リー環とルート系の研究

滝澤, 中峯, 伊藤

1996 年 12 月 13 日

1　リー環の説明

$\ll$ 簡単な説明 $\gg$
$M_n(\mathbf{C}) = n$ 次複素正方行列全体：n^2次元ベクトル空間
$X, Y \in M_n(\mathbf{C})$ に対して括弧積を

$$[X, Y] := XY - YX$$

で定義する。

定義　(リー環)
　$\underline{g}$ はリー環 $\Longleftrightarrow$ $\underline{g} \subset M_n(\mathbf{C})$：部分空間であって、$[X, Y] \in \underline{g} \quad (\forall X, Y \in \underline{g})$ が成り立つ。

$\ll$一般の定義 $\gg$
集合 $\underline{g}$ に三つの演算（和、スカラー倍、括弧積）が定義されていて、次の条件（i),(ii) が成立するとき、$\underline{g}$ を $\mathbf{C}$ 上のリー環という。
(i) $\underline{g}$ は $\mathbf{C}$ 上の（有限次元）ベクトル空間になる。
(ii) 括弧積は両 (双) 線形で、任意の $x, y, z \in \underline{g}$ に対して
　i) $[x, x] = 0$
　ii)$[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$
　をみたす。

2　リー環の例

(1)$gl(n, \mathbf{C}) = M_n(\mathbf{C})$：一般線形リー環

(2)$sl(n, \mathbf{C}) = \{X \in M_n(\mathbf{C}) | trX = 0\}$：特殊線形リー環
　$tr(XY) = tr(YX)$ より $tr(XY - YX) = 0$
　故に　$[X, Y] \in sl(n, \mathbf{C}) \quad (\forall X, Y \in sl(n, \mathbf{C}))$

3　イデアル

$\underline{g} =$ リー環

定義　(イデアル)
　$\underline{a}$ はイデアル $\Longleftrightarrow$ $\underline{a} \subset \underline{g}$：部分空間，$[\underline{g}, \underline{a}] \subset \underline{a}$

例　$sl(n,\mathbf{C})$ は $gl(n,\mathbf{C})$ のイデアル。
$[X,Y]\in sl(n,\mathbf{C}) \quad (\forall X,Y\in \underline{g})$ より $[gl(n,\mathbf{C}),sl(n,\mathbf{C})]\subset sl(n,\mathbf{C})$

4　単純リー環

定義　(単純リー環)
$\underline{g}$ が単純リー環 $\Longleftrightarrow$ $\underline{g}$ のイデアルは $\underline{g}$ と $\{0\}$ のみ、かつ $[\underline{g},\underline{g}]=\underline{g}\neq\{0\}$

例 (1) $gl(n,\mathbf{C})$ は単純リー環ではない。真のイデアルとして

$$\{\lambda I_n|\lambda\in\mathbf{C}\},\quad sl(n,\mathbf{C})$$

をもつ.
(2) $sl(n,\mathbf{C})$ は単純リー環。

以下、$\underline{g}$は単純リー環とする。

5　カルタン部分環

$X\in\underline{g}$ に対し

$$\begin{array}{rccc} ad(X): & \underline{g} & \longrightarrow & \underline{g} \\ & Y & \longmapsto & [X,Y] \end{array}$$

と定めると,

$$ad(X)\in End(\underline{g})$$

定義　(s-元)
$X: s$-元 (semi-simple element) $\Longleftrightarrow ad(X)$: 対角化可能

定義　(カルタン部分環)
$\underline{h}:\underline{g}$ のカルタン部分環
$\Longleftrightarrow$ **i)** $\underline{h}\subset\underline{g}$: 部分空間

ii) $[\underline{h},\underline{h}]\subset\underline{h}$

iii) $\forall H\in\underline{h}$ は s-元

iv) i)〜iii) をみたすものの中で $\underline{h}$ は極大

6　ルート系

$\underline{g}=\underline{h}\oplus\sum_{\alpha\in\Phi}\underline{g}_\alpha$:ルート分解
$\alpha\in\underline{h}^*=Hom(\underline{h},\mathbf{C})$
$\underline{g}_\alpha=\{X\in\underline{g}|[H,X]=\alpha(H)X,\forall H\in\underline{h}\}$: 共通の固有空間
$\underline{h}=\underline{g}_0$

