線形代数 I 理解度自己診断用（H280401 試作品 by J. M.）

問題１　次の線形結合を計算せよ。

$$4\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

問題２　次のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の内積を計算せよ。

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

問題３　数ベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ が線形独立ならば，$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z},\ \boldsymbol{y}+\boldsymbol{z},\ \boldsymbol{z}$ も線形独立であることを示せ。

問題４　次の行列の計算をせよ。

$$3\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - 6\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

問題５　２次行列に対して，ハミルトン・ケーリーの定理を直接計算により証明せよ。

問題６　行列 $A,\ B$ で $A \neq O,\ B \neq O,\ AB = O$ となる例を１組のべよ。

問題７　次の正方行列を対称行列と交代行列の和に表せ。

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 2 & 7 & 4 \\ 3 & 8 & -5 \end{pmatrix}$$

問題８　$A,\ B$ が n 次正則行列ならば，積 AB も n 次正則行列であることを示せ。

問題９　次の行列を行変形により簡約階段行列に変形せよ。

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 & -7 \\ 2 & 7 & -5 \\ 3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

問題１０　次の行列を行変形により簡約階段行列に変形し，正則性を判定せよ。もし正則なら逆行列も求めよ。

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

問題１１　次の連立１次方程式の解を，拡大係数行列を簡約階段行列に行変形することにより求めよ。

$$\begin{cases} 3x + 2y + 7z = 12 \\ 2x + 4y + 10z = 16 \\ x + 3y + 7z = 11 \end{cases}$$

問題１２　$\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3 \rangle = K^3$ ならば，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は K^3 の基底となることを示せ。

問題１３　次の行列を行変形により，簡約階段行列に変形し，階数を求めよ。

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

問題１４　行列の階数は線形独立な列ベクトルの最大個数に等しいことを簡潔に説明せよ。

問題１５　次の連立１次方程式をクラメルの公式を用いて解け。

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix}$$

問題１６　置換 $\sigma = (1,2,3)(2,4,6,5)(1,3,6)(2,5)$ の符号を求めよ。

問題１７　次の行列式の値を求めよ。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

問題１８　正方行列 A に対して，$\det({}^tA) = \det(A)$ となることを示せ。

問題１９　２次行列の行列式に関して，次の式を直接計算により示せ。

$$\det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \right) = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

問題２０　次の行列の余因子行列を求めよ。

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ -2 & 5 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

問題２１　３次正則行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

の逆行列を行列式と余因子行列を用いて具体的に求めよ。

問題２２　４次行列 $A = (a_{ij})$ の成分が $a_{ij} = x_i^{j-1}$ で与えられているとき，$\det(A)$ を求めよ。

問題２３　次の行列 A の固有多項式を求めよ。

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

問題２４　３次行列

$$A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$$

に対して，ハミルトン・ケーリーの定理が成り立つことを，直接計算により確かめよ。

問題２５　次の行列 A の固有多項式 $\Phi_A(x)$ と固有値を求め，それぞれの固有値に対して固有ベクトルを１つずつ答えよ。

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

問題２６　連立１次方程式の解放に関するクラメルの公式について簡潔に説明せよ。

問題２７　次のベクトルの外積を計算せよ。

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

問題２８　任意の線形写像 $f: K^n \longrightarrow K^m$ は，$m \times n$ 行列を左から掛けるという操作で一意的に実現されることを簡潔に説明せよ。

問題２９　線形写像 $f: K^n \longrightarrow K^m$ の像 $\mathrm{Im} f$ と核 $\mathrm{Ker} f$ は部分空間であることを簡潔に説明せよ。

問題３０　線形写像 $f: K^n \longrightarrow K^m$ に対して，$\mathrm{Im} f = \langle f(\boldsymbol{e}_1), \ldots, f(\boldsymbol{e}_n) \rangle$ であることを簡潔に説明せよ。