという。このとき U と V は**同型** (isomorphic) だといい，$U \simeq V$ と記す。逆写像 f^{-1} も同型写像だから $V \simeq U$ でもある。

定理 6.24 (次元と同型性)**.**
K 上の n 次元ベクトル空間は，K^n と同型である。よって，(K 上の) n 次元ベクトル空間はどれも互いに同型である。

問題 6.37. f を ベクトル空間 V から W への線形写像とする。 次を示せ。

(a) $f(\vec{0}) = \vec{0}$ である。
(b) $\mathrm{Im}\, f$ は W の部分空間である。
(c) $\mathrm{Ker}\, f$ は V の部分空間である。
(d) f が単射であるための必要十分条件は，$\mathrm{Ker}\, f = \{\vec{0}\}$ となることである。

解答例

(a) $f(\vec{0}) = f(0\,\vec{0}) = 0f(\vec{0}) = \vec{0}$
(b)
(c)
(d) f が単射とする。(a) より $\mathrm{Ker}\, f \supset \{\vec{0}\}$ 明らかである。$vecx \in \mathrm{Ker}\, f$ すなわち $f(vecx) = \vec{0}$ とすると $f(\vec{0}) = \vec{0}$ と f が単射ということより，$\vec{x} = \vec{0}$ である。ゆえに $\mathrm{Ker}\, f \subset \{\vec{0}\}$ である。逆に $\mathrm{Ker}\, f = \{\vec{0}\}$ とする。$f(\vec{x}) = f(\vec{y})$ とすると，$\vec{0} = f(\vec{x}) - f(\vec{y}) = f(\vec{x} - \vec{y})$ だから，$\vec{x} - \vec{y} = \vec{0}$ である。よって，f はである。

□

問題 6.38 (線形写像)**.**
V を無限回微分可能な実数値関数の全体 $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ とし，線形変換 $S, T \in \mathrm{End}(V)$ を

$$(Sf)(x) \overset{\mathrm{def}}{=} xf(x), \quad (Tf)(x) \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{df}{dx}(x)$$

で定義するとき，$TS - ST$ は V 上の恒等写像になることを証明せよ。

問題 6.39 (単射，基底，線形独立性)**.**
$f : V \longrightarrow W$ を線形変換とする。f が単射であり，$(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n)$ が V の基底ならば，$f(\vec{v}_1), f(\vec{v}_2), \ldots, f(\vec{v}_n)$ が線形独立であることを示せ。
解答例 $k_1 f(\vec{v}_1) + k_2 f(\vec{v}_2) + \cdots + k_n f(\vec{v}_n) = \vec{0}$ を仮定し，$k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$ を示せばいい。f の線形性より，

$$f(k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 + \cdots + k_n\vec{v}_n) = k_1 f(\vec{v}_1) + k_2 f(\vec{v}_2) + \cdots + k_n f(\vec{v}_n) = \vec{0}$$

であるが，f は単射だから，

$$k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 + \cdots + k_n\vec{v}_n = \vec{0}$$

でなければならない。$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ は，基底を成すので線形独立であり，したがって $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$ である。 □

問題 6.40 (線形写像と像の線形独立性)**.**
U と V をベクトル空間，$f : U \to V$ を線形写像とする。$\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_r \in V$ について，$f(\vec{x}_1), \ldots, f(\vec{x}_r) \in V$

が線形独立なら $\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_r \in V$ も線形独立であることを示せ。逆は必ずしも成り立たないことを示す反例を $U=V=\mathbb{R}$ の場合に作れ。

問題 6.41 (線形写像).
次で定義される写像 $f,g:\mathrm{M}(n,n;K)\to K$ が線形写像かどうかを判定せよ。

$$f(A)=\operatorname{Tr}A,\quad g(A)=\det A$$

解答例　明らかに
$$\operatorname{Tr}(A+B)=\operatorname{Tr}A+\operatorname{Tr}B,\quad \operatorname{Tr}(kA)=k(\operatorname{Tr}A)$$
だから f は線形写像である。一方
$$\det(kA)=k^n(\det A)$$
だから $n>1$ なら g は線形写像でない。$n=1$ のときは $\det A=A$ だから，g は線形写像である。 □

問題 6.42 (同型).
V を n 次元ベクトル空間，β をその基底の 1 つとする。$\vec{v}\in V$ に対して $f_\beta(\vec{v})\in K^n$ を $\vec{v}$ の β-座標と定めると，f_β は V から K^n への同型写像であることを示せ。
解答例　$\beta=(\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n)$ とする。$f_\beta(\vec{v})=(k_1,\dots,k_n)^\top$，$f_\beta(\vec{v}')=(k_1',\dots,k_n')^\top$ とすれば，f_β の定義より，これは,
$$\vec{v}=k_1\vec{v}_1+\cdots+k_n\vec{v}_n,\quad \vec{v}'=k_1'\vec{v}_1+\cdots+k_n'\vec{v}_n$$
だということに他ならない。したがって,
$$\vec{v}+\vec{v}'=(k_1+k_1')\vec{v}_1+\cdots+(k_n+k_n')\vec{v}_n,\quad k\vec{v}=kk_1\vec{v}_1+\cdots+kk_n'\vec{v}_n$$
だから,
$$f_\beta(\vec{v}+\vec{v}')=f_\beta(\vec{v})+f_\beta(\vec{v}'),\quad f_\beta(k\vec{v})=kf_\beta(\vec{v})$$
である。ゆえに f_β は線形写像である。また，任意の $(k_1,\dots,k_n)^\top\in K^n$ に対して，$f_\beta(\vec{v})=(k_1,\dots,k_n)^\top$ となる $\vec{v}=k_1\vec{v}_1+\cdots+k_n\vec{v}_n$ が存在するので f_β は全射であり，そのような $\vec{v}$ はただひとつであるから f_β は単射でもある。 □

問題 6.43.
次で定義される $\mathrm{M}(n,n;K)$ 上の線形変換 f と g の核と像を求めよ。

$$f(A)=A^\top-A,\quad g(A)=A^\top+A,$$

問題 6.44 (核，基底 (平成 21 年度筑波大学大学院数理物質科学研究科入試)).
3 次元実 ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ のベクトル

$$\vec{u}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\quad \vec{u}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\quad \vec{u}_3=\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix},\quad \vec{v}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\quad \vec{v}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\quad \vec{v}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

を考える。

(a)　$\vec{u}_1$，$\vec{u}_2$，$\vec{u}_3$ は 1 次従属であり，$\vec{v}_1$，$\vec{v}_2$，$\vec{v}_3$ は $\mathbb{R}^3$ の基底であることを示せ。
(b)　線形写像 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ を $f(\vec{v}_i)=\vec{u}_i$ で定める。$\vec{v}_1$，$\vec{v}_2$，$\vec{v}_3$ を用いて Ker f の基底を表せ。

問題 6.45.
$C^\infty([a,b],\mathbb{R})$ を区間 $[a,b]$ で何回でも微分可能な実数値関数の全体とする。$D(f(x)) = \dfrac{d}{dx}f(x)$ で定義される微分作用素 D は $C^\infty([a,b],\mathbb{R})$ 上の線形変換であることを示せ。$\mathrm{Ker}\,D$ と $\mathrm{Im}\,D$ を求めよ。

問題 6.46.
$C([a,b],\mathbb{R})$ を $[a,b]$ で連続な全体とする。$I(f(x)) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ で定義される積分作用素 I は $C([a,b],\mathbb{R})$ 上の線形変換であることを示せ。

問題 6.47 (核，直和)**.**
$k \geq 2$ とする。$\mathrm{Ker}\, f^k = \mathrm{Ker}\, f^{k-1} \oplus W$ のとき，次を証明せよ。

(a) $f(W) \subset \mathrm{Ker}\, f^{k-1}$
(b) $f, f^2, \ldots, f^{k-1}$ の W への制限 $f|_W$，$f^2|_W, \ldots, f^{k-1}|_W$ はどれも単射である。
(c) $f(W) \cap \mathrm{Ker}\, f^{k-2} = \{\vec{0}\}$

解答例

(a) 条件より $W \subset \mathrm{Ker}\, f^k$ だから，明らか。
(b) $1 \leq i \leq k-1$ とする。$f^i(\vec{w}) = \vec{0}$，$\vec{w} \in W$ ならば，$\vec{w} \in \mathrm{Ker}\, f^i \cap W \subset \mathrm{Ker}\, f^{k-1} \cap W = \{\vec{0}\}$ より，$\vec{w} = \vec{0}$ である。
(c) $\vec{x} \in f(W) \cap \mathrm{Ker}\, f^{k-2}$ に対して $f(\vec{w}) = \vec{x}$ なる $\vec{w} \in W$ をとると，$f^{k-1}(\vec{w}) = f^{k-2}(\vec{x}) = \vec{0}$ だから，$\vec{w} \in \mathrm{Ker}\, f^{k-1} \cap W = \{\vec{0}\}$ である。よって $\vec{x} = f(\vec{w}) = \vec{0}$ である。

□

問題 6.48 (べき等変換，直和)**.**
ベクトル空間 V 上の線形変換 f が，任意の $\vec{x} \in V$ に対して $f(f(\vec{x})) = f(\vec{x})$ なる性質を持つとするとき，

$$V = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{knl}(f)$$

を示せ。

解答例　$\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$ である。なぜなら，$\vec{x} \in \mathrm{Im}(f)$ とすると，$\vec{y} \in V$ が存在して $f(\vec{y}) = \vec{x}$ である。よって，さらに $\vec{x} \in \mathrm{Ker}(f)$ とすると，

$$\vec{x} = f(\vec{y}) = f(f(\vec{y})) = f(\vec{x}) = \vec{0}$$

となる。また，$\mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(f) = V$ である。なぜなら，任意に $\vec{v} \in V$ をとると，

$$f(\vec{v} - f(\vec{v})) = f(\vec{v}) - f(f(\vec{v})) = f(\vec{v}) - f(\vec{v}) = \vec{0}$$

より，$\vec{v} - f(\vec{v}) \in \mathrm{Ker}(f)$ である。よって，$\vec{v} = f(\vec{v}) + (\vec{v} - f(\vec{v})) \in \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(f)$ である。 □

定義 6.25 (表現行列)**.**
$f : U \longrightarrow V$ を線形写像とする。ベクトルを横に並べた列 $\delta = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_r)$ に対して，$(f(\vec{x}_1), \ldots, f(\vec{x}_r))$ を $f\delta$ と略記する。$\beta = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)$ を U の基底の 1 つ，$\gamma = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m)$ を V の基底の 1 つとするとき，

$$f\beta = (f(\vec{u}_1),\ f(\vec{u}_2), \ldots, f(\vec{u}_n)) = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m)A = \gamma A$$

なる $m \times n$ 行列 A がただ 1 つ定まる。A を (基底 $\beta = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n)$，基底 $\gamma = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m)$ に関する) f の**表現行列**という。一般に，$n \times l$ 行列 M に対して

$$f(\beta M) = (f\beta)M = (\gamma A)M = \gamma(AM)$$

が成立する。特に $V = U$ のとき，線形変換 $f : V \to V$ の基底 β，β に関する表現行列を，線形変換 f の基底 β に関する**表現行列**と呼ぶ。

定義 5.2 で述べたように，線形写像 $f : K^n \to K^m$ の標準基底に関する表現行列を（本稿では）特に f の**行列表示**と呼ぶ。

問題 6.49 (零写像の表現行列)**.**
零写像 $\mathbf{0} : U \to V$ の表現行列は，基底にかかわらず零行列であることを示せ。
解答例　$\beta = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n)$ を U の任意の基底，$\gamma = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m)$ を V の任意の基底とする。

$$\mathbf{0}\beta = (\mathbf{0}(\vec{u}_1),\ \mathbf{0}(\vec{u}_2), \dots, \mathbf{0}(\vec{u}_n)) = (\vec{0}, \vec{0}, \dots, \vec{0}) = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m)\mathrm{O}_{m\times n} = \gamma\mathrm{O}_{m\times n}$$

だから零写像の表現行列は零行列である。 □

問題 6.50 (恒等写像の表現行列)**.**
V を n 次元ベクトル空間，β を V の基底の 1 つとする。恒等写像 $\mathbf{id}_V$ の β に関する表現行列は，β にかかわらず単位行列 E_n であることを示せ。
解答例　$\beta = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$ とする。

$$\mathbf{id}_V(\beta) = (\mathbf{id}_V(\vec{v}_1),\ \mathbf{id}_V(\vec{v}_2), \dots, \mathbf{id}_V(\vec{v}_n)) = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n) = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)\mathrm{E}_n = \beta\mathrm{E}_n$$

である。 □

問題 6.51 (合成写像の表現行列)**.**
ベクトル空間 U，V，W の基底を 1 つ定め，それぞれ α，β，γ とする。線形写像 $f : U \longrightarrow V$ の α，β に関する表現行列を F，線形写像 $g : V \longrightarrow W$ の β，γ に関する表現行列を G とするとき，合成写像 $g \circ f : U \longrightarrow W$ の α，γ に関する表現行列を F と G で表せ。
解答例　$f\alpha = \beta F$，$g\beta = \gamma G$ より求める表現行列は GF であることが

$$(g \circ f)\alpha = g(f\alpha) = g(\beta F) = (g\beta)F = \gamma GF$$

より分かる。 □

問題 6.52 (基底の変換と表現行列)**.**
U，V をベクトル空間，$f : U \longrightarrow V$ を線形写像とする。$\beta = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n)$ と $\beta' = (\vec{u}'_1, \vec{u}'_2, \dots, \vec{u}'_n)$ とを U の基底，$\gamma = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m)$ と $\gamma' = (\vec{v}'_1, \vec{v}'_2, \dots, \vec{v}'_m)$ とを V の基底とする。A を β，γ に関する f の表現行列，B を β'，γ' に関する f の表現行列，すなわち

$$f(\beta) = (f(\vec{u}_1),\ f(\vec{u}_2), \dots, f(\vec{u}_n)) = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m)A = \gamma A$$
$$f(\beta') = (f(\vec{u}'_1),\ f(\vec{u}'_2), \dots, f(\vec{u}'_n)) = (\vec{v}'_1, \vec{v}'_2, \dots, \vec{v}'_m)B = \gamma' B$$

とする。また，β'-座標から β-座標への変換行列を P，γ'-座標から γ-座標への変換行列を Q, すなわち

$$\beta' = (\vec{u}'_1, \vec{u}'_2, \dots, \vec{u}'_n) = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n)P = \beta P$$
$$\gamma' = (\vec{v}'_1, \vec{v}'_2, \dots, \vec{v}'_m) = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m)Q = \gamma Q$$

とする。このとき $B = Q^{-1}AP$ が成り立つことを示せ。

定義 6.26 (階数と退化次数)**.** $f : U \to V$ を線形写像とする。f の**階数** $\operatorname{rank} f$ と**退化次数** $\operatorname{null} f$ を

$$\operatorname{rank} f \overset{\text{def}}{=} \dim(\operatorname{Im} f), \quad \operatorname{null} f \overset{\text{def}}{=} \dim(\operatorname{Ker} f)$$

