ちょこっと探究クラブ
数学パズルランド探検隊
— すべての問題と答え —

坂井公筑波大学 数理物質系 数学域

数学パズルランドのジャングルを抜けて行こう。そのためにはパズルを解いていく必要があります。複雑な計算はいりませんが，試行錯誤で解けるものばかりではなく，論理的に緻密に考えなければなりません。ジャングルの向こうには何があるかな？

1　壊れたヘルスメータ

壊れたヘルスメータがあり，何を計っても，実際より一定値大きな重さを示す。今，カバン A を計ると 8 kg を示し，カバン B を計ると 5 kg を示した。A と B を一緒に計ると 10 kg だった。A と B の実際の重さは何 kg だろうか？ またこのヘルスメータで 10 kg のものを計ると何 kg を示すだろうか？

解答例：　A と B を一緒に計ったときの 10 kg から A だけを計ったときの 8 kg を引くとヘルスメーターの狂いが修正されて B の本当の重さが分る。つまり B の重さは $10 - 8 = 2$ kg である。よって，ヘルスメーターが狂う量は $5 - 2 = 3$ kg である。10 kg のものを計れば ヘルスメータは $10 + 3 = 13$ kg を示す。ちなみにカバン A の本当の重さは $8 - 3 = 5$ kg である。

2　桜の木を数える

A と B が公園をそれぞれ散歩している。周遊路ががあり，それに沿って桜が植えてあるので，2 人はその数を数え始めた。2 人の数え始めは別々の木で，A の 20 番目の木は B の 7 番目で，A の 7 番目は B の 97 番目だった。木はまばらに順序よく立っているので，数え落としたり，順番が狂ったりすることはありえない。周遊路に沿って何本の桜の木が立っているかわかるだろうか？また，2 人が歩いた方向は同じだろうか，それとも反対向きだろうか？

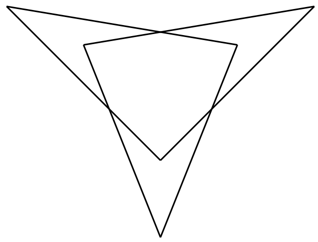
解答例：　A の 7 番目の木に赤い札，20 番目の木に青い札を目印としてつけよう。A が数えた方向に向かって，その 2 つの木の間にはきっちり 12 本の桜がある。というのは，7 より大きく 20 より小さい整数はちょうど 12 個あるからだ。同様に，B の数えた方向に向かっては，青い札の木から赤い札の木までは 86 本の桜がある。最後に札をつけた木をかぞえあわせると，桜の本数の合計は $12 + 86 + 2 = 100$ となることがわかる。2 人が歩いた方向が反対なら間にある木の数は同じになるはずだから，歩いた方向は同じだ。

3　折れ線の閉路

6 本の線分からできている折れ線の閉路で，どの線分も端点以外の点で他の線分のどれか 1 本と交わるものを描け。閉路とは，終点と始点が同じであるような道をいう。

7 本の線分からできている折れ線の閉路で，同様のものを描けるだろうか?

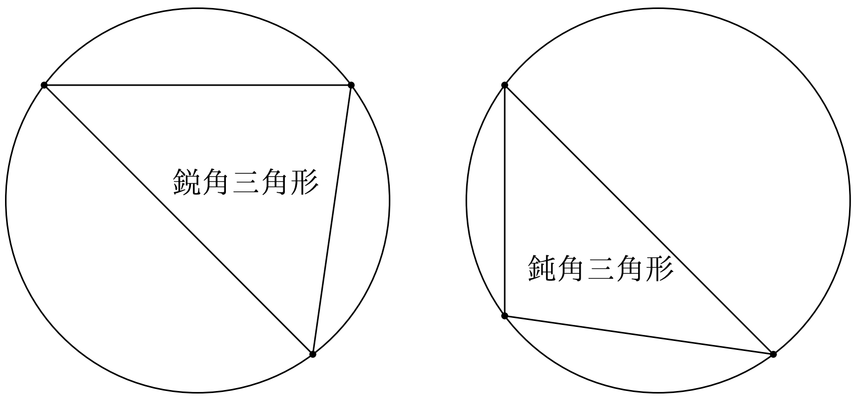
解答例：　6 本の線分による折れ線閉路は, 例えば下図のように描ける。



7 本の線分からできている折れ線の閉路では同様のものは描けない。背理法によって証明しよう。そのような折れ線があるとし，この折れ線が線分の端点以外で自分自身と交差する回数を数えよう。各線分にはこのような交点がちょうど 1 つある。線分が 7 本あり，各交点はちょうど 2 つの線分にのっている。だったら，交点はいくつあるだろうか？ 線分の本数のちょうど半分つまり 3.5 個だが点の数は整数でなければならないから，それは不可能だ。

4　鋭角 3 角形になる確率

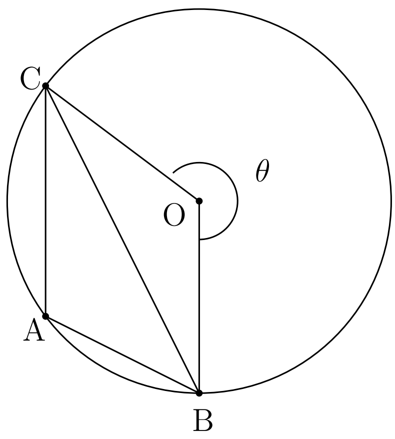
円周上にでたらめに 3 点を取ったとする。この 3 点を結ぶと 3 角形ができるが，それが鋭角三角形になる確率はいくつだろうか？



解答例：

どこからでもよいから円周上を反時計回りに巡って 3 点を順に A，B，C と名付けよう。A が鈍角になるための条件は，下図の B から A へ反時計回りに計った中心角 $\theta = \angle\mathrm{BOA}$

が 180 度より大きくなることだ。なぜなら θ は円周角 A の 2 倍だからである。

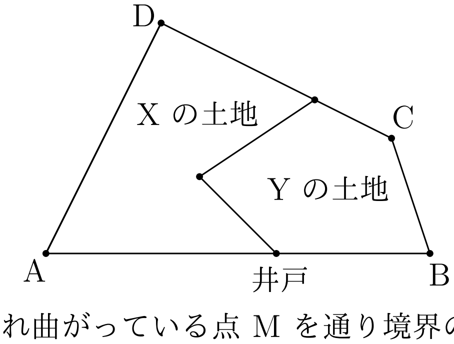


言い換えれば，B から見たときに，2 点 A と C がともに 円周の左側にあるということで，A と C が左右どちらにあるかの可能性はそれぞれ半々なので，ともに円周の左側になる確率は 1/4 だ。

同様に B が鈍角になる確率も C が鈍角になる確率も 1/4 だ。三角形の内角の和は 180 度だから，2 つの角が同時に鈍角になる可能性はない。従って，ABC が鋭角三角形になる確率は，A，B，C それぞれが鈍角になる確率を 1 から引いて $1 - 1/4 - 1/4 - 1/4 = 1/4$ である。

