重積分の変数変換

福島竜輝

重積分の変数変換公式は，多変数の微積分の中で証明が大変なものの一つとされている．それ故に微積分の講義で証明されることもまずないので，学生から質問を受けることもある．それで参考文献を挙げようと思っても，完全な証明が書いてある本は少ない．Riemann 積分の枠組みでは杉浦光夫「解析入門 II」（東京大学出版），Lebesgue 積分の枠組みなら W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGrawHill がある．しかしいずれも，証明の要素がいくつかの章や節に分かれて書かれていることもあって，証明の全体像が把握しづらい．また一般的な定式化を指向しているために技術的に複雑になっているところもある．

そこで Riemann 積分の変数変換公式だけに専念して，仮定の一般性については妥協する代わりに，証明の要点がわかるようにまとめたノートを書いておくことには意味があると考えた．証明は大きく分けて三段階になるが，それぞれの段階で何が要点かはできるだけ明確になるようにしたつもりである．関連する事項については，ある程度の説明はするが，自己充足的と言える程には徹底しない．少なくとも Riemann 積分，Jordan 測度，逆関数定理，及び線型代数の関連する事項についてはわかっているものとする．

1　定理の定式化と諸注意

ここで証明しようとするのは，以下の定式化である．

定理 1. d は 2 以上の整数とする．$\mathbb{R}^d$ の有界閉集合 U は Jordan 可測であるとし，U を含む開集合 V で定義された C^1 級写像 $\phi\colon V \to \mathbb{R}^d$ と，$\phi(U)$ 上で定義された連続関数 $f\colon \phi(U) \to \mathbb{R}$ を考える．この ϕ が単射で，ϕ' が V の各点で非退化ならば，

$$\int_U f(\phi(x))|\det \phi'(x)|\mathrm{d}x = \int_{\phi(U)} f(y)\mathrm{d}y \tag{1}$$

が成り立つ．ただし右辺の積分が意味を持つこと（つまり $\phi(U)$ が Jordan 可測であること）も主張の一部である．

注意 1. この定式化において，どういう一般性を妥協したかを，理由を付けて述べる．

1. U を含む開集合 V を考えているのは，少し広い集合で ϕ が C^1 級と仮定することで U 上での ϕ' の一様評価が仮定できて，それが議論を単純化するからである．こうすると直接には極座標変換が定理の適用例にならないが，これは原点付近を除いておいて後で極限をとり，広義積分として処理すれば問題ない．
2. 上の項目に関連して，一般性を追求する場合には，あくまで ϕ は U で定義されているとして，「$\phi(U)$ が Jordan 可測」を仮定に含める流儀もある．しかし，そこまでするなら Jordan 可測性自体が中途半端な概念であることも気になってくるので，Lebesgue の測度論の枠組みを準備することを検討すべきだろう．
3. f の連続性は弱めることができるが，例えば f に Riemann 積分可能性を仮定しても，ϕ との合成が Riemann 積分可能性であることには追加の議論を要する．これも Lebesgue の

測度論の枠組みで解決する方が自然であろう．実用上は不連続点を除いておいて，広義積分のように処理すれば済むことが多い．

4. ϕ の単射性を外すことはできるが，そうすると ϕ の像が“二重”になっているところでは片方が“裏返って”いるので，符号付き体積を考えたり色々な対処が必要になり，主張を書くための準備だけでも大変になる．（“二重”とか“裏返って”の意味は説明していないが，詳しく知りたいならとりあえず笠原晧司「対話・微分積分学」（現代数学社）の第 13 章を見ると良いと思う．）

2 定理の証明

以下，段階を追って変数変換公式の証明を行う．余計なことを色々と書くので長くなるが，必要なことだけに絞ればもっと短くなる．

2.1 Jordan 測度に関する準備

集合が Jordan 可測であることの定義を思い出そう[*1]．$Q = \prod_{j=1}^{d}[a_j, b_j)$ の形の集合を d 次元区間と呼び，$|Q| = \prod_{j=1}^{d}(b_j - a_j)$ と定める．これを用いて，集合 A の Jordan 内測度を

$$\underline{J}(A) = \sup\left\{\textstyle\sum_{k=1}^{n}|Q_k|\colon n \in \mathbb{N}, \{Q_k\}_{k=1}^{n} \text{ は非交差な } d \text{ 次元区間}, \bigcup_{k=1}^{n} Q_k \subset A\right\},$$

