

前回の復習

前回は $\sum_{n=-N}^N \widehat{f}(n)e_n$ は距離 $\|\cdot\|_2$ に関する Cauchy 列であるという観察から出発して、それが何かに収束するかを考える準備を始めました。

そしてその最初の一步として、 $\mathcal{L}^p(\mu)$ を「ほとんど至るところ等しい」という同値関係で割った商空間 $L^p(\mu)$ に

$$\|f\|_p = \left(\int |f(x)|^p \mu(dx) \right)^{1/p} \quad (\text{ただし } p = \infty \text{ は別扱い})$$

から定まる距離が入ることを示しました。

しかしすべての距離空間で Cauchy 列が極限を持つわけではなく、完備性が必要です。今回の主定理がそれを保証するものです。

定理

$(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ は完備な距離空間である。即ち $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^p(\mu)$ が $\|\cdot\|_p$ について Cauchy 列であるならば、 $f \in L^p(\mu)$ であって $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) となるものが存在する。

完備性の帰結

証明の前にこの定理によって、Fourier 級数の部分和 $\sum_{n=-N}^N \hat{f}(n)e_n$ は距離 $\|\cdot\|_2$ に関して収束することが分かることに注意しましょう。実際これは $\|\cdot\|_2$ について Cauchy 列だったので、完備性からある $g \in L^2(\mathbb{R})$ が存在して

$$\left\| \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n)e_n - g \right\|_2 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

となります。

ここでもし $g = f$ と言えれば

「 $\mathcal{L}^2$ 関数の Fourier 級数は元の関数に L^2 収束する」

というきれいな定理ができて完全解決なのですが、それにはもう少し準備が必要で次回に扱います。

現時点ではとりあえず全ての $n \in \mathbb{Z}$ に対して $\hat{g}(n) = \hat{f}(n)$ であることは（頑張れば）分かります。

$\ell^p(\mathbb{N})$ の完備性の証明

定理の特別な場合として $X = \mathbb{N}$ で μ が計数測度の場合をまず証明しましょう。これは数列空間

$$\ell^p(\mathbb{N}) = \left\{ a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} : \|a\|_p = \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^p \right)^{1/p} < \infty \right\}$$

を考えていることになります。完備性を証明するために $a^{(m)} = (a_n^{(m)})_{n \in \mathbb{N}}$ という数列の列を考えて、これが Cauchy 列であるとします。

実数の完備性と同様に、完備性の証明でいつも大変なのは「極限を作らないといけない」ところです。数列空間の場合は比較的簡単で、全ての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$|a_n^{(k)} - a_n^{(l)}| \leq \|a^{(k)} - a^{(l)}\|_p$$

であって、右辺は $k, l \rightarrow \infty$ で 0 に収束するので $(a_n^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ は $\mathbb{C}$ の Cauchy 列になっています。ここで $\mathbb{C}$ は完備なので、各 $n \in \mathbb{N}$ に対しては $a_n^{(\infty)} = \lim_{m \rightarrow \infty} a_n^{(m)}$ が存在することが分かります。

$\ell^p(\mathbb{N})$ の完備性の証明

こうして作った $a^{(\infty)}$ は $a^{(m)}$ の各点収束極限ですが、距離 $\|\cdot\|_p$ での極限でもあることを示しましょう。これは Fatou の補題を使って

$$\begin{aligned}\|a^{(l)} - a^{(\infty)}\|_p &= \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \lim_{m \rightarrow \infty} |a_n^{(l)} - a_n^{(m)}|^p \right)^{1/p} \\ &\leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n^{(l)} - a_n^{(m)}|^p \right)^{1/p}\end{aligned}$$

と評価し、最後の $(\dots)^{1/p} = \|a^{(l)} - a^{(m)}\|_p$ は l, m を大きくすればいくらでも小さくできるので $\lim_{l \rightarrow \infty} \|a^{(l)} - a^{(\infty)}\|_p = 0$ が分かります。

あとは $a^{(\infty)} \in \ell^p(\mathbb{N})$ を確かめる必要がありますが、それは

$$\|a^{(\infty)}\|_p \leq \|a^{(\infty)} - a^{(l)}\|_p + \|a^{(l)}\|_p$$

に注意すれば、十分大きな l に対しては右辺の二項はどちらも有限なので証明が終わります。 □

$L^p(\mu)$ の完備性 — $p \in [1, \infty)$ —

次に一般の $L^p(\mu)$ の完備性を証明します. このとき $f \in L^p(\mu)$ の各点での値には意味がなく, 従って先ほどのように各点収束から出発できないことが問題です. これを解決するために次の命題が必要になります.

命題

$(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^p(\mu)$ が $\|\cdot\|_p$ に関する Cauchy 列ならば, 概収束する部分列を持つ.