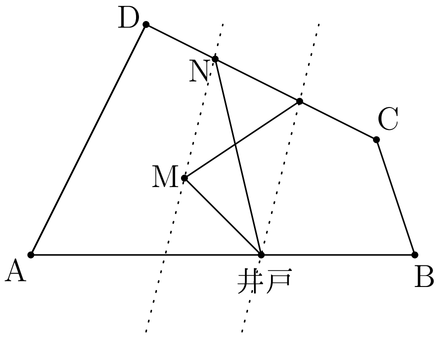
5　土地の整地

下図のような 4 角形 ABCD 型の土地があり，2 本の線分で地主 X と Y の土地に分けられている。2 人の協議により，境界線を直線にしようと言うことになった。条件は，互いの土地面積が以前と変わらず，共同の井戸がその境界線の上にあること。どのように境界線を引けばよいだろうか？



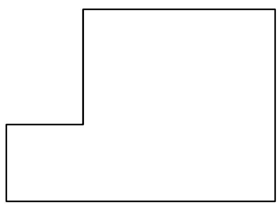
解答例：　現在の境界が折れ曲がっている点 M を通り境界の両端を結ぶ線と平行な直線を引く。その線と DC との交点を N とし，N と井戸とを結ぶ直線を新しい境界線とすれば

よい。

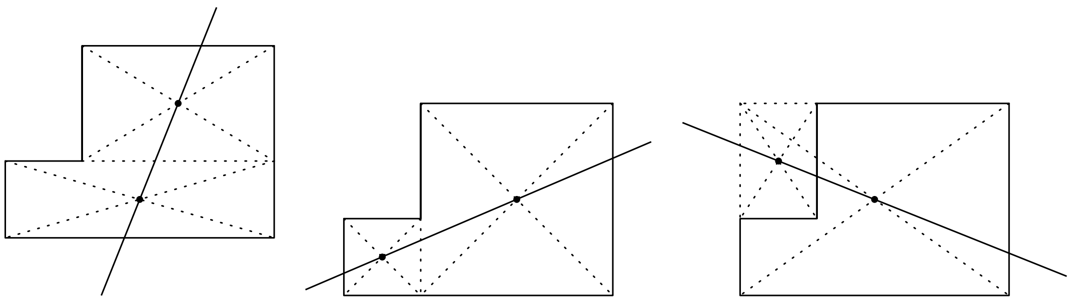


6　階段型図形の 2 等分

下図のような長方形 2 つをつなげたような図形がある。1 本の直線を引いて，この図形（の面積）を 2 等分してほしい。そのような直線を 3 本以上引けるだろうか？



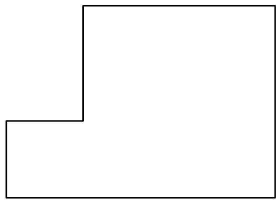
解答例：　下図のように 2 つの長方形の中心を結ぶ直線を引けば，簡単に 2 等分できる。



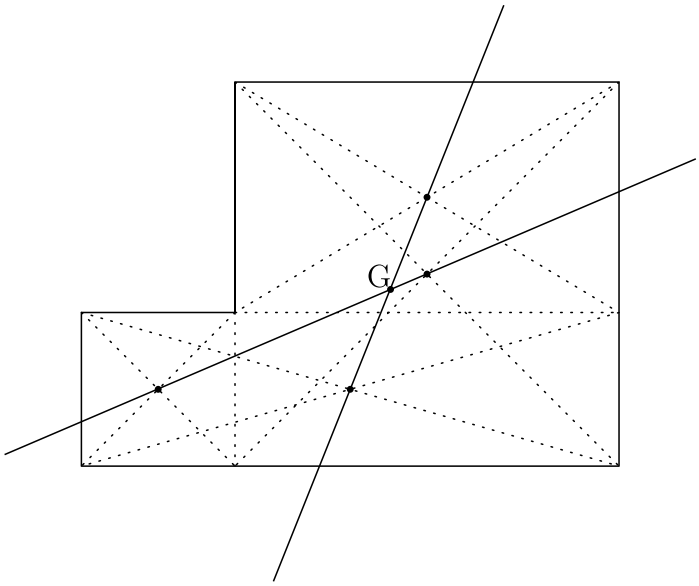
しかし，このような線は，あることに気づけば，3 本に限らず何本でも好きなだけ簡単に引くことができる。そのやり方が分かるだろうか？

7　階段型図形の重心

下図のような長方形 2 つをつなげたような図形がある。この図形の重心を見つけてほしい。



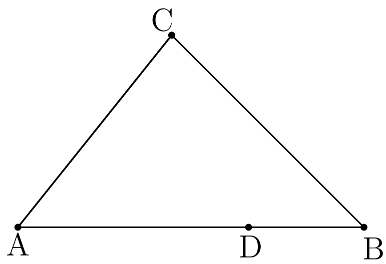
解答例：　先の解の図形を利用することができる。2 つの図を合わせて，長方形をの中心を結ぶ線を 2 本引けばよい。その交点が重心 G になる。



一般には，面積を 2 等分する線が重心を通るとは限らないが，長方形の中心は重心でもある。図形が 2 つに分けられ，それぞれの重心が分かっているなら，全体の重心は，2 つの重心を結ぶ直線上にあるから，上図のようにして重心が求まる。

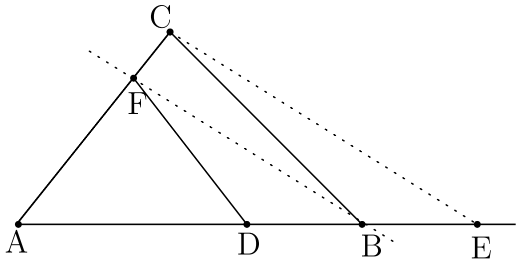
8　3 角形の 2 等分

下図のような 3 角形 ABC があり，その辺 AB 上に点 D をが打ってある。D を通り 3 角形 ABC（の面積）を 2 等分する直線を引いてほしい。



解答例：　下図のように線分 AB を B 方向に延長し，その上に AD=DE となるように点 E をとる。EC と平行になるように B を通る直線を引き，線分 AC との交点を F とする。

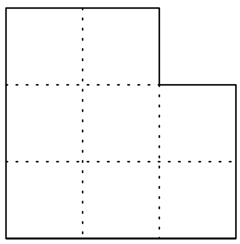
すると線分 DF が 3 角形 ABC を 2 等分する。



なぜなら FB と CE は平行だから 3 角形 FBC と 3 角形 FBE の面積は等しい。したがって 3 角形 ABC と 3 角形 AEF の面積も等しい。3 角形 ADF の面積は，明らかに AEF の半分だから ABC の半分でもある。

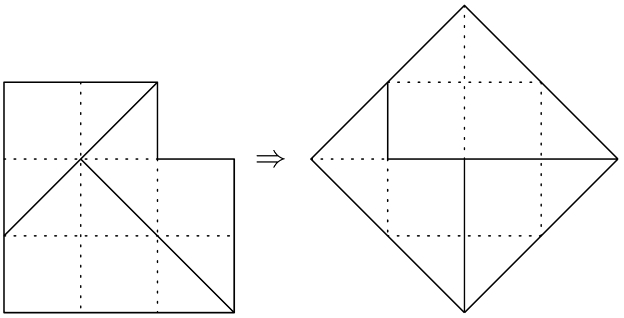
9　図形の分割合同（隅のかけた正方形）

下図のような右上隅 $\frac{1}{9}$ の切れた正方形の布がある。3 つに切り離し，再度貼りあわせて，少しサイズの小さい正方形にせよ。もちろん布を余らせたりしてはいけない。