$\Phi = \{\alpha \in \underline{h}^* | \alpha \neq 0, \underline{g}_\alpha \neq 0\}$: ルート系
Φ の元をルートと呼ぶ。
$V = \sum_{\alpha \in \Phi} \mathbf{R}\alpha \subset \underline{h}^*$: Euclid 空間とみなせる (キリング形式を用いる)
$\sigma_\alpha : V \longrightarrow V$ 　鏡映

$$\sigma_\alpha(v) = v - \frac{2\langle \alpha, v\rangle}{\langle \alpha, \alpha\rangle}\alpha$$

$\Phi : \sigma_\alpha-$ 不変 $(\forall \alpha \in \Phi)$
ゆえに、ルート系は、Euclid 空間内の有限集合であって、たくさんの対称性を持ったものである。

定義 (ルート系の底)
$\Delta = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_l\} \subset \Phi$: ルート系の底
$\Longleftrightarrow$ i) $l = \dim \underline{h}$
ii) $\Phi \subset (\sum_{i=1}^{l} \mathbf{Z}_{\geq 0}\alpha_i) \cup (\sum_{i=1}^{l} \mathbf{Z}_{\leq 0}\alpha_i)$: Δの同符号一次結合

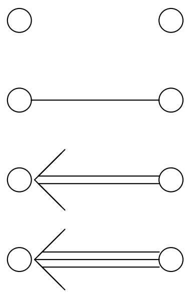
ルート系の底は常に存在する。

$$\Phi^+ = \Phi \cap (\textstyle\sum_{i=1}^{l} \mathbf{Z}_{\geq 0}\alpha_i) : \text{正のルート}$$
$$\Phi^- = \Phi \cap (\textstyle\sum_{i=1}^{l} \mathbf{Z}_{\leq 0}\alpha_i) : \text{負のルート}$$

7 Dynkin 図形

Γ : Dynkin 図形
l個の頂点 : $\overset{\alpha_i}{\bigcirc}$ $(i = 1, \cdots, l)$
辺は以下の 4 通りのみとなることがわかる：

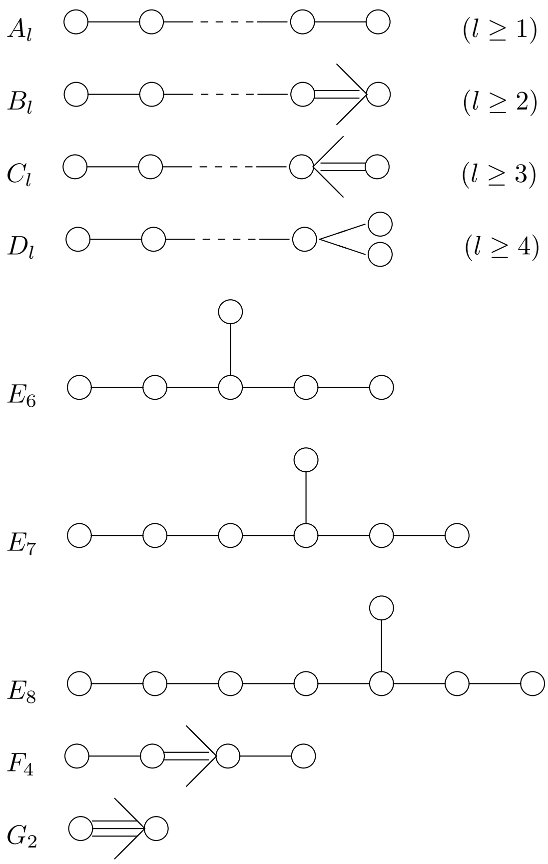
α_i 　 α_j 　 α_i, α_j のなす角



90 °
120 ° 　 $||\alpha_i|| = ||\alpha_j||$
135 ° 　 $||\alpha_i|| < ||\alpha_j||$
150 ° 　 $||\alpha_i|| < ||\alpha_j||$

