

Hermite 多項式の完全性

福島竜輝

関数解析入門演習の第 12 回に Hermite 関数系の完全性を証明したと思いますが，ここでは Fourier 変換を使った別証明を紹介します．演習の記号に合わせて $\mu(dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ と書くことにします．

すべての Hermite 多項式 H_n は単項式 $\{m_n(x) = x^n\}_{n=0}^{\infty}$ の線型結合で表わせて，逆も可能です．したがって完全性の定義に現れる「 f がすべての Hermite 多項式と直交する」という性質は

$$\forall n \in \mathbb{Z}_+, \quad \langle f, m_n \rangle_{L^2(\mu)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) x^n e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0 \quad (1)$$

と同値です．

$f \in L^2(\mu)$ に対して (1) から $f = 0$ が導かれることを示すために， $z \in \mathbb{C}$ に対して関数

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) x^n e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

を考えます．係数に Schwarz の不等式を使うと

$$\left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) x^n e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right| \leq \|f\|_{L^2(\mu)} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x^{2n} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right)^{1/2}$$

となりますが（とくに $f(x)e^{-\frac{x^2}{2}} \in L^1(\mathbb{R})$ であることに注意），単純計算で

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x^{2n} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = (n-1)!!$$

がわかります．したがって（例えば $\frac{((n-1)!!)^{1/2}}{n!} \leq \frac{1}{(n!)^{1/2}}$ などと評価することで） $F(z)$ を定める級数はすべての $z \in \mathbb{C}$ で収束することがわかります．さらに任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して $|\sum_{n=0}^N \frac{z^n}{n!} x^n| \leq e^{|zx|}$ であることと，再び Schwarz の不等式を使って

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |f(x)| e^{|zx|} e^{-\frac{x^2}{2}} dx &\leq \|f\|_{L^2(\mu)} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{2|zx| - \frac{x^2}{2}} dx \right)^{1/2} \\ &< \infty \end{aligned}$$

がわかることから，Lebesgue の収束定理が使えて^{*1}

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} f(x) x^n e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{zx - \frac{x^2}{2}} dx$$

と書き換えることができます．ここで (1) を仮定すると（べき級数のすべての係数が 0 なので）すべての $z \in \mathbb{C}$ で $F(z) = 0$ であり，とくにすべての $\xi \in \mathbb{R}$ に対して

$$F(-i\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-i\xi x} dx = 0,$$

つまり $f(x)e^{-\frac{x^2}{2}} \in L^1(\mathbb{R})$ の Fourier 変換が 0 であることがわかります．すると第 14 回講義資料 6 ページの命題からほとんどいたる所 $f(x)e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$ であることがわかり，これから $f = 0$ が従います．

^{*1} Fubini の定理を使ってもできます．各自で確認してください．