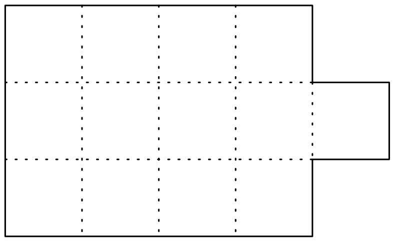
解答例：　小正方形の辺を 1 とすると，目的の正方形の 1 辺は $\sqrt{8}$ になる。

そのような長さの線分を見つけてうまく切ると ……



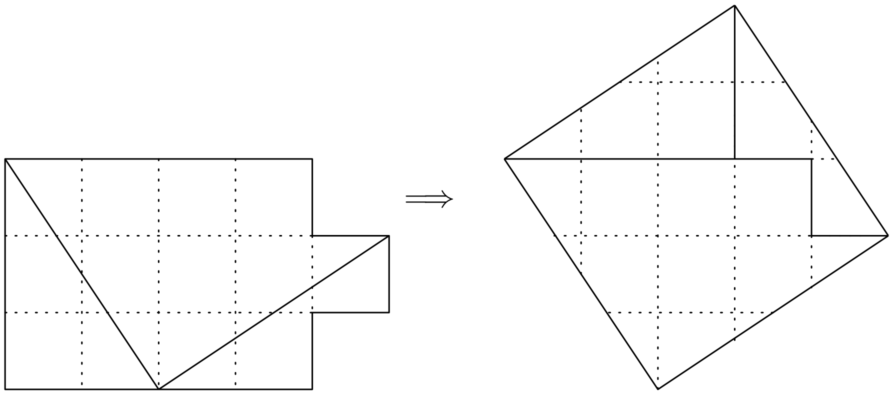
10　図形の分割合同（水筒形）

下図のような水筒形の布がある。いくつかに切り離し，再度貼りあわせて正方形にせよ。もちろん布を余らせたりしてはいけない。



解答例：　小正方形の辺を 1 とすると，目的の正方形の 1 辺は $\sqrt{13}$ になる。

そのような長さの線分を見つけてうまく切ると ……



11　平面上の領域

平面に 6 本の直線を自由に引く。平面をなるべくたくさんの領域に分けるにはどのように引くの良いだろうか? また，このとき平面はいくつの領域に分かれるだろうか？

解答例：　直線を次第に増やして行って数えるとよい。1 本も引かないうちは，領域はもちろん 1 つだが，直線を 1 本引くと領域は 2 つに分かれる。もう 1 本引くとそれぞれが 2 つに分かれ合計 4 つに なる。さらに 1 本引くと，今度は（1 つはそのままで） 3 つの領域だけが 2 つに分かれ全部では 7 つになる。

こうして，直線を増やして行くことを考えるとどうなるか。既に n 本直線が引いてあるところに新しい直線を 1 本引くと，この直線はほかの直線たちと最大 n 箇所で交わる。この交点たちは新しく引いた直線を $n+1$ 個の線分と半直線に分ける。この線分や半直線たちが通る領域が 2 つに分かれるので，領域は最大で $n+1$ 増える。従って 6 本の直線を引いた場合，最大では $1+1+2+3+4+5+6=22$ の領域ができる。

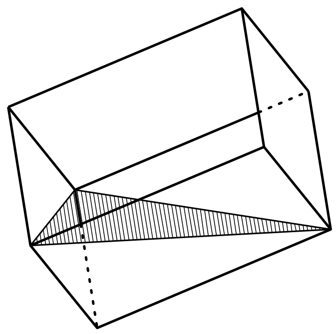
また，新しい直線は既に描いてある直線すべてとそれぞれ異なる点で交わるようにすると領域数は最大になる。

ところで，一般に n 本の直線が平面に引かれているとき，領域数が最大でいくつになるかを n の式で表すことができるだろうか？

12　1 升マス

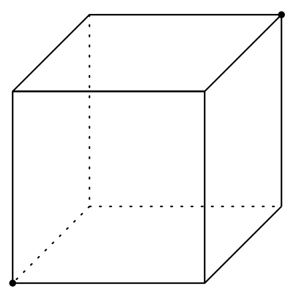
直方体の 1 升マスがある。この 1 升マスだけを使って 1/6 升の酒を計るにはどうすればよいだろうか？マスは正確な直方体だが，目盛などはどこにも記されていない。

解答例：　下図のように，マスの底面の対角線と上面の頂点を通る面 (斜線の面) が水平になるようにマスを傾け，酒を計ればよい。

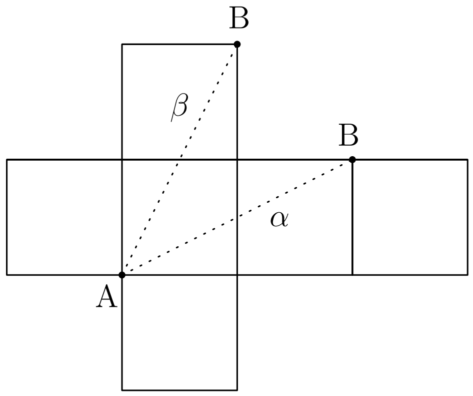


13　立方体の部屋とヤモリ

ヤモリが立方体の部屋の隅にいる。ヤモリは反対の隅に行きたいと思っているが，部屋の壁・床・天井を這ってしか移動できない。最短で目的地に移動するにはどういう経路をとるのが良いだろうか？



解答例：　ヤモリの出発点を A を目標地点を B として立方体の展開図を描くと考えやすい。

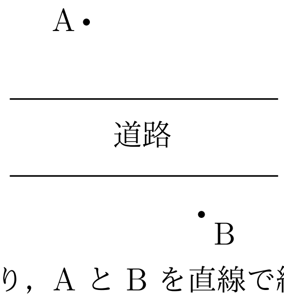


ヤモリは部屋の面（壁・床・天井）を這ってしか移動できない。A には 3 つの面が隣接し，B にも 3 つの面が隣接しているが，A から B まで行くには，ヤモリは A に隣接するある面から B に隣接するある面へと横切らなければならない。この場合，展開図上で A と B を直線で結ぶ経路が最短である。これらの経路には上の図の α，β など複数あるが，部屋は立方体なので，どれも同じ長さである。