で定義する。

定理 6.27 (ランクの一致)**.** A を $m \times n$ 行列とする。線形写像 $L_A : K^n \to K^m$ に対して, $\operatorname{rank} L_A = \operatorname{rank} A$ が成り立つ。

定理 6.28 (次元定理)**.** 線形写像 $f : U \to V$ に対して

$$\operatorname{rank} f + \operatorname{null} f = \dim U$$

が成り立つ。従って，線形写像 f の (ある基底に関する) 表現行列が $m \times n$ 行列 A だとすると，(基底にかかわらず) $\operatorname{rank} f = \operatorname{rank} A$ かつ $\operatorname{null} f = m - \operatorname{rank} A$ である。

定理 6.29 (単射，全射，同型写像)**.** 線形写像 $f : U \longrightarrow V$ に対して

$$\begin{aligned} f \text{ が単射} &\iff \operatorname{Ker} f = \{\vec{0}\} \iff \operatorname{null} f = 0 \iff \operatorname{rank} f = \dim U \\ f \text{ が全射} &\iff \operatorname{Im} f = V \iff \operatorname{null} f = \dim U - \dim V \iff \operatorname{rank} f = \dim V \end{aligned}$$

が成立する。さらに $\dim U = \dim V = n$ ならば,

$$f \text{ が同型写像} \iff \operatorname{Ker} f = \{\vec{0}\} \iff \operatorname{null} f = 0 \iff \operatorname{rank} f = n \iff \operatorname{Im} f = V$$

である。

問題 6.53 (表現行列)**.**
f を次で定義される $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への線形変換とする。

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y - 3z \\ x - y + z \\ -x + 2y + 5z \end{pmatrix}$$

基底 $\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ に関する f の表現行列を求めよ。

解答例　標準基底に対する f の表現行列は，明らかに

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

であり，β-座標から標準座標への変換行列とその逆行列は,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

だから，求める表現行列は，

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1 & -3\\ 1 & -1 & 1\\ -1 & 2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\ 2 & -1 & -5\\ -1 & 1 & 6\end{pmatrix}$$

である。 □

問題 6.54 (表現行列，フィボナッチ数列)**.**
$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ を満たす数列 $\{a_n\}$ を広義のフィボナッチ数列と呼ぶ。広義のフィボナッチ数列の全体を W とするとき，

(a) W が数列全体の空間 $K^{\mathbb{N}}$ の部分空間となることを示せ。

(b) $f_0 = 0, f_1 = 1, f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ で定義される数列 $\vec{v}_1 = \{f_n\}$ を (狭義の) フィボナッチ数列という。これから初項を除いた数列，すなわち $g_n = f_{n+1}$ で定義される数列 $\vec{v}_2 = \{g_n\}$ もまた広義のフィボナッチ数列であるが，$\beta = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ が W の基底になることを証明せよ。

(c) $l_0 = 2, l_1 = 1, l_{n+2} = l_{n+1} + l_n$ で定義される数列 $\{l_n\}$ をリュカ数列と呼ぶ。リュカ数列の β-座標を求めよ。

(d) 広義のフィボナッチ数列の初項を除いた結果は明らかにまた広義のフィボナッチ数列になるが，初項を除く操作 g は，W 上の線形変換であることを示し，基底 β に関する g の表現行列を求めよ。

問題 6.55 (行列変換の表現行列)**.**
$\mathrm{Tr}\ X = 0$ であるような 2 次正方行列 X の全体を V とする。

(a) V は 2 次正方行列の全体が作るベクトル空間 $\mathrm{M}(2,2;\mathbb{R})$ の部分空間であることを証明せよ。

(b) V の基底を 1 組求めよ。

(c) 2 次正則行列 A に対して，$f(X) = A^{-1}XA$ と定義するとき，f が V 上の線形変換であることを示せ。

(d) $A = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ のとき，(b) で求めた基底に関する f の表現行列を求めよ。

解答例

(a) $\mathrm{Tr}(A+B) = (\mathrm{Tr}\ A) + (\mathrm{Tr}\ B)$，$\mathrm{Tr}(kA) = k(\mathrm{Tr}\ A)$ より明らかである。

(b) V の要素は，一般に $\begin{pmatrix}a & b\\ c & -a\end{pmatrix}$ と書ける。よって，たとえば，$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ を基底に取れる。

(c) $\mathrm{Tr}\,(f(X)) = \mathrm{Tr}\,(A^{-1}XA) = \mathrm{Tr}\,(AA^{-1}X) = \mathrm{Tr}\,X$ だから，f は V から V への写像である。線型性は，$A^{-1}(X+Y)A = A^{-1}XA + A^{-1}YA$ と $A^{-1}(aX)A = a(A^{-1}XA)$ より明らか。

(d)　$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ だから，

$$A^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$A^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$A^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

となる。よって表現行列は $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ である。

□

問題 6.56 (行列変換の表現行列)**.**
$\mathrm{M}(3,3;K)$ を 3 次正方行列の全体，W を 3 次の交代行列の全体とする。
(a)　$\mathrm{M}(3,3;K)$ は，明らかに K 上 9 次元のベクトル空間をなすが，W がその部分空間であることを示し，W の基底を 1 組求めよ。
(b)　3 次正方行列 A に対して，$f(X) = A^\top XA$ と定義するとき，f が W 上の線形変換であることを示せ。
(c)　$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ のとき，(a) で求めた基底に関する f の表現行列を求めよ。

解答例

(a)　W の要素は，一般に $\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$ と書ける。よって，たとえば，

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

を基底に取れる。
(b)　X が交代行列ならば，$f(X)^\top = (A^\top XA)^\top = A^\top X^\top A = A^\top(-X)A = -(A^\top XA) = -f(X)$ だから，$f(X)$ も交代行列である。線型性は，$A^\top(X+Y)A = A^\top XA + A^\top YA$，$A^\top(kX)A = k(A^\top XA)$ より明らか。
(c)　f によって基底ベクトルがどのように変換されるかを見てみると

$$f(M_1) = M_3, \quad f(M_2) = \mathrm{O}, \quad f(M_3) = \mathrm{O}$$

であるから，M_1, M_2, M_3 に関する f の表現行列は $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ である。実際，

$$(f(M_1), f(M_2), f(M_3)) = (M_3, \mathrm{O}, \mathrm{O}) = (M_1, M_2, M_3)B$$

と書ける。 $\square$

問題 6.57 (行列変換の表現行列)**.**

2 次の上三角行列の全体 W は，2 次正方行列の全体 $\mathrm{M}(2,2;K)$ の部分空間をなす。$B_1 = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}$，$B_3 = \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}$ とする。

(a) $\beta = (B_1, B_2, B_3)$ が W の基底になることを示せ。

(b) $A = \begin{pmatrix}1 & -2\\0 & 3\end{pmatrix}$ とするとき，$f(X) = AX$ で定まる W 上の線形変換を f とする。基底 β に関する f の表現行列を求めよ。

問題 6.58 (表現行列)**.**

$\mathbb{R}[x]_3$ 上の線形変換 T と T_a を $(Tf)(x) \stackrel{\text{def}}{=} f'(x), (T_af)(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x+a)$ で定義する。

(a) 基底 $\langle 1, x, x^2, x^3\rangle$ に関する T, T_a の表現行列 P, P_a を求めよ。

(b) P_a を E, P, P^2, P^3 の線形結合で表せ。

解答例

(a)

$$P = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 2 & 0\\0 & 0 & 0 & 3\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \quad P_a = \begin{pmatrix}1 & a & a^2 & a^3\\0 & 1 & 2a & 3a^2\\0 & 0 & 1 & 3a\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

である。実際，

$$(T1, Tx, Tx^2, Tx^3) = (0, 1, 2x, 3x^2) = (1, x, x^2, x^3)P$$
$$(T_a1, T_ax, T_ax^2, T_ax^3) = (1, x+a, x^2+2ax+a^2, x^3+3ax^2+3a^2x+a^3) = (1, x, x^2, x^3)P_a$$

(b)

$$P^2 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 2 & 0\\0 & 0 & 0 & 6\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \quad P^3 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 6\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

だから

$$P_a = \mathrm{E} + aP + \frac{a^2}{2}P^2 + \frac{a^3}{6}P^3$$

$\square$

問題 6.59.

線形写像 $f : U \to V$ について次の条件が同値になることを示せ。

(a) f は同型写像である。

(b) U の任意の基底 β と V の任意の基底 γ に対して β, γ に関する f の表現行列が正則になる。

(c) U のある基底 β と V のある基底 γ に対して β，γ に関する f の表現行列が正則になる。

(d) U の任意の基底 β に対して，$f(\beta)$ が V の基底になる。

(e) U のある基底 β に対して，$f(\beta)$ が V の基底になる。

問題 6.60 (表現行列).
$\mathbb{R}[x]_2$ 上の線形変換 T と S を

$$(Tf)(x) \overset{\text{def}}{=} \int_{-1}^{1} (x-t)^2 f(t)\,dt, \quad (Sf)(x) \overset{\text{def}}{=} e^x \frac{d}{dx}(e^{-x} f(x))$$

で定義する。基底 $\langle 1, x, x^2 \rangle$ に関する T, S の表現行列を求めよ。

解答例 T の表現行列は $\begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 2/5 \\ 0 & -4/3 & 0 \\ 2 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}$, S の表現行列は $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ である。 □

問題 6.61 (階数 (平成 21 年度筑波大学大学院数理物質研究科入試)).
互いに線形独立なベクトル $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)^\top \in \mathbb{R}^n$，$\vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ に対して $n \times n$ 行列 A を $A = \vec{a}\vec{b}^\top + \vec{b}\vec{a}^\top$ で定める。

(a) $A\vec{a}, A\vec{b}$ をそれぞれ $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の線形結合で表せ。
(b) $\operatorname{rank} A = 2$ を示せ。

問題 6.62 (線形変換，核，像，次元).
n 次正方行列の全体 $\mathrm{M}(n, n; \mathbb{R})$ は n^2 次元のベクトル空間を作る。$f(A) = A + A^\top$ で定義される写像 f が $\mathrm{M}(n, n; \mathbb{R})$ 上の線形変換になることを示せ。$\operatorname{Im} f$ と $\operatorname{Ker} f$ がどういう行列からなるかを述べ，$\operatorname{rank} f (= \dim \operatorname{Im} f)$ と $\operatorname{null} f (= \dim \operatorname{Ker} f)$ を求めよ。

問題 6.63.
n 次正方行列の全体 $\mathrm{M}(n, n; \mathbb{R})$ は n^2 次元のベクトル空間を作る。$f(A) = A + A^\top$ で定義される写像 f が $\mathrm{M}(n, n; \mathbb{R})$ 上の線形変換になることを示せ。$\operatorname{Im} f$ と $\operatorname{Ker} f$ がどういう行列からなるかを述べ，$\operatorname{rank} f (= \dim \operatorname{Im} f)$ と $\operatorname{null} f (= \dim \operatorname{Ker} f)$ を求めよ。
解答例 線形変換になることは，A が n 正方行列なら $f(A)$ も n 次正方行列になること，および

$$(A+B) + (A+B)^\top = (A + A^\top) + (B + B^\top), \quad kA + (kA)^\top = k(A + A^\top)$$

となることより明らか。

$\operatorname{Im} f$ は対称行列の全体で，$\operatorname{rank} f = \dfrac{n(n+1)}{2}$ である。実際，

$$f(A)^\top = (A + A^\top)^\top = A^\top + A = f(A)$$

であり，逆に $B = B^\top$ ならば，$A = \dfrac{1}{2}B$ とすれば

$$f(A) = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}B^\top = B$$

である。$\operatorname{Ker} f$ は，

$$f(A) = \mathrm{O} \Longleftrightarrow A^\top = -A$$

より交代行列 (歪対称行列) の全体で， $\operatorname{null} f = \dfrac{n(n-1)}{2}$ である。 □

問題 6.64.
次の線形写像 f，g，h が同型写像であるかどうかを判定せよ。

$$f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x_1+x_2\\-x_1+3x_2\end{pmatrix},\quad g\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x_1-x_2\\4x_1-2x_2\end{pmatrix},\quad h\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1-5x_2\\2x_1+7x_2-x_3\\-4x_2+9x_3\end{pmatrix},$$

解答例　f は同型である。g は同型でない。h は同型である。 □

問題 6.65.
線形写像 $f:U\to V$ と $g:V\to W$ に対し，

$$\operatorname{rank}(g\circ f)\le\operatorname{rank}g,\quad \operatorname{rank}(g\circ f)\le\operatorname{rank}f$$

を示せ。

解答例　$\operatorname{Im}(g\circ f)\subset\operatorname{Im}g$ だから，$\operatorname{rank}(g\circ f)=\dim\operatorname{Im}(g\circ f)\le\dim\operatorname{Im}g=\operatorname{rank}g$ である。g の $\operatorname{Im}f$ への制限 $g|_{\operatorname{Im}f}:\operatorname{Im}f\to W$ を考えると，次元定理により

$$\operatorname{rank}f=\dim\operatorname{Im}f=\operatorname{rank}g|_{\operatorname{Im}f}+\operatorname{null}\ g|_{\operatorname{Im}f}\ge\operatorname{rank}g|_{\operatorname{Im}f}=\operatorname{rank}(g\circ f)$$

□

問題 6.66.
線形写像 $f:U\to V$ と $g:U\to V$ に対し，

$$\operatorname{rank}(g+f)\le\operatorname{rank}g+\operatorname{rank}f$$

を示せ。

6.6 商空間

定義 6.30 (商ベクトル空間)**.**
V を K 上の ベクトル空間，W をその部分空間とする。$\vec{x}\in V$ に対して集合 $X=\{\vec{x}+\vec{w}\mid\vec{w}\in W\}$ を考えると，X は次を満足する。

(RC1)　$X\neq\emptyset$
(RC2)　$\vec{y},\vec{z}\in X$ ならば $\vec{y}-\vec{z}\in W$
(RC3)　$\vec{y}\in X,\vec{w}\in W$ ならば $\vec{y}+\vec{w}\in X$

逆に (RC1)–(RC3) を満足する集合 X があれば，$\vec{x}\in X$ を任意に選んで，$X=\{\vec{x}+\vec{w}\mid\vec{w}\in W\}$ と書ける。この X は $\vec{x}$ を定めることで決まるから，$[\vec{x}]$ （あるいは W を明記したい場合 $\vec{x}+W$，$[\vec{x}]_W$ など）と記す。また (RC1)–(RC3) を満足する集合 X の全体を V/W と記し，**商ベクトル空間**と呼ぶ。商ベクトル空間は和とスカラー倍を

$$[\vec{x}]+[\vec{y}]\overset{\text{def}}{=}[\vec{x}+\vec{y}],\quad k[\vec{x}]\overset{\text{def}}{=}[k\vec{x}]$$