証明はなかなかトリッキーです. まず仮定から $\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p \leq 2^{-k}$ となる部分列が取れます. このとき任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して

$$\left\| \sum_{k=1}^m |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \right\|_p \leq \sum_{k=1}^m \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p \leq 1$$

となるので単調収束定理を使って次が分かります:

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \right\|_p \leq 1.$$

$L^p(\mu)$ の完備性 — $p \in [1, \infty)$ —

ここで

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \right\|_p^p = \int \left(\sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| \right)^p \mu(dx)$$

だったので右辺も有限で、そのことからとくに $\sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|$ が μ -a.e. x で有限であることが分かります。

そのような x に対しては、絶対値を外した $\sum_{k=1}^{\infty} (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x))$ も収束するので、

$$f_{n_m}(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{m-1} (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x))$$

は $m \rightarrow \infty$ で収束します。

□

この証明では f_n をあたかも関数であるかのように扱いましたが、これは厳密に言えば同値類の代表元をとって議論したことになります。

$L^p(\mu)$ の完備性 — $p \in [1, \infty)$ —

いま示した命題によって $f_\infty = \lim_{m \rightarrow \infty} f_{n_m}$ が概収束極限として存在することが分かりました。極限が作れてしまえば、そこで使った部分列に対しては $\lim_{m \rightarrow \infty} \|f_{n_m} - f_\infty\|_p = 0$ であることが $\ell^p(\mathbb{N})$ の場合と全く同じ議論で証明されます。

さらにこの部分列から外れた n に対しても、

$$\|f_n - f_\infty\|_p \leq \|f_n - f_{n_m}\|_p + \|f_{n_m} - f_\infty\|_p$$

と評価して、右辺第一項は $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ が Cauchy 列であることから m, n を大きくすればいくらでも小さくでき、第二項も $m \rightarrow \infty$ で 0 に収束するので、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f_\infty\|_p = 0$ が証明できました。□

関数列 f_n が f に $\|\cdot\|_p$ の意味で収束するときに、とくにこの距離で Cauchy 列でもあるので、命題から概収束部分列を見つけることができます。これはときどき役に立ちます。ただこの結果に限れば「 L^p 収束 $\Rightarrow$ 測度収束 $\Rightarrow$ 概収束部分列が存在」という流れで証明する方が普通です。

$(C_{\text{per}}[-\pi, \pi], \|\cdot\|_{\infty})$ の完備性

残された $L^{\infty}(\mu)$ の完備性は $p < \infty$ のときより簡単なのですが、esssup の扱いが形式的に面倒なので自習に任せます。ここでは代わりにより馴染みのある次の空間について証明をしましょう。

定理

$(C_{\text{per}}[-\pi, \pi], \|\cdot\|_{\infty})$ は完備な距離空間である。

$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を $(C_{\text{per}}[-\pi, \pi], \|\cdot\|_{\infty})$ の Cauchy 列とします。まず $C_{\text{per}}[-\pi, \pi]$ は関数の空間であって、ここでは最大値の存在定理から

$$(1) \qquad \|f\|_{\infty} = \max_{x \in [-\pi, \pi]} |f(x)|$$

だったことを思い出しましょう。すると各点での値 $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ も $\mathbb{C}$ の Cauchy 列になっているので、数列空間のときと同様に x 毎に極限 $f_{\infty}(x)$ が作れます。

$(C_{\text{per}}[-\pi, \pi], \|\cdot\|_{\infty})$ の完備性

次に $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f_{\infty}\|_{\infty} = 0$ であることを示しましょう. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ は $\|\cdot\|_{\infty}$ の Cauchy 列なので任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\forall m, n \geq N, \|f_m - f_n\|_{\infty} = \max_{x \in [-\pi, \pi]} |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

となるような $N \in \mathbb{N}$ がとれます. すべての $m, n \geq N$ と $x \in [-\pi, \pi]$ に対して $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ なのですから, $m \rightarrow \infty$ の極限である $f_{\infty}(x)$ に対しても, $|f_{\infty}(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$ は成立します (等号が入ることには注意). これがすべての $x \in [-\pi, \pi]$ で成り立つので, $\|f_{\infty} - f_n\|_{\infty} \leq \varepsilon$ となって, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f_{\infty}\|_{\infty} = 0$ です.

最後に $\|\cdot\|_{\infty}$ での収束は一様収束で, 連続関数の一様収束極限はまた連続だったことを思い出せば $f_{\infty} \in C_{\text{per}}[-\pi, \pi]$ がわかります. □

完備性が役に立つ典型的な状況は, 方程式や最小化問題の解の存在を示すときです. 例えば常微分方程式の解の存在証明では上の事実を使ったと思います.

最小化問題の例

新しい例として、実数値関数の集合

$$A = \left\{ f: - \int_{-1}^0 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx = 1 \right\}$$

の上で $\int_{-1}^1 f(x)^2 dx = \|f\|_2^2$ を最小化する問題を考えてみます.

この問題は考える関数についておおらかに考えると、 $f = 1_{[0,1]} - 1_{[-1,0]}$ が唯一の解であることが分かるのですが、第 10 回に具体的に解を求めなくても A を $L^2(-1,1)$ の部分集合とみなした場合には解の存在は分かることを証明します.

一方で A を $C[-1,1]$ の部分集合とみなした場合には、解は存在しないということになります. これは最小化したい $\|\cdot\|_2^2$ が $C[-1,1]$ と相性が悪い (完備にならない) ということが関係しています. **ただ実はもう一つ微妙な問題も絡んでいます. 実際 A を $C[-1,1]$ の部分集合とみなして $\|\cdot\|_\infty$ を最小化する問題を考えても、やはり解は存在しません.**