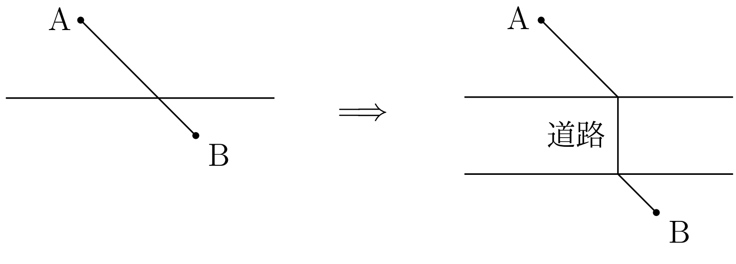
もし部屋が直方体だったら，どういう経路をとるのが良いだろうか？

14　最短経路（道路越え）

下図 A の位置にあなたはいて，道路を挟んだ B の地点に行こうとしている。道路以外はどこでも自由に通れるが，道路は垂直に渡らなければいけないとすると，最短距離で A から B に行くにはどういう経路を進むのが良いか？道路は一直線に走っていて，幅はどこも一定である。

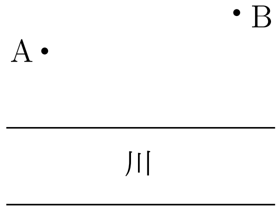


解答例：　道路を無視した図を作り，A と B を直線で結ぶ。その後，道路を実際の幅分に広げてやればよい。

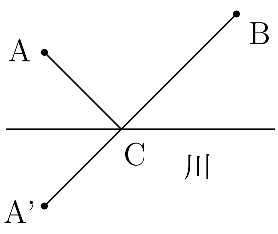


15　最短経路（水汲み）

あなたは川に水汲みに出たところ，友達と会って思わず遊んでしまい，下図の A 地点まで来た。これから川に立ち寄ってバケツに水を汲み B の自宅を帰ろうと思うが，最短距離で帰るにはどういうルートをとればよいか。

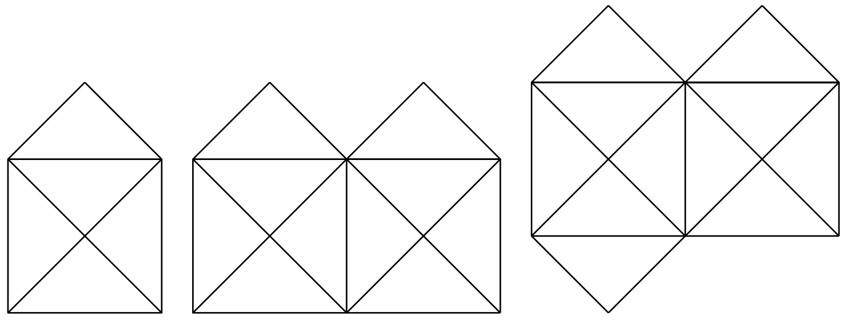


解答例：　川岸を鏡に見立てて，A の対称点 A' を川の側にとる。A' と B を結ぶ直線を引き，川岸との交点を C とする。あなたは C までまっすぐに行って水を汲み，そこからはまっすぐに家 B に向かえばよい。



16　一筆書き

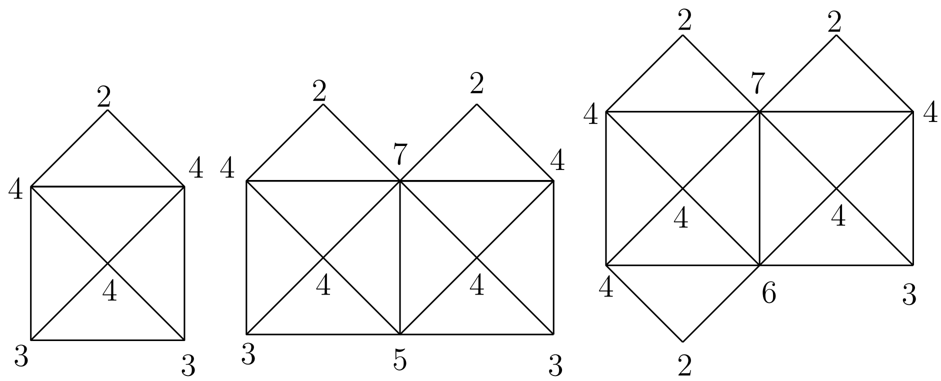
下の 3 つの図形の中には一筆書きできないものがある。それはどれだろうか？



解答例：　一筆書きができるためには，途中で鉛筆が紙から離れてはならない。従って，途中のどの頂点であってもそこに入ってくる線があれば，そこから出ていく線がなければならない。例外は，スタートとゴールの点だけだ。

図のどの頂点に集まっている線の数をその頂点の**次数**と言うが，上のことから分かるのは，図のどの頂点の次数も，2 箇所の例外を除き偶数にならねばならないということだ。また，次数が奇数の 2 頂点があれば，そこが一筆書きのスタートとゴールにならねばならな

い。問題図の各頂点に下図のように次数をふっていくと，真ん中の図は奇数次の頂点を 4 つもつことが分かるので，一筆書きすることができない。両端の図は奇数頂点が 2 つなので，そのどちらかをスタートに選べば，特段の困難もなく一筆書きが完成するはずだ。



17　リボンを切る

144 cm の長さのリボンがある。手元にはさみはあるが，長さを計るための定規のようなものはない。27 cm 分のリボンを切り出すにはどうすればよいだろうか？

解答例：　リボンを半分の長さに折りたたむと，できた 2 枚重ねのリボンの長さは 72 cm だ。もう一度折りたたむと 4 枚重ねの 36 cm のリボンになる。さらに 2 回折りたたむと分厚い 9 cm のリボンになる。ここで，このリボンから 9 cm の長さ 3 つ分を広げることで，27 cm のリボンができる。

18　線香で時間を計る？

線香がたくさんある。線香は，どれも一定のペースで燃え進み，どの 1 本も端に火をつけてからちょうど 1 時間で燃え尽きる。この線香を何本か使って 45 分を測るにはどうすればよいだろうか？

解答例：　1 本の線香の両端ともう 1 本の線香の片端に同時に火をつける。最初の線香は 30 分後に燃え尽きるので，それと同時に 2 本目の線香の反対端にも火をつける。2 本目が燃え尽きるのはさらに 15 分後だから，最初から 45 分経ったことが分かる。

19　長針と短針の追いかけっこ

時計には分を示す長針と時を示す短針がある。0 時から 24 時までの間に長針は短針を何回追い越すだろうか？ただし，24 時には追いつくだけで追い越さないので，回数には数えない。

解答例：　長針は 1 時間に 1 周するので，24 時間では 24 周する。一方，短針は 24 時間では 2 周する。よって長針は，短針に $24 - 2 = 22$ 回追いついて，抜き去ることになるが，最後の 1 回は数えないので，21 回が答えだ。

20　砂時計で時間を計る？

いろいろな時間で落ちきる砂時計がたくある。砂時計は，どれも一定のペースで落ち，戻すにも同じ時間がかかる。

- 4 分と 7 分の砂時計で 9 分を測るにはどうすればよいだろうか？
- 6 分，10 分，15 分の砂時計で 7 分を測るにはどうすればよいだろうか?