で定義することで K 上のベクトル空間になる。任意の $\vec{x},\vec{y}\in V$ について，$[\vec{x}]=[\vec{y}]$ または $[\vec{x}]\cap[\vec{y}]=\emptyset$ のどちらかであり，$[\vec{x}]=[\vec{y}]$ であるための必要十分条件は $\vec{x}-\vec{y}\in W$ である。$\vec{x}\mapsto[\vec{x}]$ で定義される V から V/W への写像 ϕ は線形写像であり，ϕ を**自然な線形写像**と呼ぶ。

定理 6.31.
W が V の部分空間のとき，V/W は W の補空間と同型であり，$\dim(V/W) = \dim V - \dim W$ が成り立つ。

証明: 自然な線形写像 $\phi : V \to V/W$ を考えると，$\operatorname{Ker}\phi = W$，$\operatorname{Im}\phi = V/W$ であるから，次元定理より $\dim V = \operatorname{null}\phi + \operatorname{rank}\phi = \dim W + \dim(V/W)$ である。実際，基底の補充定理により，W の基底 $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r)$ を補充して，V の基底 $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r, \vec{v}_{r+1}, \ldots, \vec{v}_n)$ が作れるが，このとき $W' = \operatorname{Span}(\vec{v}_{r+1}, \ldots, \vec{v}_n)$ は W の補空間となる。 □

系 6.32 (同型定理)**.**
f をベクトル空間 U から V への線形写像とする。このとき $U/\operatorname{Ker} f \simeq \operatorname{Im} f$ が成り立つ。特に，f が全射なら $U/\operatorname{Ker} f \simeq V$ である。さらに V' を V の部分空間とし，$U' = f^{-1}(V')$ とすれば，U' は U の部分空間で $U/U' \simeq V/V'$ である。また，W を V のもうひとつの部分空間とすれば $(V+W)/W \simeq V/(V \cap W)$ である。さらに $W \subset V$ ならば V/W は U/W の部分空間であり，$(U/W)/(V/W) \simeq U/V$ である。

証明: 定理 6.24 により，どれも次元が等しいことだけ確認すれば良い。

まず，次元定理より $\dim(U/\operatorname{Ker} f) = \dim U - \dim(\operatorname{Ker} f) = \dim(\operatorname{Im} f)$ である。さらに $\operatorname{Im} f = V$ ならば

$$\dim(U/U') = \dim U - \dim U' = (\dim U - \operatorname{null} f) - (\dim U' - \operatorname{null} f) = \dim V - \dim V' = \dim(V/V')$$

である。また，

$$\dim((V+W)/W) = \dim(V+W) - \dim(W) = \dim(V) - \dim(V \cap W) = \dim(V/\dim(V \cap W))$$

である。さらに $W \subset V$ ならば，

$$\dim((U/W)/(V/W)) = (\dim U - \dim W) - (\dim V - \dim W) = \dim U - \dim V = \dim(U/V)$$

である。実際，

$$\begin{gathered}
\vec{u} + \operatorname{Ker} f \in U/\operatorname{Ker} f \mapsto f(\vec{u}) \in \operatorname{Im} f, \\
\vec{u} + U' \in U/U' \mapsto f(\vec{u}) + V' \in V/V', \\
\vec{v} + \vec{w} + W \in (V+W)/W \mapsto \vec{v} + (V \cap W) \in V/(V \cap W), \\
(\vec{u} + W) + (V/W) \in (U/W)/(V/W) \mapsto \vec{u} + V \in U/V
\end{gathered}$$

が各同型における自然な同型写像となる。 □

6.7 双対空間

定義 6.33. U，V を K 上のベクトル空間とするとき，f，$g \in \operatorname{Hom}(V, U)$ の和とスカラー倍を

$$(f+g)\vec{x} = f(\vec{x}) + g(\vec{x}), \quad (kf)\vec{x} = k(f(\vec{x}))$$

で定義することで，$\operatorname{Hom}(V, U)$ も K 上のベクトル空間になる。特に $U = K$ の場合，すなわち $\operatorname{Hom}(V, K)$ を V の**双対空間**と呼び V^* と記す。$\beta = (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$ を V の基底の 1 つとすれば，$V^* = \operatorname{Hom}(V, K)$ の元 f は，各 $f(\vec{v}_i)$ の値を定めることにより，一意に決まるので，$f_1, \ldots, f_n \in V^*$ を $f_j(\vec{v}_i) \overset{\text{def}}{=} [i = j]$ で

定める。このとき $(f_1,\dots,f_n)$ は V^* の基底となる。これを β の**双対基底**と呼び，β^* と記す。したがって，$\dim V^* = \dim V$ である。当然，$\dim V^{**} = \dim V$ でもあるが，$\delta : V \to V^{**}$ を $(\delta\vec{v})f \overset{\text{def}}{=} f(\vec{v})$ で定義すると，δ は同型写像となる。

6.8 計量ベクトル空間

この節では，K は一般の体ではなく，実数体 $\mathbb{R}$ または複素数体 $\mathbb{C}$ と考える。

定義 6.34 (内積，ノルム)**.**
V を K 上のベクトル空間とする。V の任意の 2 要素 $\vec{x}$ と $\vec{y}$ に対して**内積** (inner product) と呼ばれる K の要素 $\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle$ が定義され，次を満たすとき，V を K 上の**計量ベクトル空間** (あるいは **内積空間**) と呼ぶ。

(IP1)　任意の $\vec{x},\vec{y},\vec{z} \in V$ に対して $\langle \vec{x}+\vec{y} \mid \vec{z} \rangle = \langle \vec{x} \mid \vec{z} \rangle + \langle \vec{y} \mid \vec{z} \rangle$ である。
(IP2)　任意の $k \in K$ と任意の $\vec{x},\vec{y} \in V$ に対して $\langle k\vec{x} \mid \vec{y} \rangle = k\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle$ である。
(IP3)　任意の $\vec{x},\vec{y} \in V$ に対して $\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle = \overline{\langle \vec{y} \mid \vec{x} \rangle}$ である。
(IP4)　任意の $\vec{x} \in V$ に対して $\langle \vec{x} \mid \vec{x} \rangle \geqq 0$ である。
(IP5)　$\vec{x} = \vec{0}$ のときかつそのときに限り $\langle \vec{x} \mid \vec{x} \rangle = 0$ である。

実ベクトル空間すなわち $\mathbb{R}$ 上の計量ベクトル空間を特に**ユークリッド空間**，複素ベクトル空間すなわち $\mathbb{C}$ 上の計量ベクトル空間を特に**ユニタリ空間**と呼ぶことがある。$\vec{x} \in V$ の**ノルム** (norm) $||\vec{x}||$ を

$$||\vec{x}|| = \sqrt{\langle \vec{x} \mid \vec{x} \rangle}$$

で定義する。$||\vec{x}|| = 1$ を満たすベクトル $\vec{x}$ を**単位ベクトル**と言う。$\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle = 0$ のとき，ベクトル $\vec{x}$ と $\vec{y}$ が**直交する**と言い，$\vec{x} \perp \vec{y}$ と記す。

問題 6.67 (内積の双線形性)**.**
任意の $k \in K$ と任意の $\vec{x},\vec{y},\vec{z} \in V$ に対して，次を示せ。

$$\langle \vec{x} \mid \vec{y}+\vec{z} \rangle = \langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle + \langle \vec{x} \mid \vec{z} \rangle, \quad \langle \vec{x} \mid k\vec{y} \rangle = \overline{k}\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle$$

解答例

$$\begin{aligned} \langle \vec{x} \mid \vec{y}+\vec{z} \rangle &= \overline{\langle \vec{y}+\vec{z} \mid \vec{x} \rangle} = \overline{\langle \vec{y} \mid \vec{x} \rangle + \langle \vec{z} \mid \vec{x} \rangle} = \overline{\langle \vec{y} \mid \vec{x} \rangle} + \overline{\langle \vec{z} \mid \vec{x} \rangle} = \langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle + \langle \vec{x} \mid \vec{z} \rangle, \\ \langle \vec{x} \mid k\vec{y} \rangle &= \overline{\langle k\vec{y} \mid \vec{x} \rangle} = \overline{k\langle \vec{y} \mid \vec{x} \rangle} = \overline{k}\,\overline{\langle \vec{y} \mid \vec{x} \rangle} = \overline{k}\,\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle \end{aligned}$$

□

例 6.35 (内積空間の例)**.**

(a)　数ベクトル空間 K^n の 2 要素 $\vec{x} = (x_1,\dots,x_n)^\top$ と $\vec{y} = (y_1,\dots,y_n)^\top$ との内積を

$$\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle \overset{\text{def}}{=} x_1\overline{y_1} + \cdots + x_n\overline{y_n} = \vec{y}^*\vec{x}$$

で定義すると K^n は計量ベクトル空間になる。これを K^n の**標準内積** と呼ぶ。特に $\mathbb{R}^2$，$\mathbb{R}^3$ におけるノルム $||\vec{x}|| \overset{\text{def}}{=} \sqrt{\sum_i x_i^2}$ と内積 $\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle \overset{\text{def}}{=} \sum_i x_i y_i$ は次のような幾何学的意味を持つ。ベクト

ル $\vec{x}$，$\vec{y}$ の長さをそれぞれ x，y，互いのなす角を θ とすると

$$x = ||\vec{x}||, \quad y = ||\vec{y}||, \quad \langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle = xy\cos\theta, \quad \cos\theta = \frac{\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle}{||\vec{x}||\,||\vec{y}||}$$

(b) 区間 $[a..b] \subset \mathbb{R}$ $(a < b)$ で定義された複素数値連続関数の全体 $C([a..b], \mathbb{C})$ は，内積を

$$\langle f \mid g \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,dx$$

で定義すると内積空間になる。

問題 6.68 (角)**.**
計量ベクトル空間の要素 $\vec{v}$，$\vec{w}$ に対して，$\cos\theta = \dfrac{\langle \vec{v} \mid \vec{w} \rangle}{||\vec{v}||||\vec{w}||}$ なる θ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ を $\vec{v}$ と $\vec{w}$ とがなす**角**と呼ぶ。$\vec{x} = (1\ 0\ 0), \vec{y} = (1\ 1\ 0), \vec{z} = (0\ 1\ 1) \in \mathbb{R}^3$ とするとき，標準内積に関して $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ が相互になす角を求めよ。

解答例 $\vec{x}$ と $\vec{y}$ がなす角は $\dfrac{\pi}{4}$，$\vec{x}$ と $\vec{z}$ がなす角は $\dfrac{\pi}{2}$，$\vec{y}$ と $\vec{z}$ がなす角は $\dfrac{\pi}{3}$ である。 □

問題 6.69 (立体（3 次元）幾何)**.**
$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$，$\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$，$\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ とする。空間内の直線 $l_1 = \{\vec{a}_1 + t\vec{b}_1 \mid t \in \mathbb{R}\}$ と $l_2 = \{\vec{a}_2 + t\vec{b}_2 \mid t \in \mathbb{R}\}$ について次の問いに答えよ。

(a) l_1 と l_2 の共通垂線を求めよ。
(b) l_1 と l_2 の距離を求めよ。

解答例 （垂線の最短性を利用した微分による解もあるが，ここでは，直交条件を用いた解を与える。）l_1，l_2 の共通垂線と交点（垂線の足）を $\vec{c}_1 = \vec{a}_1 + t_1\vec{b}_1$，$\vec{c}_2 = \vec{a}_2 + t_2\vec{b}_2$ とすれば，垂線の方向ベクトルは $\vec{c}_1 - \vec{c}_2 = \vec{a}_1 + t_1\vec{b}_1 - \vec{a}_2 + t_2\vec{b}_2$ である。これは，$\vec{b}_1$ とも $\vec{b}_2$ とも直交するので，内積

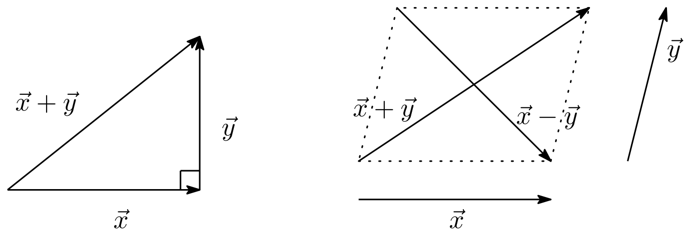
$$\langle \vec{a}_1 + t_1\vec{b}_1 - \vec{a}_2 - t_2\vec{b}_2 \mid \vec{b}_1 \rangle = \langle \vec{a}_1 - \vec{a}_2 \mid \vec{b}_1 \rangle + t_1\langle \vec{b}_1 \mid \vec{b}_1 \rangle - t_2\langle \vec{b}_2 \mid \vec{b}_1 \rangle$$
$$\langle \vec{a}_1 + t_1\vec{b}_1 - \vec{a}_2 - t_2\vec{b}_2 \mid \vec{b}_2 \rangle = \langle \vec{a}_1 - \vec{a}_2 \mid \vec{b}_2 \rangle + t_1\langle \vec{b}_1 \mid \vec{b}_2 \rangle - t_2\langle \vec{b}_2 \mid \vec{b}_2 \rangle$$

はともに 0 である。$\langle \vec{a}_1 - \vec{a}_2 \mid \vec{b}_1 \rangle = 5$，$\langle \vec{a}_1 - \vec{a}_2 \mid \vec{b}_2 \rangle = 14$，$\langle \vec{b}_1 \mid \vec{b}_1 \rangle = 6$，$\langle \vec{b}_2 \mid \vec{b}_2 \rangle = 25$，$\langle \vec{b}_2 \mid \vec{b}_1 \rangle = \langle \vec{b}_1 \mid \vec{b}_2 \rangle = 11$ だから，連立方程式 $5 + 6t_1 - 11t_2 = 14 + 11t_1 - 25t_2 = 0$ を解いて，$t_1 = 1$，$t_2 = 1$ である。従って，$\vec{c}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$，$\vec{c}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\vec{c}_1 - \vec{c}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix}$ だから，共通垂線は $\left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$ である。また，l_1 と l_2 の距離は $\vec{c}_1$ と $\vec{c}_2$ の距離に他ならないから，$\sqrt{6^2 + (-8)^2 + 4^2} = 2\sqrt{29}$ である。 □

問題 6.70 (内積)**.**
次を示せ。$\vec{x} = \vec{0}$ であるためには，全ての $\vec{z}$ に対して $\langle \vec{x} \mid \vec{z} \rangle = 0$ であることが必要十分である。$\vec{x} = \vec{y}$ であるためには，全ての $\vec{z}$ に対して $\langle \vec{x} \mid \vec{z} \rangle = \langle \vec{y} \mid \vec{z} \rangle$ であることが必要十分である。