8　単純リー環の分類

定理　{ 単純リー環 } ／∼ $\overset{1\text{対}1}{\longleftrightarrow}$ 下の Dynkin 図形



$sl(l+1, \mathbf{C})$ は A_l型

$o(2l+1, \mathbf{C}) = \{X \in M_{2l+1}(\mathbf{C}) | {}^tX + X = 0\}$ は B_l型

$sp(2l, \mathbf{C}) = \{X \in M_{2l}(\mathbf{C}) | {}^tXJ + JX = 0\}$ は C_l型

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1_l \\ -1_l & 0 \end{pmatrix}$$

$o(2l, \mathbf{C}) = \{X \in M_{2l}(\mathbf{C}) | {}^tX + X = 0\}$ は D_l型

これらは古典型と呼ばれる。対して E_6, E_7, E_8, F_4, G_2は、例外型と呼ばれる。

例

$E_{ij} \in M_{l+1}(\mathbf{C})$：行列単位
$\underline{g} = sl(l+1, \mathbf{C})$
$H_i = E_{ii} - E_{i+1,i+1} \quad (1 \leq i \leq l)$ とすると、

$$\underline{h} = \mathbf{C}H_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{C}H_l$$

となる。ここで　$\varepsilon_i \in \underline{h}^*$　を

$$\varepsilon_i(H_k) = \delta_{ik} - \delta_{i,k+1} \quad (1 \leq i \leq l+1)$$

によって定めると、

$$[H_k, E_{ij}] = (\varepsilon_i - \varepsilon_j)(H_k)E_{ij} \quad (1 \leq i \neq j \leq l+1)$$

従って

$$\Phi = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j | 1 \leq i \neq j \leq l+1\} \subset \underline{h}^*$$
$$\underline{g}_\alpha = \mathbf{C}E_{ij} \quad \text{if} \quad \alpha = \varepsilon_i - \varepsilon_j$$

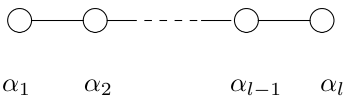
となり　sl(l+1,**C**)　のルート分解は

$$sl(l+1, \mathbf{C}) = \underline{h} \oplus \sum_{\alpha \in \Phi} \underline{g}_\alpha$$

このとき　$\alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$　とおくと $sl(l+1, \mathbf{C})$ のルート系の底は

$$\Delta = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_l\}$$

で、Dynkin 図形は



(A_l型)

になる。

9　シュバレー底

$\underline{g}$ の元の組 $\{H_\alpha \in \underline{h}, \quad E_\alpha \in \underline{g}_\alpha | \ \alpha \in \Phi\}$ で次の (1), (2), (3) をみたすものが存在する。

(1) $[H_\alpha, H_\beta] = 0$
(2) $[H_\alpha, E_\beta] = \frac{2\langle\alpha,\beta\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle} E_\beta$
(3) $[E_\alpha, E_\beta] = \begin{cases} H_\alpha & (\alpha + \beta = 0) \\ N_{\alpha\beta}E_{\alpha+\beta} & (\alpha + \beta \in \Phi) \\ 0 & (\alpha + \beta \notin \Phi, \alpha + \beta \neq 0) \end{cases}$

ただし、$N_{\alpha\beta}$は $q = max\{\ i \mid \beta - i\alpha \in \Phi\}$ とおくとき $N_{\alpha\beta} = \pm(q+1)$ となる整数である。このとき、

$$\{H_\alpha \ (\alpha \in \Delta), \quad E_\beta \ (\beta \in \Phi)\}$$

を　$\underline{g}$ のシュバレー底という。

例

$\underline{g} = sl(l+1, \mathbf{C})$　の場合、

$$\{E_{ii} - E_{i+1,i+1}(1 \leq i \leq l), \quad E_{ij}(1 \leq i \neq j \leq l+1)\}$$

がそのひとつのシュバレー底になる。

参考文献

佐武 一郎,『リー環の話』(日本評論社)