解答例：　この種の問題は，計測に使う時計の単位を足し引きして，目標時間を作ることが基本になる。

最初の問題の場合，$7+7+7-4-4-4=9$，$4+4+4+4-7=9$ である。どちらの式を利用してもよいが，2 番目の式を利用するなら，最初 7 分と 4 分の砂時計を同時に落とし始め，4 分の時計は落ちきるたびにすぐ反転させる。7 分の時計が落ちきったところから計り始め，4 分の時計の 4 回目が落ちきるところまで計れば，ちょうど 9 分だ。

（もっと効率よく計る方法がないではない。最初は同じようにスタートするが，7 分計が落ちきったところでそれを反転させ，4 分計の 2 回目が落ちきったところで，その 7 分計をもう一度反転させる。この 7 分計はそれから 1 分後に落ちきるので，スタートから計れば 9 分だ）

2 番目の問題の場合，例えば $15+10-6-6-6=7$ を利用してみよう。最初に 15 分計と 6 分計を落とし始める。6 分計は落ちきるたびにすぐ反転させる。また，10 分計は 15 分計が落ちきると同時に落とし始める。6 分計の 3 回目が落ちきったところから，10 分計が落ちきるところまで計ると，ちょうど 7 分だ。（この場合も，もっと効率よく図る方法があるかもしれない）

21　壷と油

油がなみなみと入った 10 リットルの壷と 3 リットルと 5 リットルの空の壷がある。これらを使って，5 リットルの壷に 4 リットルの油を計りとるにはどのようにすればよいだろうか？油をこぼしてはいけない。

解答例：　前の問題と同種で，計測に使う壷の単位を足し引きして，目標を作ることが基本になる。しかし，油をこぼしてはいけないという条件があるので，だいぶ面倒になる。

$10-3-3=6$ であるから，油をこぼしてよければ，10 リットルの壷から 3 リットルの壷に 2 回くみ出し，残りの 4 リットルを 5 リットルの壷に入れればよい。こぼしてはいけないということなので，3 リットルの壷に汲みだした分を 5 リットルの壷に移し替え，再び 10 リットルの壷から 3 リットルを汲めば 10 リットルの壷に 4 リットル残るが，5 リットルの壷が空いていないので，問題の条件を簡単には満たせない。結局，次の手順に従うのが一番近道のようだ。表記 (a,b,c) は左から 10 リットル，5 リットル，3 リットルの壷に

入っている油の量とする。

$$(10, 0, 0) \to (5, 5, 0) \to (5, 2, 3) \to (8, 2, 0) \to (8, 0, 2) \to (3, 5, 2) \to (3, 4, 3)$$

22　電車のすれ違い（普通電車と急行）

A 駅と B 駅を結ぶ路線には普通電車と急行電車が走っている。あるとき A 駅から普通電車が，B 駅から急行電車が同時に出発した。そして，6 分後にすれ違い，10 分後に急行電車は A 駅に入った。普通電車が B 駅に入ったのは何分後だったか？電車の速度はそれぞれ一定だったとする。

解答例：　2 つの列車がすれ違った場所を C 地点とすると，普通列車は A 駅から C 地点まで 6 分かかり，急行列車は同じ距離を $10 - 6 = 4$ 分で進んだことになる。すなわち急行の速度は普通の 1.5 倍だ。よって急行が 10 分かかった距離を進むのに，普通列車は 15 分かかることになるから，普通列車が B 駅に入ったのは 15 分後である。

23　電車のすれ違い（普通電車と新幹線）

A 駅と B 駅を結ぶ路線には普通電車と新幹線が走っている。あるとき A 駅から普通電車が，B 駅から新幹線が同時に出発した。そして，ある地点ですれ違ってから，1 時間後に新幹線は A 駅に入った。一方，普通電車は，すれ違ってから 9 時間後に B 駅に入った。新幹線と普通電車の速度比を求めよ。電車の速度はそれぞれ一定だったとする。

解答例：　普通列車が新幹線より r 倍遅いとする。2 つの列車がすれ違った場所を C 地点とし，C 地点から A 駅までの距離を d km としよう。その距離を走るのに新幹線は 1 時間かかったので，新幹線の速度は時速 d km だが，それより r 倍遅い，つまり時速 d/r km の普通列車が，C 地点に来るまでに要した時間は r 時間だ。その間に新幹線は rd km 走るので，それが C 地点と B 駅の距離だ。そこを走るのに普通列車は $rd \div d/r = r^2 = 9$ 時間かかったわけだから，$r = 3$ である。すなわち普通列車は新幹線より 3 倍遅い。

24　チョコレートで勝負

チョコレートが 30 粒ある。あなたと友達は 2 人でそれを食べることになった。交代に 1 粒または 2 粒または 3 粒のチョコレートを一度に食べていくのだが，実は，最後の 1 粒は，神様のいたずらでとても苦いことが分かっている。それを食べないようにするには，あなたが先手だとしたら，最初に何粒食べるのがよいだろうか？

チョコレートの数が他の数だったらどうするのが良いだろうか？また，一度に食べてよいのが 1 粒から 4 粒までのどれかの場合はどうするのが良いだろうか？

解答例：　最初に 1 粒だけ食べるのが食べるのが良い。あとは相手が食べる量に合わせて，相手が 1 粒食べたらあなたは 3 粒，2 粒だったらあなたも 2 粒，3 粒だったらあなたは 1 粒という風に食べていけば良い。そうするとチョコレートは 29，25，21，…… と 4 粒ずつ

減って行き，最後の 1 粒になったときは相手の食べる番だから，あなたがそれを食べることにはならない。

チョコーレートが他の数だったとしても，自分が食べた後に 4 で割ったあまりが 1 になる数を残すようにすると自然に勝つことができる。

また，一度に食べてよいのが 1 粒から 4 粒の場合は，残すチョコレートを 5 で割ったあまりが 1 となる数とし，相手の食べた数に合わせて合計で 5 粒ずつのチョコレートを食べるようにしていれば勝つことができる。

25　川渡り

3 組の夫婦が川の左岸にいる。川岸には手漕ぎのボートが 1 艘ある。ボートはだれでも漕ぐことができるが，最大で 2 人しか乗れない。また，3 人の夫はやきもちやきで，自分のいないところで妻が他の男と一緒にいることを嫌うので，そいう状況が生じないないようにしたい。どうすれば 6 人全員が右岸に渡れるだろうか？

解答例：　夫婦を A-a，B-b，C-c で表すことにしよう。A，B，C が夫で，a，b，c が妻である。下記のような手順で渡り切ることができる。左の列が左岸にいる人，右の列が右岸にいる人で，下線と矢印で次にボートに乗る人とボートの進む方向を示す。

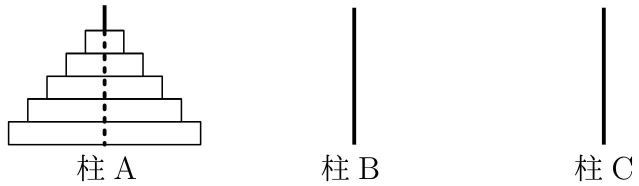
$$\begin{array}{ccc}
\underline{\text{Aa}}\text{BbCc} & \Longrightarrow & \\
\text{BbCc} & \Longleftarrow & \underline{\text{A}}\text{a} \\
\text{ABC}\underline{\text{bc}} & \Longrightarrow & \text{a} \\
\text{ABC} & \Longleftarrow & \text{ab}\underline{\text{c}} \\
\underline{\text{AB}}\text{Cc} & \Longrightarrow & \text{ab} \\
\text{Cc} & \Longleftarrow & \text{Aa}\underline{\text{Bb}} \\
\underline{\text{BC}}\text{bc} & \Longrightarrow & \text{Aa} \\
\text{bc} & \Longleftarrow & \text{A}\underline{\text{a}}\text{BC} \\
\underline{\text{ab}}\text{c} & \Longrightarrow & \text{ABC} \\
\text{c} & \Longleftarrow & \text{AaBb}\underline{\text{C}} \\
\underline{\text{Cc}} & \Longrightarrow & \text{AaBb}
\end{array}$$