問題 6.71 (三平方の定理，平行四辺形の法則（中線定理）)**.**
$\vec{x} \perp \vec{y}$ のとき，$||\vec{x} + \vec{y}||^2 = ||\vec{x}||^2 + ||\vec{y}||^2$ となることを示せ。また，一般に $||\vec{x} + \vec{y}||^2 + ||\vec{x} - \vec{y}||^2 =$

$2(||\vec{x}||^2+||\vec{y}||^2)$ が成立することを証明せよ。



解答例　$\vec{x}\perp\vec{y}$，すなわち $\langle\vec{x}\mid\vec{y}\rangle=0$ のとき

$$||\vec{x}+\vec{y}||^2=\langle\vec{x}+\vec{y}\mid\vec{x}+\vec{y}\rangle=\langle\vec{x}\mid\vec{x}\rangle+\langle\vec{x}\mid\vec{y}\rangle+\langle\vec{y}\mid\vec{x}\rangle+\langle\vec{y}\mid\vec{y}\rangle=||\vec{x}||^2+||\vec{y}||^2$$

である。また，一般に

$$\begin{aligned}||\vec{x}+\vec{y}||^2+||\vec{x}-\vec{y}||^2&=\langle\vec{x}\mid\vec{x}\rangle+\langle\vec{x}\mid\vec{y}\rangle+\langle\vec{y}\mid\vec{x}\rangle+\langle\vec{y}\mid\vec{y}\rangle+\langle\vec{x}\mid\vec{x}\rangle-\langle\vec{x}\mid\vec{y}\rangle-\langle\vec{y}\mid\vec{x}\rangle+\langle\vec{y}\mid\vec{y}\rangle\\&=\langle\vec{x}\mid\vec{x}\rangle+\langle\vec{y}\mid\vec{y}\rangle+\langle\vec{x}\mid\vec{x}\rangle+\langle\vec{y}\mid\vec{y}\rangle=2(||\vec{x}||^2+||\vec{y}||^2)\end{aligned}$$

である。 □

問題 6.72 (菱形の対角線は直交する)**.**
$||\vec{x}||=||\vec{y}||$ であるとき，かつそのときに限り $\langle\vec{x}+\vec{y}\mid\vec{x}-\vec{y}\rangle$ は純虚数になることを示せ。特に実計量ベクトル空間においては，$||\vec{x}||=||\vec{y}||$ と $(\vec{x}+\vec{y})\perp(\vec{x}-\vec{y})$ は同値である。
解答例　一般に $\langle\vec{x}\mid\vec{x}\rangle=||\vec{x}||^2$ は実数であり，$\langle\vec{x}\mid\vec{y}\rangle-\langle\vec{y}\mid\vec{x}\rangle=\langle\vec{x}\mid\vec{y}\rangle-\overline{\langle\vec{x}\mid\vec{y}\rangle}$ は純虚数だから，

$$\langle\vec{x}+\vec{y}\mid\vec{x}-\vec{y}\rangle=\langle\vec{x}\mid\vec{x}\rangle-\langle\vec{x}\mid\vec{y}\rangle+\langle\vec{y}\mid\vec{x}\rangle-\langle\vec{y}\mid\vec{y}\rangle$$

の実部は $\langle\vec{x}\mid\vec{x}\rangle-\langle\vec{y}\mid\vec{y}\rangle=||\vec{x}||^2-||\vec{y}||^2$ である。

したがって $||\vec{x}||=||\vec{y}||$ とすると，実部が 0 だから，$\langle\vec{x}+\vec{y}\mid\vec{x}-\vec{y}\rangle$ は純虚数である。

逆に $\langle\vec{x}+\vec{y}\mid\vec{x}-\vec{y}\rangle$ が純虚数であるためには，その実部 $\langle\vec{x}\mid\vec{x}\rangle-\langle\vec{y}\mid\vec{y}\rangle$ が 0 でなければならない。したがって $\langle\vec{x}\mid\vec{x}\rangle=\langle\vec{y}\mid\vec{y}\rangle$ より $||\vec{x}||=\sqrt{\langle\vec{x}\mid\vec{x}\rangle}=\sqrt{\langle\vec{y}\mid\vec{y}\rangle}=||\vec{y}||$ である。

実計量ベクトル空間においては，$\langle\vec{x}\mid\vec{y}\rangle=\langle\vec{y}\mid\vec{x}\rangle$ だから常に $\langle\vec{x}+\vec{y}\mid\vec{x}-\vec{y}\rangle=\langle\vec{x}\mid\vec{x}\rangle-\langle\vec{y}\mid\vec{y}\rangle$ が成り立つ。従って，$\langle\vec{x}+\vec{y}\mid\vec{x}-\vec{y}\rangle=0$ と $||\vec{x}||=||\vec{y}||$ は同値である。 □

問題 6.73 (コーシー・シュワルツの不等式，三角不等式)**.**
計量ベクトル空間 V の任意の 2 要素 $\vec{x}$ と $\vec{y}$ に対し，次が成り立つことを示せ。

(a)　$|\langle\vec{x}\mid\vec{y}\rangle|\leqq||\vec{x}||||\vec{y}||$　(コーシー・シュワルツの不等式)
(b)　$||\vec{x}+\vec{y}||\leqq||\vec{x}||+||\vec{y}||$　(三角不等式)

上の 2 つで等号が成立するのは，どういう場合か。
解答例

(a)　$|\langle\vec{y}\mid\vec{x}\rangle|=0$ なら，明らかである。$|\langle\vec{y}\mid\vec{x}\rangle|\neq0$ とする。任意の $k\in K$ に対して

$$0\leqq||k\vec{x}+\vec{y}||^2=|k|^2||\vec{x}||^2+k\langle\vec{x}\mid\vec{y}\rangle+\overline{k}\langle\vec{y}\mid\vec{x}\rangle+||\vec{y}||^2$$

である。実数 t をとり $k=t\langle\vec{y}\mid\vec{x}\rangle$ とおくと

$$||k\vec{x}+\vec{y}||^2=t^2|\langle\vec{y}\mid\vec{x}\rangle|^2||\vec{x}||^2+2t|\langle\vec{y}\mid\vec{x}\rangle|^2+||\vec{y}||^2$$

だが，この式は t に関する実係数の 2 次式なので，常に非負であるためには，判別式

$$D = |\langle \vec{y} \mid \vec{x} \rangle|^4 - |\langle \vec{y} \mid \vec{x} \rangle|^2 ||\vec{x}||^2 ||\vec{y}||^2 \leqq 0$$

が成り立たねばならない。よって，$|\langle \vec{y} \mid \vec{x} \rangle|^2 \leqq ||\vec{x}||^2 ||\vec{y}||^2$ である。この式で等号が成立するのは $\vec{x}$ と $\vec{y}$ が線形従属の場合である。

(b)　コーシー・シュワルツの不等式より，

$$\begin{aligned} ||\vec{x}+\vec{y}||^2 = ||\vec{x}||^2 + \langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle + \langle \vec{y} \mid \vec{x} \rangle + ||\vec{y}||^2 &= ||\vec{x}||^2 + 2\Re(\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle) + ||\vec{y}||^2 \\ &\leqq ||\vec{x}||^2 + 2||\vec{x}||||\vec{y}|| + ||\vec{y}||^2 = (||\vec{x}|| + ||\vec{y}||)^2 \end{aligned}$$

である。等号が成立するのは $\vec{x}$ と $\vec{y}$ の一方が他方の正の定数倍の場合か $\vec{0}$ の場合である。

□

定義 6.36 (正規直交基底)**.**
計量ベクトル空間 V のベクトル列 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ は，$\langle \vec{e}_i \mid \vec{e}_j \rangle = [i = j]$ を満たすとき，**正規直交系**と言う。さらにそれが V の基底をなすとき，**正規直交基底**と言う。

定義 6.37 (正射影)**.**
V を計量ベクトル空間，$\vec{e} \in V$ を単位ベクトルとする。$\vec{v} \in V$ に対して $\langle \vec{v} \mid \vec{e} \rangle \vec{e}$ を $\vec{v}$ の $\vec{e}$ 方向への**正射影**と呼ぶ。正規直交系 $\beta = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_r \rangle$ の張る部分空間を W とするとき，$\sum_{i=1}^{r} \langle \vec{v} \mid \vec{e}_i \rangle \vec{e}_i$ を $\vec{v}$ の W への**正射影**と呼ぶ。

問題 6.74 (正規直交系の線形独立性)**.**
計量ベクトル空間 V の正規直交系をなすベクトル列 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_r$ は，線形独立であることを示せ。
解答例:　$k_1\vec{e}_1 + k_2\vec{e}_2, + \cdots + k_r\vec{e}_r = \vec{0}$ とする。各 $\vec{e}_i$ との内積をとると，

$$k_i = k_1[1 = i] + k_2[2 = i] + \cdots + k_n[n = i] = \langle \vec{0} \mid \vec{e}_i \rangle = 0$$

である。 □

問題 6.75 (ベッセルの不等式)**.**
計量ベクトル空間 V 内のベクトル列 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ が正規直交系であるとき，任意の $\vec{v} \in V$ に対して

$$\sum_{j=1}^{n} |\langle \vec{v} \mid \vec{e}_j \rangle|^2 \leqq ||\vec{v}||^2$$

であることを示せ。この不等式で等号が成立するとき，$\vec{v}$ は $\vec{e}_j$ の線形結合として $\sum_j \langle \vec{v} \mid \vec{e}_j \rangle \vec{e}_j$ と書けることを示せ。
解答例:

$$\begin{aligned} 0 &\leqq ||\vec{v} - \sum_j \langle \vec{v} \mid \vec{e}_j \rangle \vec{e}_j||^2 = \langle \vec{v} - \sum_j \langle \vec{v} \mid \vec{e}_j \rangle \vec{e}_j \mid \vec{v} - \sum_k \langle \vec{v} \mid \vec{e}_j \rangle \vec{e}_j \rangle \\ &= ||\vec{v}||^2 - \sum_j \langle \vec{v} \mid \vec{e}_j \rangle \langle \vec{e}_j \mid \vec{v} \rangle - \sum_k \overline{\langle \vec{v} \mid \vec{e}_k \rangle} \langle \vec{v} \mid \vec{e}_k \rangle + \sum_j \sum_k \langle \vec{v} \mid \vec{e}_j \rangle \overline{\langle \vec{v} \mid \vec{e}_k \rangle} \langle \vec{e}_j \mid \vec{e}_k \rangle \\ &= ||\vec{v}||^2 - \sum_j |\langle \vec{v} \mid \vec{e}_j \rangle|^2 \end{aligned}$$

等号が成立すれば，$0 = ||\vec{v} - \sum_j \langle \vec{v} \mid \vec{e}_j \rangle \vec{e}_j||^2$ となるが，それは $\vec{v} - \sum_j \langle \vec{v} \mid \vec{e}_j \rangle \vec{e}_j = \vec{0}$，すなわち $\vec{v} = \sum_j \langle \vec{v} \mid \vec{e}_j \rangle \vec{e}_j$ であることに他ならない。 □

問題 6.76 (正規直交基底による座標（成分表示）).
計量ベクトル空間 V の正規直交基底 $\beta = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n \rangle$ が与えられているとき，$\vec{v} \in V$ の β-座標（成分表示）を求めよ。
解答例 $(\langle \vec{v} \mid \vec{e}_1 \rangle \ \langle \vec{v} \mid \vec{e}_2 \rangle \ \cdots \ \langle \vec{v} \mid \vec{e}_n \rangle)^\top$ である。 □

問題 6.77 (内積の正規直交座標による表現).
V を計量ベクトル空間とする。V のある正規直交基底に関する $\vec{x} \in V$ と $\vec{y} \in V$ の座標をそれぞれ $(x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top$，$(y_1, y_2, \ldots, y_n)^\top$ とするとき，

$$\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle = x_1 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_2} + \cdots + x_n \overline{y_n}$$

であることを示せ。
解答例 V の正規直交基底を $\beta = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n)$ とすると，

$$\vec{x} = x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + \cdots + x_n \vec{v}_n, \quad \vec{y} = y_1 \vec{v}_1 + y_2 \vec{v}_2 + \cdots + y_n \vec{v}_n$$

である。$\langle \vec{v}_i \mid \vec{v}_j \rangle = [i = j]$ だから

$$\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle = \sum_{i,j} x_i \overline{y_j} \langle \vec{v}_i \mid \vec{v}_j \rangle = x_1 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_2} + \cdots + x_n \overline{y_n}$$

である。 □

問題 6.78 (正規直交基底).
$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ を計量ベクトル空間 V 内の単位ベクトルとする。$\beta = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ が正規直交基底になるための必要十分条件は，任意の $\vec{v} \in V$ について

$$||\vec{v}||^2 = |\langle \vec{v} \mid \vec{e}_1 \rangle|^2 + \cdots + |\langle \vec{v} \mid \vec{e}_n \rangle|^2$$

が成り立つことであることを示せ。
解答例 β が正規直交基底になるなら，$\vec{v} = a_1 \vec{e}_1 + \cdots + a_n \vec{e}_n$ と表すことができて，$\langle \vec{v} \mid \vec{e}_i \rangle = a_i$ である。 よって，

$$||\vec{v}||^2 = |a_1|^2 + \cdots + |a_n|^2 = |\langle \vec{v} \mid \vec{e}_1 \rangle|^2 + \cdots + |\langle \vec{v} \mid \vec{e}_n \rangle|^2$$

である。逆にこの式が成り立つなら，$\vec{v}$ に $\vec{e}_i$ を代入することで

$$1 = ||\vec{e}_i||^2 = |\langle \vec{e}_i \mid \vec{e}_1 \rangle|^2 + \cdots + |\langle \vec{e}_i \mid \vec{e}_n \rangle|^2$$

を得る。$j = i$ のとき $|\langle \vec{e}_i \mid \vec{e}_j \rangle|^2 = 1$ なので，$j \neq i$ の場合は $|\langle \vec{e}_i \mid \vec{e}_j \rangle|^2 = 0$ でなければならない。従って，β は正規直交系となるが，条件より任意の $\vec{v}$ についてベッセルの不等式において等号が成立するので，$\vec{v} = \sum_j \langle \vec{v} \mid \vec{e}_j \rangle \vec{e}_j$ と書け，β が V を張ることがわかる。 □

定理 6.38 (正規直交系の拡張).
計量ベクトル空間の正規直交系 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_r$ が張る部分空間を W とする。ベクトル $\vec{w} \notin W$ が与えられたとき，

$$\vec{x} = \vec{w} - \sum_{i=1}^{r} \langle \vec{w} \mid \vec{e}_i \rangle \vec{e}_i$$

とする。$\vec{e}_{r+1} = \dfrac{\vec{x}}{||\vec{x}||}$ とおけば，$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_r, \vec{e}_{r+1}$ は，正規直交系となる。