Jordan 外測度を

$$\overline{J}(A) = \inf\left\{\textstyle\sum_{k=1}^{n}|Q'_k|\colon n \in \mathbb{N}, \{Q'_k\}_{k=1}^{n} \text{ は } d \text{ 次元区間}, \bigcup_{k=1}^{n} Q'_k \supset A\right\}$$

で定める．この二つが一致するときに A は Jordan 可測であるといい，共通の値を A の Jordan 測度 $|A|$ と呼ぶ．

これは標準的な定義だが，どういう d 次元区間の集まりが上限や下限に近い値を与えるかがわかりにくい難点がある．そこで同値な言い換えを導入する．自然数 L 毎に，$\mathbb{R}^d$ の各座標を 2^{-L} の幅に分割してできる d 次元区間の集合を

$$\mathcal{C}_L^d = \left\{\textstyle\prod_{j=1}^{d}[a_j, a_j + 2^{-L})\colon \{a_j\}_{j=1}^{d} \text{は全て } 2^{-L} \text{ の整数倍}\right\}$$

とする．この $\mathcal{C}_L^d$ に属する d 次元区間だけで集合 A の内測度と外測度を近似しようとすれば，

$$\underline{J}_L(A) = \sum_{Q \in \mathcal{C}_L^d, Q \subset A} |Q|,$$
$$\overline{J}_L(A) = \sum_{Q \in \mathcal{C}_L^d, Q \cap A \neq \emptyset} |Q|$$

とするのが，内と外からの近似として最良である．ここで $\mathcal{C}_L^d$ に属する集合は $\mathcal{C}_{L+1}^d$ に属する集合を 2^d 個組み合わせて作れることに注意すると，$\mathcal{C}_{L+1}^d$ を使う方が自由度が高いことになるから

$$\underline{J}_L(A) \le \underline{J}_{L+1}(A) \le \overline{J}_{L+1}(A) \le \overline{J}_L(A)$$

[*1] 同値な定義がいくつかあるが，多くの本で採用されているものである．

であることがわかる．集合 A が有界なら有限個の $\mathcal{C}_1^d$ の集合で覆えるから $\overline{J}_1(A)$ も有界であり，すると実数の連続性から $\lim_{L\to\infty} \underline{J}_L(A)$ と $\lim_{L\to\infty} \overline{J}_L(A)$ が存在することがわかる．そして A が Jordan 可測であることはこの二つの極限値が一致することと同値で，共通の極限値が $J(A)$ になることがわかる．実際，d 次元区間 $Q = \prod_{j=1}^d [a_j, b_j)$ に対しては上の二つの極限が一致して $|Q| = \prod_{j=1}^d (b_j - a_j)$ になることは容易にわかり，一般の集合に対しても，内測度と外測度の定義に使われる d 次元区間をあらかじめ $\mathcal{C}_L^d$ に属する集合で近似しておけば，どちらの定義でも同じであることがわかるのである[*2]．

以下の事実は，Jordan 測度の定義に基づいて容易に証明できる．

事実 1 集合 A が Jordan 可測であることは，それが有界で $|\partial A| = 0$ となることと同値である．

事実 2 $\prod_{j=1}^d [a_j, b_j)$ の Jordan 測度は $\prod_{j=1}^d (b_j - a_j)$ である．従って，上の $|Q| = \prod_{j=1}^d (b_j - a_j)$ という記号は整合的である．

事実 3 Jordan 測度は平行移動で不変，即ち $|x + U| = |U|$ である．

事実 4 二つの交わらない Jordan 可測集合 A, B に対して $|A \cup B| = |A| + |B|$ である．

事実 5 二つの Jordan 可測集合 A, B に対して $A \subset B$ ならば $|A| \leq |B|$ である．

このうち，事実 2 と事実 3 は元の定義を，事実 1 と事実 4 は書き換えた定義を使って証明する方が易しいと思う．事実 5 の証明はどちらでも同じであろう．

2.2 ϕ が線型変換で U が d 次元区間の場合：意外に面倒

まず簡単な場合として，ϕ が線型変換で $U \in \mathcal{C}_L^d$ の場合を考える．この場合の考察が，公式の形が (1) になることに直接つながるので，重要な部分である．