26　ハノイの塔

柱が 3 本あり，そのうちの 1 本 A に穴の空いた大きさの違う円盤が下図のように刺さっている。次のルールで動かして，すべての円盤を右端の柱 C へ移動してほしい。

- 円盤はいつでも柱から柱へのみ移動できる。
- 小さな円盤の上に大きな円盤を載せることはできない。
- 一度に移動できる円盤は 1 枚だけである。

円盤の枚数が 5 枚のとき，最短手順で移動を完了するにはどうすればよいか？また，それには何手かかるだろうか？



解答例：　上から順に移動させていくしかない。1 枚だけなら明らかに 1 手で完了だ。
2 枚なら，まず一番上の 1 枚を中央の柱に移動する。次に 2 枚目を右端に移動してから，中央の円盤を右端に載せれば良いから，合計 3 手だ。。
3 枚ならどうするか。まず上の 2 枚を中央の柱に移動する。これには，上と同じで 3 手を要する。それから，3 枚目を右端の柱に移動し（1 手），中央の 2 枚を右端に移動する（3 手）。合計 $3 + 1 + 3 = 7$ 手である。
4 枚なら上の 3 枚を中央に移動し（7 手），それから 4 枚目を右に（1 手），さらに中央の 3 枚を右に移動して（7 手），合計 $7 + 1 + 7 = 15$ で完了だ。5 枚目以降も同様で，5 枚なら $15 + 1 + 15 = 31$ 手で完了，6 枚なら $31 + 1 + 31 = 63$ で完了だ。一般には n 枚の場合，$2^n - 1$ で移動は完了できるが， この最短手数を達成するには，かなり注意深く作業を進める必要がある。

27　ピンポン島での円卓会議

ピンポン島には 2 種類の部族が住んでいて，同じ言葉を話すが，1 つだけ習慣が違う。ピン族の人はハイというべきときに「ピン」と答え，イイエの場合に「ポン」と答える。ポン族の人はその反対だ。

いま 13 人が円いテーブルを囲んで座り会議をしていた。「あなたはピン族の人とポン族の人に挟まれて座っていますか」と聞いたところ，全員が「ポン」と答えた。ピン族とポン族の比率が分かるだろうか？

円卓会議の構成員が 12 名だったらどうだろうか？

解答例：　(a) まず，極端な場合を考えよう。13 人全員がピン族だったとしたらどうか。どの人もその両隣はどちらもピン族だから，質問への答えはイイエ，すなわち「ポン」になる。よって，このケースに当てはまる。では，ポン族（A と呼ぶ）の人がいたらどうなるか。答えが「ポン」だから，A の両隣の一方はポン族（B と呼ぶ）である。すると，B の隣もポン族とピン族だが，1 方は A だから，他方 C はピン族である。次に C の答えも「ポン」だから，両隣は同部族でなければならない。よって C のさらに隣 D は B と同じでポン族である。こうして考えていくと，円卓には

…… – ポン – ポン – ピン – ポン – ポン – ピン – ……

と 3 人毎にポン族 2 人とピン族 1 人で輪を作るように並んでいなければならない。ところが，13 は 3 で割り切れないので，これは不可能だ。というわけで，13 人で唯一可能なのは全員がピン族という場合だけだ。

一方，12 人では，全員ピン族という以外に，ポン族 8 人とピン族 4 人という場合があり得る。そのどちらであるかはもう少し情報がないと判定できない。

28　帽子の色

赤い帽子が 2 つ，白い帽子が 3 つある。A，B，C の 3 人を縦に並べ，それぞれに帽子を 1 つかぶせる。3 人は自分の帽子の色はわからないが，自分より前の人の帽子は見える。

試験官が一番後ろの C に自分の帽子の色が分かるかと尋ねたところ，C は「わからない」と答えた。次に，真ん中の B に同じ質問をすると，B も「わからない」と答えた。するとそれを聞いていた A が「それなら自分の帽子の色がわかった」と叫んだ。A は，どうして自分の帽子の色がわかったのだろうか？ また，それは何色だったのだろうか？

解答例：　赤い帽子が 2 つしかないことがポイントだが，ポイントはもう 1 つあり，「わからない」という答えも重要な情報を含んでいることに気づくことだ。

C の「わからない」という答えだが，もし C が赤い帽子を 2 つ見ていたとしたら，赤い帽子は 2 つしかないことから C には自分の帽子が白だと分かるはずだ。つまり C の「わからない」という答えは，「A か B かどちらかの帽子は白だ」と言ったに等しい。

次に B だが，C の言葉を聞いた後なら，A の帽子が赤だったすれば自分の帽子が白だと分からないはずはない。しかるに B が「わからない」と言ったということは，「A の帽子は白だ」といったに等しい。

こうして A には自分の帽子の色がわかるし，それは白である。

29　カードの反転

トランプのカード (ジョーカーを入れずに 52 枚) が裏向きに並べてある。子供が一人来て，すべてのカードを表にして去って行った。次の子供が来て，左から数えて偶数番目のカードだけを裏に戻して去って行った。さらに，3 人目の子供が来て，左から数えて 3 枚目毎にカードをひっくり返して去った。こうして，子供が次々にやってきて，n 人目の子供は左から数えて n の倍数番目のカードの表裏を反転させて去って行った。さて 52 人目の子供が去った後で，表になっているカードの枚数は何枚だろうか？

解答例：　左から n 番目のカードは n の約数の個数と同じ回数だけ反転する。従って，それが最後に表になるためには，n は奇数個の約数を持たねばならない。n が平方数以外であれば，約数は必ず対になるので，その個数は偶数個である。つまり，最後に表になっているカードは平方数番目のみであり，52 までには 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49 という 7 つの平方数があるので，表向きのカードは 7 枚である。

(もし最初に N 枚のカードがあり，N 人の子供が来た場合，最後に表になっているのは

$\left\lfloor \sqrt{N} \right\rfloor$ 枚である。)

30　奇妙な小切手帳

金満家の伯父が太郎と次郎の 2 人兄弟に奇妙な小切手帳をくれた。小切手帳は 50 枚綴りで，各小切手には既に額面が書いてある。2 人で交代に，この小切手帳から表裏どちらか外側の一枚を切りとり，現金化して使っていいと言う。

伯父は，太郎から先に使い始めるように指示したが，まだ各小切手の額面を調べないうちに，太郎は「やったね。俺のほうが少なくともお前以上には使える。50 枚綴りで良かったよ。51 枚ならそうはいかないこともあるからな」と次郎に言った。