定理 6.39 (グラム・シュミットの直交化)**.**
V を n 次元計量ベクトル空間し，W を V の部分空間とする。$\beta = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_r \rangle$ が W の正規直交基底線形独立ならば，これに $n-r$ 個のベクトル $\vec{e}_{r+1}, \vec{e}_{r+2}, \ldots, \vec{e}_n$ を補充する形で V の正規直交基底基底 $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n \rangle$ を作ることができる。
証明: $\vec{w} \in V \setminus W$ をとり，定理 6.38 の操作により，$W + \mathrm{Span}(\vec{w})$ の正規直交基底を得る。$W + \mathrm{Span}(\vec{w})$ を新たな W と考えて同じ操作を繰り返すことにより，V の正規直交基底が得られる。特に，最初に与えれた (正規直交とは限らない) 基底 $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n \rangle$ を元に，$\vec{v}_i$ を順次上の $\vec{w}$ としてとり，正規直交基底を次第に拡張していく方法を**グラム・シュミットの直交化**という。 □

注 上記の方法で正規直交基底を作る際，毎回，正規化するのは計算の面からは得策ではないかもしれない。例えば $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r$ が単位ベクトルでなくとも，直交さえしていれば，

$$\vec{x} = \vec{w} - \sum_{i=1}^{r} \frac{\langle \vec{w} \mid \vec{v}_i \rangle}{\langle \vec{v}_i \mid \vec{v}_i \rangle} \vec{v}_i$$

で計算される $\vec{x}$ はどの $\vec{v}_i$ とも直交している。従って，この計算により，次々にベクトルを直交させていき，できた基底の各ベクトルをそのノルムで最後に割って正規化してもよい。

定義 6.40 (直交行列)**.**
各列が互いに直交する実正方行列 $Q \in \mathrm{M}(n, n; \mathbb{R})$ を**直交行列**と呼ぶ。

定理 6.41 (直交行列による上三角化)**.**
$A \in \mathrm{M}(n, n; \mathbb{R})$ を正則行列とするとき，直交行列 Q と上三角行列 R が存在して $A = QR$ となる。
証明: $A = (\vec{a}_1 \ \cdots \ \vec{a}_n)$ とすると，グラム・シュミットの直交化法により，帰納的に

$$\vec{b}_k = \vec{a}_k - \sum_{i<k} \frac{\langle \vec{a}_k \mid \vec{b}_i \rangle}{\langle \vec{b}_i \mid \vec{b}_i \rangle} \vec{b}_i$$

とすれば，$\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n$ は直交系となる。従って

$$Q = \begin{pmatrix} \dfrac{\vec{b}_1}{||\vec{b}_1||} & \cdots & \dfrac{\vec{b}_n}{||\vec{b}_n||} \end{pmatrix}$$

は直交行列となり，定義より

$$R = \begin{pmatrix} ||\vec{b}_1|| & \dfrac{\langle \vec{a}_2 \mid \vec{b}_1 \rangle}{||\vec{b}_1||} & \cdots & \dfrac{\langle \vec{a}_n \mid \vec{b}_1 \rangle}{||\vec{b}_1||} \\ & ||\vec{b}_2|| & & \dfrac{\langle \vec{a}_n \mid \vec{b}_2 \rangle}{||\vec{b}_2||} \\ & & \ddots & \vdots \\ O & & & ||\vec{b}_n|| \end{pmatrix}$$

とおけば $A = QR$ である。 □

問題 6.79 (直交化)**.**
次のベクトルからグラム・シュミットの方法で正規直交基底を作れ。ただし，$\mathbb{R}^3$，$\mathbb{C}^3$ の内積は標準的なものを用いよ。

(a) $(1,2,2)^\top$，$(1,0,1)^\top$，$(2,1,0)^\top$

(b) $(1,0,1)^\top$，$(-1,1,3)^\top$，$(1,-1,2)^\top$

(c) $(1,0,1)^\top$，$(1,1,1)^\top$，$(1,-1,0)^\top$

(d) $(1,0,\mathrm{i})^\top$，$(\mathrm{i},-1,-\mathrm{i})^\top$，$(0,\mathrm{i},1)^\top$

解答例

(a) $\frac{1}{3}(1,2,2)^\top, \frac{1}{3}(2,-2,1)^\top, \frac{1}{3}(2,1,-2)^\top$

(b) $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)^\top, \frac{1}{3}(-2,1,2)^\top, \frac{\sqrt{2}}{6}(-1,-4,1)^\top$

(c) $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)^\top, (0,1,0)^\top, \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,2)^\top$

(d) $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,\mathrm{i})^\top, \frac{1}{2\sqrt{2}}(1+\mathrm{i},-2,1-\mathrm{i})^\top, \frac{1}{2\sqrt{5}}(-1+2\mathrm{i},1+3\mathrm{i},2+\mathrm{i})^\top$

□

問題 6.80 (直交化)**.**
次のベクトルからシュミットの方法で正規直交基底を作れ。ただし，x の 1 次式 $f(x), g(x)$ の内積を $f(0)g(0)+f(1)g(1)$ で定義する。

(a) 1，x

(b) $1+x$，$1-x$

解答例

(a)

(b)

□

問題 6.81 (直交化)**.**
次のベクトルからシュミットの方法で正規直交基底を作れ。ただし，x の多項式 $f(x), g(x)$ の内積を $\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$ で定義する。

(a) 1，x，x^2

(b) 1，$x+1$，x^2+x

解答例

(a) $\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}x, \frac{\sqrt{10}}{4}(3x^2-1)$

(b) $\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}x, \frac{\sqrt{10}}{4}(3x^2-1)$

□

定義 6.42 (直交補空間)**.**
W を計量ベクトル空間 V の部分空間とするとき，$\{\vec{y} \in V \mid \forall \vec{x} \in W\ \vec{y} \perp \vec{x}\}$ を $W^\perp$ と記し，W の**直交補空間**と呼ぶ。

例 6.43 (直交補空間)**.**
$W^\perp$ が V の部分空間となることを示せ。また，有限次元計量ベクトル空間 V に対して，$V = W \oplus W^\perp$，$(W^\perp)^\perp = W$ を示せ。
解答例　$\vec{x}$，$\vec{y}$ を $W^\perp$ の任意の要素とし，$k \in K$ を任意のスカラーとする。どんな $\vec{z} \in W$ に対しても

$$\begin{aligned}\langle \vec{x}+\vec{y} \mid \vec{z}\rangle &= \langle \vec{x} \mid \vec{z}\rangle + \langle \vec{y} \mid \vec{z}\rangle = 0+0 = 0\\ \langle k\vec{x} \mid \vec{z}\rangle &= k\langle \vec{x} \mid \vec{z}\rangle = k \cdot 0 = 0\end{aligned}$$

だから，$\vec{x}+\vec{y}$, $k\vec{x} \in W^\perp$ である。ゆえに $W^\perp$ は部分空間である。
　$\vec{x} \in W \cap W^\perp$ とすると，定義より $\vec{x} \perp \vec{x}$，すなわち $\langle \vec{x} \mid \vec{x}\rangle = 0$ であるが，これは $\vec{x} = \vec{0}$ を意味する。よって $W \cap W^\perp = \{\vec{0}\}$ である。また W の直交正規基底を $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_r$ とするとき，任意の $\vec{x} \in V$ に対して，

$$\vec{y} = \langle \vec{x} \mid \vec{e}_1\rangle \vec{e}_1 + \langle \vec{x} \mid \vec{e}_2\rangle \vec{e}_2 + \cdots + \langle \vec{x} \mid \vec{e}_r\rangle \vec{e}_r$$

とすれば，$\vec{y} \in W$，$\vec{x}-\vec{y} \in W^\perp$ は容易に示されるから $\vec{x} \in W + W^\perp$ である。ゆえに $V = W \oplus W^\perp$ である。よって，

$$\dim V = \dim W + \dim W^\perp = \dim W^\perp + \dim (W^\perp)^\perp$$

だから $\dim W = \dim (W^\perp)^\perp$ である。また，$W \subset (W^\perp)^\perp$ は定義より明らかだから，$W = W \oplus (W^\perp)^\perp$ である。 □

問題 6.82 (直交補空間)**.**
V を有限次元計量ベクトル空間，W_1 と W_2 をその部分空間とする。$(W_1 \cap W_2)^\perp = {W_1}^\perp + {W_2}^\perp$ および $(W_1 + W_2)^\perp = {W_1}^\perp \cap {W_2}^\perp$ を示せ。
解答例　$(W_1+W_2)^\perp \subset {W_1}^\perp$，$(W_1+W_2)^\perp \subset {W_2}^\perp$ だから，$(W_1+W_2)^\perp \subset {W_1}^\perp \cap {W_2}^\perp$ である。逆に $\vec{v} \in {W_1}^\perp \cap {W_2}^\perp$ とすると，任意の $\vec{x} \in W_1$, $\vec{y} \in W_2$ に対して

$$\langle \vec{v} \mid \vec{x}+\vec{y}\rangle = \langle \vec{v} \mid \vec{x}\rangle + \langle \vec{v} \mid \vec{y}\rangle = 0$$

だから $\vec{v} \in (W_1+W_2)^\perp$ である。ゆえに $(W_1+W_2)^\perp = {W_1}^\perp \cap {W_2}^\perp$ である。この式の W_1，W_2 に ${W_1}^\perp$，${W_2}^\perp$ を代入すれば，

$$({W_1}^\perp + {W_2}^\perp)^\perp = ({W_1}^\perp)^\perp \cap ({W_2}^\perp)^\perp = W_1 \cap W_2,$$

ゆえに ${W_1}^\perp + {W_2}^\perp = (W_1 \cap W_2)^\perp$ である。 □

問題 6.83 (直交補空間)**.**
V を K 上の n 次元計量ベクトル空間，W をその部分空間とし，$\dim W = n-1$ とする。$\vec{x}, \vec{y}$ を $W^\perp$ に属する単位ベクトルとすると，$K = \mathbb{R}$ ならば $\vec{x} = \vec{y}$ または $\vec{x} = -\vec{y}$ であることを示せ。また，$K = \mathbb{C}$ ならば，$|\alpha| = 1$ なる複素数 α が存在して，$\vec{x} = \alpha\vec{y}$ であることを示せ。
解答例　$W^\perp$ は 1 次元だから，$\vec{x} = \alpha\vec{y}$ と書ける。$\vec{x}, \vec{y}$ は単位ベクトルだから，

$$1 = \langle \vec{x} \mid \vec{x}\rangle = \langle \alpha\vec{y} \mid \alpha\vec{y}\rangle = |\alpha|^2$$

より，$|\alpha| = 1$ である。特に $K = \mathbb{R}$ であれば，α は実数だから ± 1 に限られる。 □

問題 6.84 (正規直交系)**.**
区間 $[0..2\pi] \subset \mathbb{R}$ で定義された実数値連続関数の全体 $V = C([0..2\pi], \mathbb{R})$ での内積を $\langle f \mid g\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx$ で定義するとき，

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 3x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 3x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}},$$

は正規直交系をなすことを示せ。

問題 6.85 (直交化，直交行列による上三角化)**.**
a, b, c, d が $ad - bc > 0$ を満たす実数のとき，$\mathbb{R}^2$ の標準内積に関して，基底 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ からグラム・シュミットの方法で作った正規直交基底は，$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha \end{pmatrix}$ の形になることを示し，α, β を a, b, c, d で表せ。このとき，行列 $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ は，行列 $Q = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ と上三角行列 $R = \begin{pmatrix} p & q \\ 0 & s \end{pmatrix}$ の積として $A = QR$ と書けるが，p, q, s を a, b, c, d で表せ。
解答例 $\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, p = \sqrt{a^2+b^2}, q = \frac{ac+bd}{\sqrt{a^2+b^2}}, s = \frac{ad-bc}{\sqrt{a^2+b^2}}$ □

7　固有値，固有ベクトル，対角化

7.1　固有値，固有ベクトル

定義 7.1 (固有値，固有ベクトル，固有空間).
V を K 上の n 次元線形空間，f を V 上の線形変換とする。$\vec{0}$ でないベクトル $\vec{v} \in V$ が存在して $f\vec{v} = \lambda\vec{v}$ となるようなスカラー $\lambda \in K$ を f の**固有値**と呼ぶ。また，このような $\vec{v}$ を固有値 λ の**固有ベクトル**と呼ぶ。そのようなベクトルの全体，すなわち

$$\mathrm{Ker}(f - \lambda\mathbf{id}_V) = \{\vec{v} \in V \mid f(\vec{v}) = \lambda\vec{v}\}$$

は V の部分空間になるので， 固有値 λ の**固有空間**と呼び $V_f(\lambda)$ と表記する。A を (V のある基底に関する) f の表現行列とするとき，変数 x に関する n 次多項式 $\det(x\mathrm{E} - A)$ は，基底の取り方に無関係に決まり，変換 f や行列 A の**固有多項式**と呼ばれ，$\Phi_f(x)$，$\Phi_A(x)$ などと表記される。

定理 7.2 (固有値，固有多項式).
V を K 上のベクトル空間とする。線形変換 $f : V \to V$ と $\lambda \in K$ に対して次は同値である。

(a) $\Phi_f(\lambda) = 0$
(b) λ は f の固有値である。すなわち $\mathrm{Ker}(f - \lambda\mathbf{id}_V) \neq \{\vec{0}\}$ である。

例 7.3 (固有値，固有ベクトル).
$V = \mathbb{R}^2$ とし，回転の行列 $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ を考える。$\Phi_A(x) = (x - \cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2$ だから，$\Phi_A(x) = 0$ の解は $x = \cos\theta \pm \mathrm{i}\sin\theta \notin \mathbb{R}$ である。従って，このとき $\cos\theta \pm \mathrm{i}\sin\theta$ は A の固有値とは言わない。しかし，$V = \mathbb{C}^2$ と考えると，これらは A の固有値であり，それぞれの固有ベクトルとして，$(1, \mp\mathrm{i})^\top$ がある。

例 7.4 (固有値，固有ベクトル).
V として数列の全体 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ （または $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$）を考え，線形変換 $f : V \to V$ として，初項を捨て，各項を前にずらす変換，すなわち

$$f(a_0, a_1, a_2, \ldots) = (a_1, a_2, a_3, \ldots)$$

を考える。このとき公比を r とする等比数列は固有ベクトルであり，その固有値は r である。

例 7.5 (固有値，固有ベクトル).
$V = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ を無限回微分可能な実数値関数の全体とすると，微分作用素 $D : V \to V$ は V 上の線形変換である。このとき $f(x) = e^{ax}$ は，$D(f)(x) = f'(x) = ae^{ax} = af(x)$ より，固有値 a の D の固有ベクトルである。

問題 7.1 (相似，固有多項式).
n 次正方行列 A，B に対して正則行列 P が存在して，$B = P^{-1}AP$ となるとき，A と B は**相似**だという。相似な行列の固有多項式は等しいことを示せ。

解答例

$$\phi_B(x) = \det(x\mathrm{E} - B) = \det(P^{-1}(x\mathrm{E} - A)P) = \det P^{-1}\det(x\mathrm{E} - A)\det P = \det(x\mathrm{E} - A) = \phi_A(x)$$

