無限次元線型空間

今回から 4 回は Fourier 級数や L^p 空間で見たことの抽象化を学びます．まず線型空間の定義を復習しておきましょう．

定義

V が $\mathbb{C}$ 上の線型空間であるとは[a]，加法 $u+v$ $(u, v \in V)$ とスカラー倍 αv $(\alpha \in \mathbb{C}, v \in V)$ が定義されていて，次の二つの条件を満たすことをいう：

1. $0 \in V$ という元があって，全ての $v \in V$ に対し $0 + v = v$;
2. 全ての $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ と $u, v \in V$ に対し，$\alpha u + \beta v \in V$.

[a] この講義では係数体は常に $\mathbb{C}$ か $\mathbb{R}$ とします．

予備資料で説明した通り，全ての線型空間には（代数的な）基底が存在します．そこで基底の集合の濃度を線型空間の次元といいます．

$\mathbb{C}^d$ の次元は $\mathbb{C}$ 上の線型空間としては d，$\mathbb{R}$ 上の線型空間としては $2d$ です．一方で例えば複素係数多項式の全体は無限次元の線型空間です．

$L^2(-\pi,\pi)$ は無限次元

この講義ですでに出てきた例で言えば $L^2(-\pi,\pi)$ は無限次元の線型空間です．これを確かめてみましょう．

もし $L^2(-\pi,\pi)$ の次元が $m<\infty$ なら，$m+1$ 個以上のベクトルは必ず一次従属になることを線型代数で学んだと思います．とくに $\{e_n\}_{n=1}^{m+1}$ を考えると，

$$e_{m+1}=\sum_{n=1}^{m}\alpha_n e_n$$

と表せるはずです．ところがこの両辺と e_{m+1} の内積をとると，左辺は $\langle e_{m+1},e_{m+1}\rangle=1$ となるのに対し，右辺はすべての項が 0 になってしまうので不合理です．

この証明は明らかに一般の内積空間でも通用し，無限の正規直交系 $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を含む内積空間は無限次元であることが分かります．

ノルム

第 7 回までに見てきた例では，いつもベクトル（＝線型空間の要素）の大きさを測る方法が与えられていました．思い出しておくと

$$C_{\mathrm{per}}[-\pi,\pi] \text{ では } \|\cdot\|_\infty,\ L^2(-\pi,\pi) \text{ では } \|\cdot\|_2,\ L^p(\mu) \text{ では } \|\cdot\|_p.$$

もちろん $\mathbb{C}^d$ 上の $\|x\| = (\sum_{j=1}^d |x_j|^2)^{1/2}$ も例です[1]．これらの満たす性質を公理化して，ノルムといいます．

定義

線型空間 V 上の関数 $\|\cdot\|\colon V \to [0,\infty)$ がノルムであるとは，以下の三つの条件を満たすことをいう：

1. $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$;
2. 全ての $u, v \in V$ に対して，$\|u+v\| \le \|u\| + \|v\|$;
3. 全ての $\alpha \in \mathbb{C}$, $v \in V$ に対して，$\|\alpha v\| = |\alpha|\|v\|$.

[1] これは $\mathbb{N}$ 上の測度 μ を $\mu(A) = \#(\{1,2,\dots,d\} \cap A)$ として定めたときの $L^2(\mu)$ と見なすこともできます．

ノルム空間，距離，同値性

ノルムの備わった線型空間 $(V, \|\cdot\|)$ をノルム空間といいます．この空間には $d(u,v) = \|u - v\|$ によって距離が定まり，それによって位相も定まります．この距離は V の線型空間としての構造とよく合ったものになっていて，V での加法とスカラー倍という基本的な操作は連続になります．

さて，例えば $C_{\mathrm{per}}[-\pi,\pi]$ では $\|\cdot\|_\infty$ と $\|\cdot\|_2$ という二つのノルムを考えることができました．この場合は前者が完備という意味で良いということになっていましたが，「どちらでも同じ」という場合もあり，それを以下のように定式化します．

定義

線型空間 V 上の二つのノルム $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ について [a],

$$\exists c, C > 0 \text{ s.t. } \forall v \in V, \quad c\|v\|_1 \le \|v\|_2 \le C\|v\|_1$$

となるとき，$\|\cdot\|_1$ と $\|\cdot\|_2$ は同値なノルムであるという．

[a] 念のためですが，添字は二つを区別するためで，L^p ノルムではありません．

有限次元ノルム空間の性質

以下ではノルム空間が有限次元か無限次元かによって，どのような違いがあるかを少し見ていきます．この講義の主眼は無限次元空間ですが，有限次元と対比することでよくわかることもあると思います．ただ証明については，どの本を見ても似たような証明が書いてあることと，自分で時間をかけて考える方がずっとためになることから，すべては書きません．

最初の事実は，ノルムの同値性です．

定理

V が有限次元線型空間ならば，その上の全てのノルムは同値である．

これは有限次元のノルム空間が殺風景であるという意味では印象的な結果です．一方で無限次元空間には同値でないノルムがたくさんあります．具体的に与えられたノルムの同値性を考えることは，応用上も重要なのでいろいろ考えてください．

例えば $C_{\mathrm{per}}[-\pi,\pi]$ 上の $\|\cdot\|_\infty$ と $\|\cdot\|_2$ という二つのノルムは同値ではありません．