いったいこの太郎の言葉の根拠はどこにあるのだろうか？

解答例：　小切手が全部で偶数枚であるというのがポイントである。小切手に順に番号を振り，i 番目の小切手の額面を A_i としよう。太郎の戦略としては，奇数番の合計 $S = A_1 + A_3 + \ldots + A_{49}$ と偶数番の合計 $T = A_2 + A_4 + \ldots + A_{50}$ を調べ，$S \geqq T$ なら常に奇数番の小切手を使うようにすればいい。太郎が使ったあと，外側はどちらも偶数番であるから，次郎は偶数番の小切手しか使えない。これを繰り返すと，結局，太郎が使う総額は S，次郎が使う総額は T ということになる。逆に $S < T$ なら，太郎は偶数番の小切手を使うようにすればいい。

小切手が奇数枚の時，この戦略はなりたたない。実際，たとえば高額面の小切手が 1 枚だけあり，あとは全部 1 円だったとすると，高額面の小切手が最初から端にない限り，太郎にはそれを手に入れることができない。

また，上の戦略は小切手が遇数枚の場合でも，必ずしも太郎に最大の利益を保証するものではない。たとえば 6 枚綴りの小切手帳で額面が 2-1-1-3-1-1 の場合，上の戦略では末尾の 1 を取ることになるが，先頭の 2 を取ったほうが太郎には得になる。

31　ギリギリの燃料

砂漠を周遊する道路がある。この道路を自動車で一周して調査したい。親切な志願者があって，車を貸してくれ，かつ道路上の任意の地点まで運んでくれるという。しかし，燃料については一切面倒をみてくれない。そこで，燃料を募集したところ，集まったのは丁度ギリギリの一周分で，しかも輸送コストの関係で，ポリ容器に入れ，道路上の 6 箇所に分割して置いてあるという。

燃料が置いてある場所とその量は正確にわかっているので，そのどこかに運んでもらい，燃料を拾い集めながら，一周することができればよい。ある人に相談したところ，燃料がどのように分割され，どこに置かれていようと必ず一周できるという。

それは本当だろうか？また，本当だとしても，出発点と回る方向をどうやって決めればいいだろうか？

解答例：　一周するに十分な量の燃料を積んで周遊路のどこかから仮に走り出したと考え

てみる。方向はどちらでもいい。燃料を拾うたびにそれを補給しながら旅を続けると，丁度一周して出発点に戻ってきたときには，燃料の量は最初に出発したときに同じになっているはずである。

この旅の間じゅう，燃料計の動きを監視していれば，その針が一番低くなった場所があり，そこで燃料が補給されたはずである。従って，最初にその場所に運んでもらい，同じ方向に回り始めれば，燃料が空の状態からスタートしても一周することができる。

32　巴戦は公平，それとも不公平？

大相撲の千秋楽では，複数の力士の勝ち星が同じだった場合，優勝決定戦を行う決まりだ。同じ勝ち星の力士が 3 人いた場合，「巴戦」を行う。その 3 人を A，B，C とすると，まず A と B で対戦し，その勝者が C と対戦する。その結果，2 連勝した力士がいれば，その力士が優勝だが，第 2 戦で C が勝った場合は，第 1 戦の敗者と C が対戦する。こうして，2 連勝するものが出てくるまでいつまでも対戦が繰り返され，最初に 2 連勝した力士の優勝である。もし，各力士の実力が全く互角で，各対戦の勝率が 1/2 だとしたら，この決定戦は公平だろうか？不公平な場合，各力士の優勝確率はそれぞれいくつだろうか？

解答例：　その方が後の推論や計算が簡単になるので，まず最初の対戦で A が B に勝ったと仮定しよう。その後に A，B，C が優勝する確率をそれぞれ a，b，c とする。A は，第 2 戦にも勝利すれば，それで優勝が決まりその確率は 1/2 である。一方，負ければ，優勝できなくなるわけではないが，その可能性は大きく後退し，現在の C と同じ立場になる。したがって A の優勝する確率 a は $a = 1/2 + c/2$ を満たす。B や C が優勝するには，A が第 2 戦で C に負けるしかなく，その場合，B，C はそれぞれ，現在の C，A の立場に上昇する。つまり，$b = c/2$，$c = a/2$ を満たす。これら 3 つの式を連立させて解くと $a = 4/7$，$b = 1/7$，$c = 2/7$ がえられる。

最初の対戦で B が A に勝ったと仮定すると，同様に A，B，C が優勝する確率は，それぞれ 1/7，4/7，2/7 である。

最初の対戦で A，B のどちらが勝つかはどちらも確率 1/2 だから，結局 A と B の優勝確率はどちらも $(1/7+4/7)/2 = 5/14$，C の優勝確率は $(2/7+2/7)/2 = 2/7$ で，$5/14 > 2/7$ だから，最初に取り組む A と B が C よりわずかに有利ということになる。

33　パーティーでの握手人数

あるパーティーに出席したのは，5 組の夫婦だけだった。パーティーでは，初対面の人どうしは握手をし，顔見知りとは握手しなかった。

あとで，出席者の一人相沢氏が他の出席者の一人一人にたずねてみると，ほかの 9 人がパーティーで握手をした人数は，それぞれ異なっていた。では，相沢氏が握手をした人数は何人だっただろうか?

解答例：　まず，握手した人数は多い人でも最大で 8 人ということになる。つまり，自分

とパートナー以外の全員と握手したわけだ。相沢氏がたずねたのは全部で 9 人である。すべて異なる人数と握手したということは，9 人が握手した人数は，0 人から 8 人までの人が一人ずついうことになる。

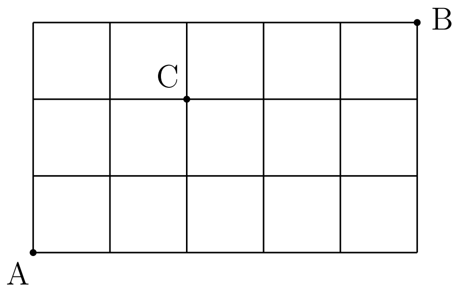
まず「0 人」と答えた人を Z,「8 人」と答えた人を A としよう。するとこの 2 人は必然的に夫婦である。なぜなら，A は自分のパートナー以外の全員と握手したので，A のパートナーでない人は少なくとも 1 人（A）とは握手していることがわかる。よって誰とも握手していない Z は，A のパートナー以外にあり得ない。

次に，「1 人」と答えた人を Y,「7 人」と答えた人を B とする。するとこの二人も必然的に夫婦だ。なぜなら，B は自分のパートナーと Z を除く全員と握手したことになるので，Y がパートナーでなければ Y とも握手したはずだ。ところが，Y は A 以外の誰とも握手していないので，B のパートナーでなければならない。

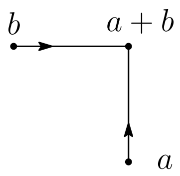
同様に「2 人」と答えた人と「6 人」と答えた人は夫婦であり,「3 人」と答えた人と「5 人」と答えた人も夫婦となる。残ったのは，4 人と握手した人だけだ。この人物のパートナーが握手した人も 4 人である。相沢氏がたずねたすべての人は異なる人数と握手していたので，相沢夫人が 4 人と握手した人物にほかならず，相沢氏が握手した人数も 4 人である。