□

問題 7.2 (固有値，固有ベクトル)**.**
λ_1，λ_2 を線形変換 f の異なる固有値とするとき，$V_f(\lambda_1) \cap V_f(\lambda_2) = \{\vec{0}\}$ を示せ。
解答例: $\vec{x} \in V_f(\lambda_1) \cap V_f(\lambda_2)$ とすると，定義より $f(\vec{x}) = \lambda_1\vec{x} = \lambda_2\vec{x}$ である。λ_1 と λ_2 は異なるから，$\vec{x} = \vec{0}$ でなければならない。 □

問題 7.3 (固有ベクトルの線形独立性)**.**
f を n 次元ベクトル空間 V 上の線形変換とし，$\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_r$ を相異なる固有値 $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ の f の固有ベクトルとすると，$\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_r$ は線形独立であることを示せ。

問題 7.4 (固有値，固有ベクトル)**.**
λ が線形変換 f の固有値ならば，λ^2 は $f \circ f$ の固有値であることを示せ。
解答例: 固有値 λ に属する f の固有ベクトルを $\vec{v}$ とすると，

$$(f \circ f)(\vec{v}) = f(f(\vec{v})) = f(\lambda\vec{v}) = \lambda f(\vec{v}) = \lambda^2\vec{v}$$

により，λ^2 は $f \circ f$ の固有値である。 □

問題 7.5 (固有値)**.**
$p(x)$ を多項式とする。正方行列 A が固有値 λ を持てば，正方行列 $p(A)$ は固有値 $p(\lambda)$ を持つことを示せ。

問題 7.6 (固有値)**.**
正則行列 A の固有値を $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ とするとき，逆行列 A^{-1} の固有値はどうなるか。

問題 7.7 (固有値)**.**
正方行列 A が $A^m = \mathrm{E}$ を満たせば，A 固有値は 1 の m 乗根に限ることを示せ。
解答例 λ が A の固有値とすれば，定義より固有ベクトル $\vec{x}$ が存在して $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ となる。ゆえに

$$\vec{x} = A^m\vec{x} = A^{m-1}(\lambda\vec{x}) = \lambda(A^{m-1}\vec{x}) = \cdots = \lambda^m\vec{x}$$

であり，固有ベクトルは $\vec{0}$ ではないので $\lambda^m = 1$，すなわち λ は 1 の m 乗根である。 □

問題 7.8 (固有値)**.**
正方行列 A が $A^2 = A$ を満たせば，A 固有値は 1 か 0 に限ることを示せ。
解答例 λ が A の固有値とすれば，定義より固有ベクトル $\vec{x}$ が存在して $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ となる。ゆえに

$$\lambda\vec{x} = A\vec{x} = A^2\vec{x} = A(\lambda\vec{x}) = \lambda(A\vec{x}) = \lambda^2\vec{x}$$

であり，固有ベクトルは $\vec{0}$ ではないので $\lambda^2 = \lambda$，すなわち λ は 1 または 0 である。 □

問題 7.9 (固有多項式)**.**
n 次正方行列 A の固有多項式 $\Phi_A(t)$ の定数項は $(-1)^n(\det A)$ であることを示せ。また，t^{n-1} の係数は $-\operatorname{Tr} A$ であることを示せ。

問題 7.10 (固有値)**.**
3 次正方行列 A の固有値が重複を含めて -2，3，3 であるとする。$\det A$ と $\operatorname{Tr} A$ を求めよ。

7.2 さまざまな複素行列とその特徴づけ

定義 7.6 (随伴行列，正規行列，ユニタリ行列，直交行列，エルミート行列)**.**
行列 $A \in \mathrm{M}(m,n;\mathbb{C})$ に対して $A^* = \overline{A}^\top \in \mathrm{M}(n,m;\mathbb{C})$ を A の**随伴行列** (adjoint matrix) と呼ぶ。すなわち，A^* は，$m \times n$ 行列 A に対して，$A^*[i,j] = \overline{A[j,i]}$ で定義される $n \times m$ 行列である。明らかに $(AB)^* = B^*A^*$，$\mathrm{E}^* = \mathrm{E}$，$(A^*)^* = A$，$(A+B)^* = A^* + B^*$，$(kA)^* = \overline{k}A^*$ である。また，A が実行列ならば，$A^* = A^\top$ である。正方行列 A が $AA^* = A^*A$ を満たすとき A を**正規行列** (normal matrix) と言う。また，正方行列 A が $A^* = A^{-1}$ を満たすとき A を**ユニタリ行列** (unitary matrix) と言い，実ユニタリ行列を**直交行列** (orthogonal matrix) と言う。正方行列 A が $A^* = A$ を満たすとき A を**エルミート行列** (hermitian matrix) と言う。$A^* = -A$ を満たすとき A を**歪エルミート行列** (hermitian matrix) と言う。

定理 7.7 (随伴行列と内積)**.**
行列 $A \in \mathrm{M}(m,n;K)$ とすると，K^n の標準内積に関して次が成り立つ。任意の数ベクトル $\vec{x} \in K^n$，$\vec{y} \in K^m$ に対して $\langle A\vec{x} \mid \vec{y}\rangle = \langle \vec{x} \mid A^*\vec{y}\rangle$ である。

定理 7.8 (ユニタリ行列)**.**
n 次複素正方行列 $A = (\vec{a}_1\ \cdots\ \vec{a}_n) \in \mathrm{M}(n,n;\mathbb{C})$ と $\mathbb{C}^n$ の標準内積に関して，次は同値である。

(a) A はユニタリ行列である。
(b) $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_n$ は正規直交基底である。

問題 7.11 (ユニタリ行列)**.**
V を n 次元計量ベクトル空間，β,γ をともにその正規直交基底とする。このとき γ-座標から β-座標への変換行列ははユニタリ行列であることを示せ。
解答例　$\vec{v},\vec{w} \in V$ の γ-座標 (成分表示) を $\vec{b},\vec{c} \in K^n$ とすると，β-座標 (成分表示) は $A\vec{b}, A\vec{c} \in K^n$ である。β,γ はともに正規直交基底なので

$$\langle \vec{b} \mid \vec{c}\rangle = \langle \vec{v} \mid \vec{w}\rangle = \langle A\vec{b} \mid A\vec{c}\rangle = \langle A^*A\vec{b} \mid \vec{c}\rangle$$

である。$\vec{v}$, $\vec{w}$ は任意，すなわち $\vec{b}$，$\vec{c}$ も任意にとれるので，$A^*A = \mathrm{E}$ でなければならない。 □

定理 7.9 (正規行列の固有値，固有空間とその直交補空間)**.**
A を正規行列，λ を A の固有値，M を λ に属する固有空間，その直交補空間を $M^\perp$ とする。

(a) $\vec{x} \in M$ なら，$A^*\vec{x} = \overline{\lambda}\vec{x}$ である。すなわち，$\vec{x}$ は A^* の固有ベクトルでもあり，それが属する固有値は $\overline{\lambda}$ である。
(b) $\vec{y}$ を λ と異なる固有値 μ に属する A の固有ベクトルとすれば，$\vec{y} \in M^\perp$ である。すなわち，正規行列の固有ベクトルは，異なる固有値に属すれば，(標準内積に関して) 互いに直交する。
(c) $\vec{x} \in M$ ならば $A\vec{x} \in M$，$\vec{y} \in M^\perp$ ならば $A\vec{y} \in M^\perp$ である。
(d) $\dim M = m$ のとき，λ は A の固有方程式の m 重解である。

証明:

(a) $(A-\lambda\mathrm{E})\vec{x}=\vec{0}$ より，

$$0=\langle(A-\lambda\mathrm{E})\vec{x}\mid(A-\lambda\mathrm{E})\vec{x}\rangle=\langle\vec{x}\mid(A-\lambda\mathrm{E})^*(A-\lambda\mathrm{E})\vec{x}\rangle=\langle\vec{x}\mid(A^*-\overline{\lambda}\mathrm{E})(A-\lambda\mathrm{E})\vec{x}\rangle$$
$$=\langle\vec{x}\mid(A-\lambda\mathrm{E})(A^*-\overline{\lambda}\mathrm{E})\vec{x}\rangle=\langle(A^*-\overline{\lambda}\mathrm{E})\vec{x}\mid(A^*-\overline{\lambda}\mathrm{E})\vec{x}\rangle$$

だから $A^*\vec{x}=\overline{\lambda}\vec{x}$ である。

(b) (a) より $\lambda\langle\vec{x}\mid\vec{y}\rangle=\langle A\vec{x}\mid\vec{y}\rangle=\langle\vec{x}\mid A^*\vec{y}\rangle=\langle\vec{x}\mid\overline{\mu}\vec{y}\rangle=\mu\langle\vec{x}\mid\vec{y}\rangle$ だから，$\mu\neq\lambda$ より $\langle\vec{x}\mid\vec{y}\rangle=0$ である。

(c) $\vec{x}\in M$ ならば $AA\vec{x}=A(\lambda\vec{x})=\lambda(A\vec{x})$ より $A\vec{x}\in M$ である。$\vec{y}\in M^\perp$ ならば，任意の $\vec{x}\in M$ に対して

$$\langle\vec{x}\mid A\vec{y}\rangle=\langle A^*\vec{x}\mid\vec{y}\rangle=\langle\overline{\lambda}\vec{x}\mid\vec{y}\rangle=\overline{\lambda}\langle\vec{x}\mid\vec{y}\rangle=0$$

だから，$A\vec{y}\in M^\perp$ である。

(d) M，$M^\perp$ の正規直交基底 $\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_m$ と $\vec{y}_1,\ldots,\vec{y}_n$ をとり，$P=(\vec{x}_1\ \ldots\ \vec{x}_m\ \vec{y}_1\ \ldots\ \vec{y}_n)$ とすると，

$$P^*AP=\begin{pmatrix}\lambda\mathrm{E}_m & O\\ O & B\end{pmatrix}$$

書け，$\Phi_A(t)=(t-\lambda)^m\Phi_B(t)$ である。λ が $\Phi_A(t)=0$ の m 重解であるためには，B の固有値でないことをいえば良い。$B\vec{x}=\lambda\vec{x}$ とすると，

$$AP\begin{pmatrix}\vec{0}\\ \vec{x}\end{pmatrix}=PP^*AP\begin{pmatrix}\vec{0}\\ \vec{x}\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}\vec{0}\\ B\vec{x}\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}\vec{0}\\ \lambda\vec{x}\end{pmatrix}=\lambda P\begin{pmatrix}\vec{0}\\ \vec{x}\end{pmatrix}$$

が得られるが，これは $P\begin{pmatrix}\vec{0}\\ \vec{x}\end{pmatrix}\in M^\perp$ が M の要素でもあることを意味する。よって $P\begin{pmatrix}\vec{0}\\ \vec{x}\end{pmatrix}=\vec{0}$ であり，P は正則だから $\vec{x}=\vec{0}$ である。 □

定理 7.10 (正規行列)**.**
n 次複素正方行列 $A\in\mathrm{M}(n,n;\mathbb{C})$ と $\mathbb{C}^n$ の標準内積に関して，次は同値である。

(a) A は正規行列である。
(b) ユニタリ行列 P が存在して P^*AP は対角行列となる。

定理 7.11 (エルミート行列，歪エルミート行列の固有値)**.**
エルミート行列の固有値はすべて実数であり，歪エルミート行列の固有値はすべて純虚数である。

証明: A をエルミート行列とし，$\vec{x}$ を A の固有ベクトルとする。$A\vec{x}=\lambda\vec{x}$ とすると

$$\lambda\langle\vec{x}\mid\vec{x}\rangle=\langle\lambda\vec{x}\mid\vec{x}\rangle=\langle A\vec{x}\mid\vec{x}\rangle=\langle\vec{x}\mid A^*\vec{x}\rangle=\langle\vec{x}\mid A\vec{x}\rangle=\langle\vec{x}\mid\lambda\vec{x}\rangle=\overline{\lambda}\langle\vec{x}\mid\vec{x}\rangle$$

である。$\vec{x}\neq\vec{0}$ だから $\lambda=\overline{\lambda}$ を得る。同様に，$\lambda=-\overline{\lambda}$ となるので，歪エルミート行列の固有値はすべて純虚数である。 □

定理 7.12 (エルミート行列)**.**
n 次複素正方行列 A に対して次が同値であることを示せ。

(a) A はエルミート行列である。
(b) 任意の複素縦ベクトル $\vec{x}\in\mathbb{C}^n$ に対して $\vec{x}^*A\vec{x}$ が実数である。

(c) ユニタリ行列 P が存在して，P^*AP が実対角行列となる

従って実正方行列 A に対して次は同値である。

(d) A は対称行列である。

(e) 直交行列 P が存在して，$P^\top AP$ は対角行列となる。

証明:

(a) から (b) を示す。A が エルミートであれば $\overline{\vec{x}^*A\vec{x}} = \vec{x}^*A^*\vec{x} = \vec{x}^*A\vec{x}$ である。

(b) から (a) を示す。$\vec{x}$ として $\vec{e}_i$ をとれば，$\vec{e}_i^*A\vec{e}_i = A_{ii}$ だから A の対角成分は実数である。また，$\vec{x}$ として $\vec{e}_i+\vec{e}_j$ をとれば，$(\vec{e}_i+\vec{e}_j)^*A(\vec{e}_i+\vec{e}_j) = A_{ii}+A_{ij}+A_{ij}+A_{jj} \in \mathbb{R}$ だから A_{ij} と A_{ji} の虚数部分は絶対値が等しく符号が反対である。さらに $\vec{x}$ として $\vec{e}_i+\sqrt{-1}\vec{e}_j$ をとれば，$(\vec{e}_i+\sqrt{-1}\vec{e}_j)^*A(\vec{x}_i+\sqrt{-1}\vec{e}_j) = A_{ii}+\sqrt{-1}A_{ij}-\sqrt{-1}A_{ij}+A_{jj} \in \mathbb{R}$ だから A_{ij} と A_{ji} の実数部分は等しい。

(a) から (c) を示すのが一番面倒であるが，多くの教科書にあるので，省略する。(c) から (a) を示す。P がユニタリ行列で，$P^*AP = D$ が実対角行列ならば $P^*AP = D = D^* = P^*A^*P$ である。よって左右から P と P^* を掛けて，$A = A^*$ である。

(d), (e) は，実正方行列の場合の (a), (c) の言い換えに過ぎない。 □

問題 7.12 (エルミート行列と歪エルミート行列の関係)**.**
i は虚数単位 $\sqrt{-1}$ を表す。n 次正方複素行列 A が歪エルミート行列であるための必要十分条件はエルミート行列 H が存在して $A = \mathrm{i}H$ と書けることである。
解答例　$A^* = -A$ なら $H = (-\mathrm{i})A$ とおけば，$A = \mathrm{i}H$ かつ $H^* = \overline{-\mathrm{i}}A^* = \mathrm{i}(-A) = H$ である。逆に $A = \mathrm{i}H$ と書ければ，$A^* = \bar{\mathrm{i}}H^* = (-\mathrm{i})H = -A$ である。 □

