畳み込み余話

福島竜輝

畳み込みはこの講義を通して重要な概念ですが，やや天下り的に感じた人もいると思います．そこで一つの解釈を紹介しておきます．二つの独立な実数値確率変数 X, Y が確率密度関数 f と g を持つとします．つまり

$$P(X \in A) = \int_A f(x)\mathrm{d}x, \quad P(Y \in B) = \int_B g(y)\mathrm{d}y,$$

です（A, B は何でもよいわけではありませんが，細かいことは気にしないでください）．

この二つの確率変数 X, Y の和がどのように分布するかを考えてみましょう．とりあえず定義通りに二重積分で書いて，いろいろ変形すると

$$\begin{aligned}
P(X+Y \in A) &= \int_{x+y\in A} f(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int f(x)g(y)1_{\{x+y\in A\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int \left(\int f(x)1_{\{x+y\in A\}}\mathrm{d}x \right) g(y)\mathrm{d}y && \text{(Fubini の定理)} \\
&= \int \left(\int f(z-y)1_{\{z\in A\}}\mathrm{d}z \right) g(y)\mathrm{d}y && \text{(変数変換 } x+y=z\text{)} \\
&= \int \left(\int f(z-y)g(y)\mathrm{d}y \right) 1_{\{z\in A\}}\mathrm{d}z && \text{(Fubini の定理)} \\
&= \int_A f*g(z)\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

となります[*1]．これは $X+Y$ が確率密度関数 $f*g$ を持つことを意味します．

この解釈に従って，例えば $f = 1_{[0,1]}$ で g が軟化子である状況を考えてみましょう．X は一様分布に従うので 0 から 1 の値を偏りなくとり，その外の値はまったくとらないという “不連続” な確率変数です．これと Y の和を考えることは，なめらかに分布した揺らぎを加えることに相当します．そうすると X の分布が少し “滲んで” なめらかな分布になることが想像できると思います．これが $f*g$ によって f をなめらかにすることができることの確率論的な解釈です．

こういう方針で軟化子の役割を説明するなら，本当は X の分布が離散的，つまり ± 1 を確率 $\frac{1}{2}$ でとるような場合を考える方がわかりやすいのですが，この場合は f が関数としては存在せず，

$$P(X \in A) = \left(\frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_{-1} \right)(A)$$

のように測度になってしまいます．測度と関数の畳み込みや，もっと一般に測度同士の畳み込みも大した困難はなく定義できるのですが，関数解析入門の内容からは外れるので，ここでは関数の畳み込みに限った例にしました．

[*1] 重積分の変数変換を使えば Fubini の定理は一回で済みますが，ここでは簡単さを優先しました．