有限次元での有界閉集合のコンパクト性

次の事実は $\mathbb{R}^d$ における Heine–Borel の定理の一般化です．

定理

有限次元ノルム空間の有界閉集合はコンパクトである．

この定理の証明は内積空間の場合は簡単です．距離空間を考えているので点列コンパクトを示せばよく，つまり有界点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ から収束部分列が選べれば OK です．そこで正規直交基底 $\{e_j\}_{j=1}^d$ をとって各 x_n を

$$x_n = x_n^{(1)} e_1 + \cdots + x_n^{(d)} e_d$$

と展開します．このとき $\|x_n\|^2 = \sum_{j=1}^d |x_n^{(j)}|^2$ が分かるので，すべての係数は $\mathbb{C}$ の有界列です．従って $\mathbb{C}^d$ での Bolzano–Weierstrass の定理から各係数が収束する部分列が取れて，それに沿って x_n も収束します． □

一般のノルム空間の場合は，前のページの定理を使って上のように内積から定まるノルムに取り替えれば，上の証明に帰着します．

無限次元での閉単位球の非コンパクト性

有界閉集合のコンパクト性は馴染みのあるものだと思いますが，無限次元のノルム空間では成り立たなくなります．

定理

無限次元ノルム空間の閉単位球はコンパクトではない．

この定理の証明も具体例ではとても簡単なので，まずはそれを見ましょう．$\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset L^2(-\pi,\pi)$ は $\|e_n\|_2 = 1$ $(\forall n \in \mathbb{Z})$, $\langle e_m, e_n\rangle = 0$ $(m \neq n)$ を満たすのでした．すると

$$\|e_m - e_n\|_2 = \sqrt{\langle e_m - e_n, e_m - e_n\rangle} = \sqrt{\|e_m\|_2^2 + \|e_n\|_2^2} = \sqrt{2}$$

なので，$(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ は $L^2(-\pi,\pi)$ の閉単位球の中にある無限列で，全ての異なる項が互いに $\sqrt{2}$ だけ離れています．このような点列のどんな部分列も収束し得ないので，$L^2(-\pi,\pi)$ の閉単位球は点列コンパクトでないことが分かります． $\square$

無限次元での閉単位球の非コンパクト性

一般のノルム空間に対して定理を証明するときには，L^2 と違って内積は使えません．また無限次元では「すべてのノルムが同値」という定理は成立しないので，内積空間に帰着することもできません．このように内積空間では簡単で，一般のノルム空間では難しいが可能，ということはよくあり，そういう技術を学ぶことはそれなりに大切なことです．

この定理の場合には，前のページの証明を見直すと「$e_1, e_2, \ldots .e_n$ が生成する部分空間と e_{n+1} がある程度離れている」ことが鍵であることが分かります．距離空間で点と集合が離れているためには，集合の方が閉であればよかったので，結局次の補題を示せばよいことになります：

補題

ノルム空間の有限次元部分空間は閉集合である．

これは簡単そうに見えるので，一度は自分で証明に挑戦してみるべきでしょう．多くの人は，思ったより難しいことに気づくと思います．

Schauder 基底

最後に無限次元線型空間における新しい基底の概念について説明しておきます．無限次元線型空間 V の基底 E は無限集合なので，ベクトルを表現するときにも無限和を使いたくなります．

しかし $v = \sum_{e \in E} v_e e$ という表現には意味がありません．なぜなら，無限和とは有限和の極限であり，極限を定義するには位相が必要だからです．従って一般の無限次元線型空間で無限和を許した基底概念を考えるのは馬鹿げていて，あくまで位相線型空間でのみ意味がつくことに最初に注意しましょう．この講義で扱っているのはノルム空間なので，極限を考えられる程度に良い位相はいつでも入っています．そのときは以下のように定義するのは自然でしょう．

定義

無限次元ノルム空間 $(V, \|\cdot\|)$ の可算部分集合 $S = \{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が Schauder 基底であるとは，任意の $v \in V$ に対して複素数列 $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ がただ一つ存在して $\lim_{N \to \infty} \|v - \sum_{n=1}^{N} v_n s_n\| = 0$ となることをいう．

Schauder 基底

定義の最後の式は “$v = \sum_{n=1}^{\infty} v_n s_n$ in $\|\cdot\|$” と書くこともありますが，このとき “in $\|\cdot\|$” は絶対に忘れてはいけません．これを例で見ましょう．

$L^2(-\pi,\pi)$ の $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は Schauder 基底です．実際，第 6 回に示したようにすべての $f \in L^2(-\pi,\pi)$ に対して $\lim_{N\to\infty}\left\| f - \sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}(n) e_n \right\|_2 = 0$ であり，さらに「$\widehat{f} = \widehat{g} \Rightarrow f = g$」を思い出せば展開係数の一意性も分かります．同じ議論は $(C_{\mathrm{per}}[-\pi,\pi], \|\cdot\|_2)$ でもできるので，$\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ はこの空間でも Schauder 基底です．

一方で $(C_{\mathrm{per}}[-\pi,\pi], \|\cdot\|_\infty)$ では，du Bois-Reymond の反例が示すように $\sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}(n) e_n$ が f に各点収束すらしない場合があるので，$\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ はこの空間の Schauder 基底ではありません[2]．

つまり $C_{\mathrm{per}}[-\pi,\pi]$ において，$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e_n$ in $\|\cdot\|_2$ は正しいのですが，$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e_n$ in $\|\cdot\|_\infty$ は正しくないわけです．

[2]注意深い人は「係数を $\widehat{f}(n)$ 以外のものに変えれば収束する可能性はあるのでは？」と思ったかも知れません．その場合は第 1 回の内容を見直してみてください．