問題 7.13 (エルミート行列，正規行列)**.**
i は虚数単位 $\sqrt{-1}$ を表す。任意の複素行列 A は 2 つのエルミート行列 B, C で一意的に $A = B + \mathrm{i}C$ と書けることを示せ。またそのように B, C を定めるとき，A が正規であるための条件を B, C に関する条件で表せ。
解答例　$A = B + \mathrm{i}C$ ならば $A^* = B - \mathrm{i}C$ だから，$B = (A + A^*)/2$，$C = (-\mathrm{i}A + \mathrm{i}A^*)/2$ でなければならない。逆に $B = (A + A^*)/2$，$C = (-\mathrm{i}A + \mathrm{i}A^*)/2$ とおけば，B と C はエルミートである。

A が正規であるための条件は $BC = CB$ である。実際，

$$\begin{aligned} AA^* &= (B+\mathrm{i}C)(B-\mathrm{i}C) = BB+\mathrm{i}CB-\mathrm{i}BC+CC \\ A^*A &= (B-\mathrm{i}C)(B+\mathrm{i}C) = BB-\mathrm{i}CB+\mathrm{i}BC+CC \end{aligned}$$

だから $BC = CB$ とすると，$AA^* = BB + CC = A^*A$ である。逆に $AA^* = A^*A$ とすると，$\mathrm{i}CB - \mathrm{i}BC = -\mathrm{i}CB + \mathrm{i}BC$ なので $BC = CB$ が導かれる。 □

問題 7.14 (エルミート行列，歪エルミート行列への分解)**.**
n 次正方複素行列 A はエルミート行列 A_h，歪エルミート行列 A_i の和へ一意に分解でき，A が正規行列であるための必要十分条件は $A_hA_i = A_iA_h$ であることを示せ。
解答例:　$A = A_h + A_i$ ならば，$A^* = A_h^* + A_i^* = A_h - A_i$ だから，$A_h = (A + A^*)/2$，$A_i = (A - A^*)/2$ でなければならない。逆に $A_h = (A + A^*)/2$，$A_i = (A - A^*)/2$ とすれば，それぞれエルミートと歪エル

ミートである。

$$AA^* = (A_h + A_i)(A_h - A_i) = A_hA_h + A_iA_h - A_hA_i - A_iA_i$$
$$A^*A = (A_h - A_i)(A_h + A_i) = A_hA_h - A_iA_h + A_hA_i - A_iA_i$$

だから $A_hA_i = A_iA_h$ とすると，$AA^* = A_hA_h - A_iA_i = A^*A$ である。逆に $AA^* = A^*A$ とすると，$A_iA_h - A_hA_i = -A_iA_h + A_hA_i$ なので $A_hA_i = A_iA_h$ が導かれる。 □

問題 7.15 (エルミート行列)**.**
A を n 次のエルミート行列，$\vec{x}$ を n 項列ベクトルとする。ある正の整数 k が存在して $A^k\vec{x} = \vec{0}$ ならば，$A\vec{x} = 0$ であることを示せ。
解答例　k に関する帰納法による。$k = 1$ なら明らか。$k \geqq 2$ のとき

$$0 = \langle A^k\vec{x} \mid A^{k-2}\vec{x}\rangle = \langle A^{k-1}\vec{x} \mid A^*A^{k-2}\vec{x}\rangle = \langle A^{k-1}\vec{x} \mid A^{k-1}\vec{x}\rangle$$

より $A^{k-1}\vec{x} = \vec{0}$ だから，帰納法の仮定より $A\vec{x} = \vec{0}$ である。 □

問題 7.16 (ユニタリ行列と直交行列)**.**
A，B を n 次実正方行列とする。$A + \mathrm{i}B$ がユニタリ行列であるための必要十分条件は $\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$ が直交行列であることを証明せよ。
解答例

$$(A + \mathrm{i}B)^*(A + \mathrm{i}B) = (A^\top - \mathrm{i}B^\top)(A + \mathrm{i}B) = (A^\top A + B^\top B) + \mathrm{i}(A^\top B - B^\top A)$$

であるから，これが単位行列であるための条件は，$(A^\top A + B^\top B) = \mathrm{E}$，$A^\top B - B^\top A) = O$ である。一方，

$$\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^\top & B^\top \\ -B^\top & A^\top \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^\top A + B^\top B & B^\top A - A^\top B \\ A^\top B - B^\top A & A^\top A + B^\top B \end{pmatrix}$$

であるから，これが単位行列になる条件と同じである。 □

問題 7.17 (ユニタリ行列の固有値)**.**
ユニタリ行列の固有値はすべて絶対値 1 の複素数である。
解答例　A をユニタリ行列とし，$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ とすると，

$$|\lambda|^2\langle\vec{x} \mid \vec{x}\rangle = \langle\lambda\vec{x} \mid \lambda\vec{x}\rangle = \langle A\vec{x} \mid A\vec{x}\rangle = \langle A^*A\vec{x} \mid \vec{x}\rangle = \langle\vec{x} \mid \vec{x}\rangle$$

より，$|\lambda|^2 = 1$ である。 □

問題 7.18 (実対称行列の対角化)**.**
次の行列を直交行列によって対角化せよ。すなわち，直交行列 U と対角行列 Q によって UQU^{-1} の形に表せ。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix},\quad C = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 8 \end{pmatrix},\quad D = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix},\quad E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

解答例　$U = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$，$Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ とすると $UQU^{-1} = A$ である。

$$U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & -1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \ Q = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$ とすると，$UQU^{-1} = B$ である。

$$U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & \sqrt{2}/6 & 2/3 \\ 1/\sqrt{2} & -\sqrt{2}/6 & -2/3 \\ 0 & -2\sqrt{2}/3 & 1/3 \end{pmatrix}, \ Q = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ とすると，$UQU^{-1} = C$ である。

$$U = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -2/3 & 2/3 \end{pmatrix}, \ Q = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$ とすると，$UQU^{-1} = D$ である。

E の固有方程式を解いて，A の固有値は 4 と 1 で，1 は重根である。固有値 4 に属する固有空間は 1 次元で，その基底は例えば $(1,1,1)^\top$。固有値 1 に属する固有空間は 2 次元で，その基底は例えば $(1,-1,0)^\top$ と $(1,0,-1)^\top$。従って，それらを正規直交化し，

$$U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

とすれば $U^{-1}EU = \mathrm{diag}(4,1,1)$ である。 □

問題 7.19 (正規行列，エルミート行列の対角化).
次の行列をユニタリ行列によって対角化せよ。すなわち，ユニタリ行列 U と対角行列 Q によって UQU^{-1} の形に表せ。ただし i は虚数単位 $\sqrt{-1}$ を表す。また，ω は 1 の 3 乗根 $\dfrac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$ である。

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \mathrm{i} & 0 \\ -\mathrm{i} & 3 & -\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} & 1 \\ -\mathrm{i} & 0 & \mathrm{i} \\ 1 & -\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & \omega^2 & \omega \\ \omega & 1 & \omega^2 \\ \omega^2 & \omega & 1 \end{pmatrix},$$
$$D = \begin{pmatrix} 2-\mathrm{i} & 0 & \mathrm{i} \\ 0 & 1+\mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 2-\mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathrm{i} \\ 0 & 0 & 1 \\ -\mathrm{i} & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

解答例 $$U = \begin{pmatrix} \mathrm{i}/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{6} & 0 & \mathrm{i}\sqrt{3} \\ \mathrm{i}/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \ Q = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ とすると $UQU^{-1} = A$ である。

$$U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & \mathrm{i}/\sqrt{6} \\ \mathrm{i}/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -\mathrm{i}/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \ Q = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ とすると $UQU^{-1} = B$ である。

$$U = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega^2 & \omega \\ 1 & \omega & \omega^2 \end{pmatrix}, \ Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$ とすると $UQU^{-1} = C$ である。

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \ Q = \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2-2\mathrm{i} \end{pmatrix}$$ とすると $UQU^{-1} = D$ である。

$$U = \begin{pmatrix} \mathrm{i}/2 & \mathrm{i}/2 & \mathrm{i}/\sqrt{2} \\ 1/2 & 1/2 & -1/\sqrt{2} \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ とすると $UQU^{-1} = E$ である。 □

7.3 一般の行列の上三角化と対角化

定理 7.13 (行列の上三角化)**.**
任意の正方行列 A は，重複も含めて n 個の固有値を持つとき，次のようにして上三角化できる。

(a) A の固有値の一つ λ_1 を求める。

(b) λ_1 に属する固有ベクトル $\vec{x}_1$ を 1 つ求める (斉 1 次方程式 $(A - \lambda\mathrm{E})\vec{x} = \vec{0}$ の非自明解を 1 つ求める)。

(c) $\vec{x}_1$ を拡張して得た基底を並べて行列 $Q = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ を作る。$Q^{-1}Q = \mathrm{E}$ より $Q^{-1}\vec{x}_i = \vec{e}_i$ だから，
$$Q^{-1}AQ = (Q^{-1}A\vec{x}_1, \ldots, Q^{-1}A\vec{x}_n) = (\lambda_1\vec{e}_1, \ldots, Q^{-1}A\vec{x}_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ \vec{0} & B \end{pmatrix}$$
とおける。

(d) $\Phi_A(x) = \Phi_{Q^{-1}AQ}(x) = (\lambda_1 - x)\Phi_B(x)$ だから，A の固有値は，B の固有値に λ_1 を一つ加えたものであり，B は重複を含めて $n-1$ 個の固有値を持つ。従って $P^{-1}BP$ が上三角行列になるような P が帰納的に見つかる。

(e) $R = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^{\top} \\ \vec{0} & P \end{pmatrix}$ とすれば，$(QR)^{-1}A(QR) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ \vec{0} & P^{-1}BP \end{pmatrix}$ となり，A は上三角化される。

系 7.14 (上三角の表現行列)**.**
n 次元複素ベクトル空間 V 上の線形変換 $f : V \to V$ に対し，適当な V の基底を選べば，その基底に関する f の表現行列は上三角になる。特に，任意の複素正方行列 A に対して, 適当な正則行列 P を選べば，$P^{-1}AP$ が上三角になる。

証明: V の基底 β を任意に選び，β に関する f の表現行列を A とする。$\Phi_f(x) = \Phi_A(x)$ は n 次式だから，（代数学の基本定理により）A は $\mathbb{C}$ 内に重複を含めて n 個の固有値を持つ。定理 7.13 により，正則行列 P が存在して，$P^{-1}AP$ は上三角行列となる。このとき，基底を $\beta' = \beta P$ とすれば，β' に関する f の表現行列は $P^{-1}AP$ である。 □

系 7.15 (不変性)**.**
n 次元複素ベクトル空間 V 上の線形変換 $f : V \to V$ に対し，V の基底 $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ で，各 i $(1 \le i \le n)$ について
$$f(\vec{v}_i) \in \mathrm{Span}(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_i)$$
を満たすものが存在する。

証明: 系 7.14 の V の基底を β として，$(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n) = \beta$ とおけばよい。 □

定理 7.16 (対角化)**.**
V を K 上の n 次元線形空間，f を V 上の線形変換とする。f の相異なる固有値の全体を $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ とし，それぞれの固有空間の和を $W = V_f(\lambda_1) + \cdots + V_f(\lambda_r)$ とすると，この和は直和
$$W = V_f(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus V_f(\lambda_r)$$

である。また，次の条件はどれも同値である。

(a) V のどの基底に関する f の表現行列 A も対角化可能である。すなわち，ある正則行列 P が存在して，$P^{-1}AP$ は対角行列となる。

(b) V のある基底に関する f の表現行列が対角行列になる。すなわち，f の固有ベクトルからなる V の基底が存在する。

(c) $W = V$ である。すなわち $\dim W = \dim V_f(\lambda_1) + \cdots + \dim V_f(\lambda_r) = n$ である。

(d) 固有多項式 $\Phi_f(x)$ は完全に 1 次式の積 $(x-\lambda_1)^{n_1}\cdots(x-\lambda_r)^{n_r}$ に分解され, 各固有空間の次元 $\dim(V_f(\lambda_i))$ は多重度 n_i に等しい。

系 7.17 (対角化の十分条件)**.**
n 次元ベクトル空間 V 上の線形変換 f が n 個の異なる固有値を持てば，f の表現行列は対角化可能である。

問題 7.20 (固有値，対角化)**.**
次の行列の固有値をすべて求めよ。また各固有値の固有空間の基底を 1 組与えよ。また，対角化できる行列は対角化せよ。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -6 & -2 & 6 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 4 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

解答例　A, B, C, D, G は略。$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおけば $P^{-1}FP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ である。 □

問題 7.21 (対角化，行列多項式)**.**
正方行列 A は正則行列 Q によって対角化され，$Q^{-1}AQ = \mathrm{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ となるとする。$p(x)$ を多項式とするとき，$p(A) = Q\mathrm{diag}(p(a_1), p(a_2), \ldots, p(a_n))Q^{-1}$ を示せ。

問題 7.22 (固有値，対角化)**.**
次の行列が対角化できるような複素数 a, b, c を求めよ。

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

解答例　$a = b = c = 0$ のとき対角できる。 □

問題 7.23 (固有値，対角化)**.**
次の行列が対角化できるような複素数 a を求めよ。対角化せよ。

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix}$$

解答例　固有方程式は $\phi_A(t) = (x-a)(x-2)(x+a) = 0$ である。a が 0 でも 2 でも -2 でもなければ重解を持たないから対角化できる。$a = 0$ のときは，重解 $x = 0$ を持つが，$\mathrm{null}(0\mathrm{E} - A) = 1$ なので対角化できない。$a = 2$ のときは，重解 $x = 2$ を持つが，$\mathrm{null}(2\mathrm{E} - A) = 2$ なので対角化できる。$a = -2$ のときは，重解 $x = 2$ を持つが，$\mathrm{null}(2\mathrm{E} - A) = 1$ なので対角化できない。 □

問題 7.24 (対角化，固有値，固有ベクトル (平成 22 年度筑波大学大学院数理物質科学研究科入試))**.**
次の 7 次正方行列 B について，B が対角化可能かどうか，理由とともに答えよ。

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 32 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 64 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

問題 7.25 (Hilbert-Schmit の内積)**.**
$\mathrm{M}(m,n;\mathbb{C})$ の要素 A, B に対して，$\langle A \mid B \rangle \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Tr}(B^* A)$ で内積を定めると $\mathrm{M}(m,n;\mathbb{C})$ は計量ベクトル空間となることを示せ。ここで B^* は B の随伴行列を表わす。つまり $B^*[i,j] = \overline{B[j,i]}$ である。