34　最短経路の数

下の地図のような街路がある。A 地点から B 地点まで最短で行く経路の数はいくつだろうか？ もし C 地点が通行止めになっていたとしたら，そのような経路の数はいくつだろうか？

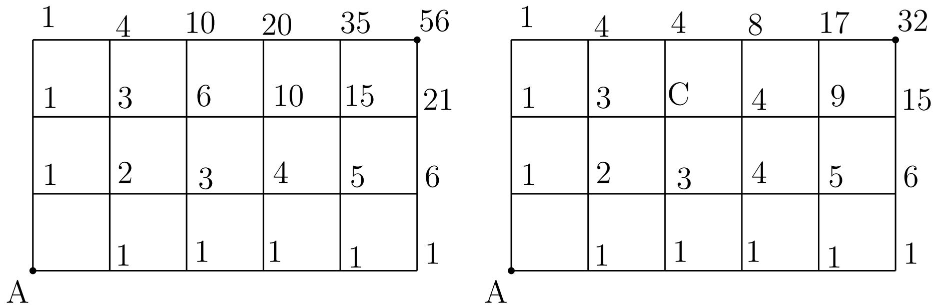


解答例：　最短距離をとる限り，各公差点へは南（下）から来るか西（左）から来るしかない。従って，南隣の交差点までの経路が a 通り，西隣の交差点までの経路が b 通りあるなら，当該交差点までの経路は $a+b$ 通りある。



街路図に各交差点までの経路の数を順に記していけば下図左のようになる。通れない地点（例えば C）があっても，それを考慮して同様に経路数を記していけば，下図右のように

なる。



よって，A 地点から B 地点までの最短経路の数は通行止めがない場合 56 通り，C 地点が通行止めの場合 32 通りである。

35　サイコロの目の刻印

サイコロ工場では，通常の 立方体のサイコロのほかに正 4 面体のサイコロを製造している。立方体のサイコロには各面に 1 から 6 の目を，正 4 面体のサイコロには 1 から 4 の目を刻印している。回転して同じになる場合を除いて，正 4 面体のサイコロの目の刻印の仕方には何通りあるだろうか？ 同じく立方体のサイコロの目の刻印の仕方には何通りあるだろうか？

解答例：　1 の面を下にして，2 面が手前を向くように正四面体を置くことにする。すると「後ろ」の面は 2 つあり，左・右の順で 2・3 または 3・2 となる。したがって正四面体は 2 種類だ。

立方体を 1 の面を下にして置くことにする。このとき，上の面には 2 から 5 までの 5 通りのどれかが来る。仮にそれが 2 であったとすると，上下はそのままにして回すと 3 の面を手前（南）に持ってくることができる。このとき，4・5・6 は東・北・西のどこかの面になり，それには 6 通りがある。上の面が 3・4・5・6 の場合も，同様に 6 通りあるから，全部では $6 \times 5 = 30$ 通りの刻印の仕方がある。

36　チェス盤上の駒

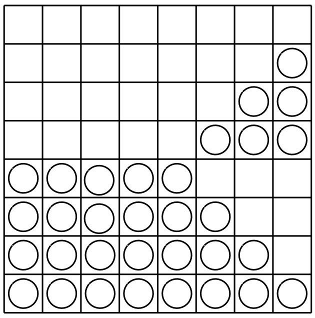
8×8 のチェス盤上の各列に 4 つずつ駒を置いて行って，どの行にも違う数の駒があるように配置せよ。ただし，各マス目には置くことのできる駒はせいぜい 1 つだけとする。

各列に 3 つずつ駒を置いて行っても同じことができるだろうか？

各列に 5 つずつならどうだろうか？

解答例：　下の図は，各列に 4 個ずつ駒を置いて，各行に入る駒は順に 0，1，2，3，5, 6,

7, 8 個という全部違う数にできることを示している。



どうしたらこの解答が見つかるか？各行に入る駒の個数は，0 個から 8 個まで全部で 9 通りの可能性がある。各行に違う数が入るのだから，それらの可能性のうち 8 つを選び，1 つは不採用としなければならない。どの可能性を不採用にするかはどうやって決めたらよいか。8 列あり，どの列にも同じ数の駒が入るから，駒の総数は 8 で割り切れなければならない。ここで $0+1+\cdots+8=36$ で，この中から 1 つの数を除いて和が 8 の倍数になるようにと考えると，除ける数は 4 だけだ。つまり，各行には 0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8 個の駒が入らなければならない。

全部で 32 個の駒があるのだから，各列には 4 個の駒が入らなければならず，各列に 3 つまたは 5 つの駒をおいて同様なことをするのは不可能だ。

37　贋金判定（9 枚のコイン）

ここにコインが 9 枚ある。1 枚は偽物で，重さが本物よりほんの少し軽いが，見かけは本物と変わらない。天秤を 2 回だけ使って偽物を見つけるにはどうしたらよいだろうか？

解答例：　最初にもっと簡単な問題を解いてみよう。3 枚の硬貨しかない場合を考える。天秤で 1 回はかるだけで偽物を見つけるには，2 枚の硬貨を天秤で比べればよい。もし釣り合ったら，はからなかった硬貨が偽物だ。釣り合わなかったら，軽い方が偽物だ。

さて 9 枚の硬貨の問題に戻ろう。9 枚の硬貨を 3 枚ずつの山に分け，1 つめと 2 つめの山を比べよう。もし釣り合ったら，偽物は 3 つめの山にある。釣り合わなかったら，軽い方の山に偽物がある。

これで問題は，硬貨 3 枚と計量 1 回という上で考えた簡単な問題に帰着した。この答えが理解できていれば，3 回の計量で 27 枚の硬貨の中から 1 枚の偽物を見つけられるはずだが，どうだろうか？

38　贋金判定（たくさんの袋）

警察が金貨偽造団のアジトを手入れし，金貨がたくさん入った袋を 5 袋押収した。袋の中身は，全部が贋物であるか，全部が本物であるか，どちらかだとわかっている。本物の金貨 1 枚は 10 グラムであり，贋物はそれより 0.1 グラム少ない 9.9 グラムである。

0.1 グラム単位で 1 キログラムまで計れる精密な量りで，ただ 1 回計量することにより，各袋の金貨の真贋をすべて決定せよ。

解答例：　2 進法を利用すると良い。

便宜上，袋に 0 から 4 までの番号を振る。0，1，2，3，4 番の袋からそれぞれ金貨を 1，2，4．8，16 枚を取り出し，それらをまとめて計量する。全部本物なら 310 グラムになるはずだが，贋金が混じっているとそれより軽くなるので，その程度でどの袋が偽であるかがわかる。

たとえば 308.9 グラムだったとすると，本来より 1.1 グラム軽いので贋金が 11 枚混じっている。11 は 2 進法で 01011 だから，0 番，1 番，3 番は贋物の袋で，2 番，5 番は本物の袋だと判定できる。