問題 7.26 (可換性)**.**
V を K 上のベクトル空間，f, g を V 上の対角化可能な線形変換とする。$f \circ g = g \circ f$ のとき，V の基底をうまく選んで，その基底に関する f と g の表現行列が共に対角行列になるようにできることを示せ。このとき $f \circ g$ もまた対角化可能であることを示せ。

問題 7.27 (固有値，可換性，対角化)**.**
次の行列を考える。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

(a) A^2，A^3 を求めよ。

(b) A を複素行列とみて対角化せよ。

(c) B を A の多項式で表せ。

(d) B を対角化せよ。

解答例

(a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $\Phi_A(x) = x^3 - 1 = 0$ を解いて，$x = 1, \omega, \omega^2$ が固有値である。ただし ω は 1 の 3 乗根の 1 つ $\dfrac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$ とする。これらは単根なので A は，ある正則行列 P によって対角化可能で $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix}$ となる。

(c) $B = a\mathrm{E} + bA + cA^2$

(d) 上の結果より

$$P^{-1}BP = a(P^{-1}\mathrm{E}P) + b(P^{-1}AP) + c(P^{-1}A^2P) = \begin{pmatrix} a+b+c & 0 & 0 \\ 0 & a+b\omega+c\omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & a+b\omega^2+c\omega \end{pmatrix}$$

となる。 □

定義 7.18 (射影子)**.**
ベクトル空間 V 上の線形変換 f が任意のベクトル $\vec{x} \in V$ に対して $f(f\vec{x}) = f\vec{x}$ なる性質を持つとき，f を射影子 (projection) と呼ぶ。

問題 7.28 (射影子，固有値，対角化)**.**
$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -6 \\ a & 1 & 6 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ とする。ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ 上の線形変換 $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ が射影子になるように a を定め，そのときの A を対角化せよ。

解答例　$f(f\vec{x}) = f\vec{x}$ ならば

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & -6 \\ a & 1 & 6 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} = A = A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -6 \\ 5a+12 & 1 & -6a-12 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

だから，$5a + 12 = a, -6a - 12 = 6$ を解いて $a = -3$ を得る。このときの A の固有値は 1 と o だけであり，例えば $V_A(1)$ の基底として $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$V_A(0)$ の基底として $\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ が取れる。そこで $Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ とすると $Q^{-1}AQ$ は対角行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ となる。 □

問題 7.29 (射影子，固有値，対角化)**.**
ベクトル空間 V 上の線形変換 f が任意のベクトル $\vec{x} \in V$ に対して $f(f\vec{x}) = f\vec{x}$ なる性質を持つとき，f を射影子と呼ぶ。射影子 f について次に答えよ。

(a) $\mathrm{Im}\, f$ と $\mathrm{Ker}\, f$ がそれぞれ固有空間になることを示し，その固有値を求めよ。
(b) $V = \mathrm{Im}\, f + \mathrm{Ker}\, f$ を示せ。
(c) f の表現行列は対角化できるか？できる場合，その結果の対角行列はどのような形になるか？

解答例

(a) $\vec{x} \in \mathrm{Ker}\, f$ ならば $f\vec{x} = \vec{0} = 0\vec{x}$ だから，明らかに $\mathrm{Ker}\, f$ は固有値 0 の固有空間である。また，$\vec{x} \in \mathrm{Im}\, f$ ならば $\vec{x} = f\vec{y}$ となる $\vec{y}$ が存在するので，$f\vec{x} = f(f\vec{y}) = f\vec{y} = \vec{x} = 1\vec{x}$ だから，$\mathrm{Im}\, f$ は固有値 1 の固有空間である。
(b) 任意の $\vec{x} \in V$ が $\vec{x}_1 \in \mathrm{Im}\, f$ と $\vec{x}_2 \in \mathrm{Ker}\, f$ により $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$ と書ければいい。$\vec{x}_1 = f\vec{x}$, $\vec{x}_2 = \vec{x} - f\vec{x}$ とおけば，$\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$ と $\vec{x}_1 \in \mathrm{Im}\, f$ は明らか。$\vec{x}_2 \in \mathrm{Ker}\, f$ は，

$$f\vec{x}_2 = f\vec{x} - f(f\vec{x}) = f\vec{x} - f\vec{x} = \vec{0}$$

より分かる。

(c) 前問と前々問より，V は固有値 1 の固有空間 $\mathrm{Im}\, f$ と固有値 0 の固有空間 $\mathrm{Ker}\, f$ との直和になっていることが分かる。よって f の表現行列は，対角化でき，その結果の対角成分には 1 と 0 だけが並ぶ。

□

問題 7.30 (行列の平方根)**.**
$A = \begin{pmatrix} -14 & 30 \\ -9 & 19 \end{pmatrix}$ とする。

(a) A の固有値を求めよ。

(b) $P^{-1}AP$ が対角行列になるような 2 次正方行列 P を求めよ。

(c) $B^2 = A$ となる 2 次正方行列 B を 4 種類求めよ。

解答例

(a) 方程式 $(-14-\lambda)(19-\lambda)+9\times 30=0$ を解いて，固有値は 1 と 4 である。

(b) 固有値 1 の固有ベクトルとして $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$，固有値 4 の固有ベクトルとして $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ が得られる。よって，$P = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ とすると $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ となる。

(c) $B = P\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 2 \end{pmatrix}P^{-1}$ とすれば，

$$B^2 = P\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 2 \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}P^{-1} = A$$

だから，4 種類の B として，$P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 10 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$，$P\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} -16 & 30 \\ -9 & 17 \end{pmatrix}$，$P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} 16 & -30 \\ 9 & -17 \end{pmatrix}$，$P\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -10 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$ がとれる。

□

問題 7.31 (固有値，固有多項式)**.**
複素正方行列 A の固有値がすべて 1 より小さい実数であれば $\det(\mathrm{E}-A)$ は正の実数であることを示せ。
解答例　A の固有値を $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (<1) とすると $\Phi_A(t) = \det(t\mathrm{E}-A) = (t-\lambda_1)\cdots(t-\lambda_n)$。よって $\det(\mathrm{E}-A) = \Phi_A(1) = (1-\lambda_1)\cdots(1-\lambda_n) > 0$ である。 □

問題 7.32 (行列の対角化)**.**
次の行列 A，B がそれぞれ対角化可能かどうかを判定し，可能な場合は対角化せよ。ただし，$a \neq b$，$c \neq 0$ とする。

$$A = \begin{pmatrix} a & c & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

解答例　A, B とも上三角行列であり，固有多項式はどちらも明らかに $(x-a)^2(x-b)$，よって固有値は，

a, b の 2 つで，重複度はそれぞれ 2 と 1 である。

$$A - a\mathrm{E} = \begin{pmatrix} 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b-a \end{pmatrix}, \quad B - a\mathrm{E} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & b-a \end{pmatrix}$$

は，基本変形によって直ちに分かるように，ランクがそれぞれ 2 と 1 である。$3 - \mathrm{rank}(A - a\mathrm{E}) = 1$, $3 - \mathrm{rank}(A - a\mathrm{E}) = 2$ より，固有値 a の固有空間の次元は，それぞれ 1, 2 となるが，前者は a の重複度に足りず，後者は重複度に等しい。よって A は対角化不可能であり，B は可能である。B を対角化すれば，当然

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

となる。 □

問題 7.33. 実数 a, b に対して行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a & b \\ a & 1+a^2 & ab \\ b & ba & 1+b^2 \end{pmatrix}$$

で定義する。

(a) $\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix}$ が A の固有ベクトルであることを証明せよ。

(b) A の固有値を求めよ。

(c) $P^{-1}AP$ が対角行列になるような正則行列 P を 1 つ求めよ。

解答例:

(a) $A \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+a^2+b^2 \\ 2a+a^3+ab^2 \\ 2b+ba^2+b^3 \end{pmatrix} = (2+a^2+b^2) \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix}$

(b) A の固有方程式 $(x-1)^3(x-(2+a^2+b^2)) = 0$ を解いて，A の固有値は $2+a^2+b^2$ と 1 で，1 は 2 重根である。

(c) 固有値 $1+a^2+b^2$ の固有空間の基底として $\begin{pmatrix} 2 \\ a \\ b \end{pmatrix}$, 固有値 1 の固有空間の基底として $\begin{pmatrix} a \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

が取れるから，$p = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ a & -1 & 0 \\ b & 0 & -1 \end{pmatrix}$ とできる。 □

問題 7.34 (行列の対角化)**.**

n 次正方行列 $A = ([i \neq j])$ が対角化可能かどうかを判定し，可能な場合は対角化せよ。ただし，[ ] は Iverson の記号である。つまり A は対角成分が 0，それ以外の成分が 1 の行列である。

解答例　$\Phi_A(t) = (t+1)^{n-1}(t-n+1)$ である。固有値 -1 の固有空間 $V_A(-1)$ には，線形独立な $n-1$ 個の固有ベクトル

$$(1\ -1\ 0\ \cdots\ 0)^\top, \quad (1\ 0\ -1\ \cdots\ 0)^\top, \quad \ldots, \quad (1\ 0\ 0\ \cdots\ -1)^\top$$

があるので，固有値 $n-1$ の固有ベクトル $(1\ 1\ 1\ \cdots\ 1)^{\top}$ と合わせて，

$$P = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & & O & 1 \\ & \ddots & & \vdots \\ O & & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

とおけば，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & & & O \\ & \ddots & & \\ & & -1 & \\ O & & & n-1 \end{pmatrix}$$

となる。 □

問題 7.35 (確率行列の対角化)**.**
$A = \begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix}$ $(0 < p, q < 1)$ のとき，

(a) A の固有値を求めよ。

(b) A を対角化せよ。

(c) A^n を求めよ。

(d) $\lim_{n\to\infty} A^n$ を求めよ。

解答例

(a) 固有方程式 $\Phi_A(x) = (x-1+p)(x-1+q) - pq = 0$ を解いて，$x = 1$ と $x = 1-p-q$ が固有値である。

(b) 条件 $0 < p, q < 1$ より $1-p-q < 1$ だから，A は，固有値が単根なので対角化できる。固有値 1 と $1-p-q$ の固有ベクトルは，それぞれ $P = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$ と $P = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ なので，$P = \begin{pmatrix} q & -1 \\ p & 1 \end{pmatrix}$ と置くと，

$$P^{-1}AP = \frac{1}{p+q}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -p & q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q & -(1-p-q) \\ p & 1-p-q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-p-q \end{pmatrix}$$

と対角化される。

(c) $P^{-1}A^nP = (P^{-1}AP)^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1-p-q)^n \end{pmatrix}$ より，

$$\begin{aligned} A^n &= P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1-p-q)^n \end{pmatrix}P^{-1} = \frac{1}{p+q}\begin{pmatrix} q & -(1-p-q)^n \\ p & (1-p-q)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -p & q \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{p+q}\begin{pmatrix} q+p(1-p-q)^n & q-q(1-p-q)^n \\ p-p(1-p-q)^n & p+q(1-p-q)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(d) $|1-p-q| < 1$ より，$n \to \infty$ のとき $(1-p-q)^n \to 0$ だから

$$\lim_{n\to\infty} A^n = \frac{1}{p+q}\begin{pmatrix} q & q \\ p & p \end{pmatrix}$$

である。 □

問題 7.36 (確率行列の対角化).

p を $\dfrac{1}{2} < p < 1$ なる実数とし，$A = \begin{pmatrix} 0 & p & 1-p \\ p & 0 & 1-p \\ 1-p & 1-p & 2p-1 \end{pmatrix}$ とおく。

(a) A を対角化せよ。

(b) $\lim_{n\to\infty} A^n$ を求めよ。

問題 7.37 (広義フィボナッチ数列).

$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ を満たす数列 $\{a_n\}$ を広義のフィボナッチ数列と呼ぶ。広義のフィボナッチ数列の全体を W とする。$f_0 = 0, f_1 = 1, f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ で定義される数列 $\vec{v}_1 = \{f_n\}$ を (狭義の) フィボナッチ数列という。これから初項を除いた数列，すなわち $g_n = f_{n+1}$ で定義される数列 $\vec{v}_2 = \{g_n\}$ もまた広義のフィボナッチ数列であり，$\beta = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ は W の基底になる。

(a) $l_0 = 2, l_1 = 1, l_{n+2} = l_{n+1} + l_n$ で定義される数列 $\{l_n\}$ をリュカ数列と呼ぶ。β に関するリュカ数列の成分表示を求めよ。

(b) 広義のフィボナッチ数列の初項を除いた結果は明らかにまた広義のフィボナッチ数列になるが，初項を除く操作 g は，W 上の線形変換であることを示し，基底 β に関する g の表現行列を求めよ。

(c) g の固有値と，その固有値の固有ベクトルをすべて求めよ。

問題 7.38 (数列).

漸化式 $x_{n+3} = ax_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n$ を満たす数列 $\{x_n\}$ の全体 W とする。$1, 0, 0, c, ac, \ldots$ で始まる W の数列を $\vec{v}_1$，$0, 1, 0, b, ab + c, \ldots$ で始まる数列を $\vec{v}_2$，$0, 0, 1, a, a^2 + b$ で始まる数列を $\vec{v}_3$ とすると $\beta = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ は W の基底になる。また，数列 $x_0, x_1, x_2, \ldots$ から初項を取り除き数列 $x_1, x_2, x_3 \ldots$ にする操作を f とすると，f は W 上の線形変換になる。

(a) 基底 β に関する f の表現行列を求めよ。

(b) g の固有多項式 $\Phi_f(t)$ を求めよ。

(c) g の固有方程式 $\Phi_f(t) = 0$ が異なる 3 根 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ を持つとき，任意の数列 $\{x_n\} \in W$ の一般項が定数 k_1, k_2, k_3 を用いて $x_n = k_1{\lambda_1}^n + k_2{\lambda_2}^n + k_3{\lambda_3}^n$ と表されることを示せ。

解答例

(a) W の要素は最初 3 項によって決まるので，g の表現行列は $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ c & b & a \end{pmatrix}$ である。

(b) $\Phi_f(t) = \det \begin{pmatrix} t & -1 & 0 \\ 0 & t & -1 \\ -c & -b & t-a \end{pmatrix} = t^3 - at^2 - bt - c$ である。

(c) 固有値 λ_i の g の固有ベクトルを $\vec{v}_i$ とすると $g(\vec{v}_i) = \lambda_i \vec{v}_i$ である。すなわち，$\vec{v}_i$ は初項を取り除くと λ_i 倍されるのだから一般に $\vec{v}_i = \{c_i{\lambda_i}^n\}$ と書ける。一方，固有値 λ_i が異なれば，$(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ は W の基底を作るから，任意の $\vec{v} = \{x_n\} \in W$ が $d_1\vec{v}_1 + d_2\vec{v}_2 + d_3\vec{v}_3$ の形に書ける。$k_i = d_ic_i$ とすれば $x_n = k_1{\lambda_1}^n + k_2{\lambda_2}^n + k_3{\lambda_3}^n$ である。 □