補題 1. ϕ が $\mathbb{R}^d$ からそれ自身への線型同型写像であり，ある $L \in \mathbb{N}$ に対して $U \in \mathcal{C}_L^d$ のとき，像 $\phi(U)$ は Jordan 可測であり，その Jordan 測度は $|\det(\phi)||U|$ である．

この補題は，多くの線型代数の本に事実として書かれている．しかし証明は Jordan 測度の定義に基づいて行う必要があるので，書かれていないことが多い（「体積＝底面積 $\times$ 高さ」であることが一般の次元でも成り立つことを仮定して証明する本もある）．微積分の本でも証明しないことも多いが，証明する場合は

1. 集合 A の Jordan 測度が，$\int_A 1\,\mathrm{d}x$ と一致することを示す（またはそれを定義にする）．
2. 線型変換 ϕ が表現行列の行基本変形に対応する場合に，重積分と累次積分の一致を使って $|\phi(U)| = |\det(\phi)||U|$ を示す．
3. 一般の線型変換に対しては，それが表現行列の行基本変形に対応する変換の合成で表せることと，行列式の乗法性を使って示す．

[*2] 同値ということは Jordan 測度を初めから $\mathcal{C}_L^d$ を使って定義してもよいわけで，私はその方が好ましいと考えている．例えば一辺の長さが 1 の d 次元区間の Jordan 測度が 1 と定義して，非交差な集合に対する加法性と平行移動不変性（本文で直後に書いている事実 3 と事実 4）を使って順に拡張していくという手続きを考えると，近似に使う d 次元区間はせいぜい辺の長さが有理数のものに限られるのである．既存の本では，例えば Courant–John, “Introduction to Calculus and Analysis II/1”, Springer はこういう方針で Jordan 測度を扱っている．

という手順で行われることが多い．三つの段階があることからわかるように意外に面倒であるが，重積分について先に準備が済んでいるという前提の下では効率的な方法であるし，この部分は正確に書かれた本が多いので，この点に疑問がなければ次の節から読めばよい．

しかし何が効いているのかはわかり易くないし，また重積分と累次積分の一致を示すのは（通常はもっと一般化して証明することもあって）結構大変なので，そこまで込みにすると効率的とも言えない．そこで，ここでは Jordan 測度の性質に基づいた直接的な証明をしてみる．

補題 1の証明. $U = \prod_{j=1}^{d}[a_j, a_j + b)$ と表すことにする．このように各区間の長さが等しい d 次元区間を，d 次元立方体と呼ぶことにする（この補題の証明でしか使わない用語である）．行基本変形に対応する変換は $\mathbb{R}^d$ のベクトルの「異なる二つの成分を入れ替える」，「ある成分に 0 でない実数を掛ける」，「ある成分に他の成分を加える」の三つである．一般の全単射な線型変換は，これらの三つの変換の有限回の合成で表すことができる．ここで最初の「成分を入れ替える」という操作と組み合わせることで，残りの二つは「第一成分に 0 でない実数を掛ける」，「第一成分に第二成分を加える」に限ってよい．また ϕ が線型変換ならば $a = (a_j)_{j=1}^{d}$ として

$$\phi\left(\prod_{j=1}^{d}[a_j, a_j + b)\right) = \phi(a) + \phi\left([0, b)^d\right)$$

であり，Jordan 測度は平行移動で不変だったから $U = [0, b)^d$ の場合にだけ示せば十分である．

まず「異なる二つの成分を入れ替える」変換は，d 次元立方体 $[0, b)^d$ をそれ自身に写す．従ってこの変換で Jordan 測度は変わらない．この変換の行列式は -1 であるから，この場合には補題 1は成り立っている．次に「第一成分に 0 でない実数を掛ける」変換であるが，これについては掛ける実数を $c \neq 0$ とすると，$U = \prod_{j=1}^{d}[0, b)$ の像は $[0, cb) \times \prod_{j=2}^{d}[0, b)$ となり，d 次元区間の Jordan 測度が各区間の長さの積であることから，像の Jordan 測度は $|c||U|$ となる[*3]．この変換の行列式は c であるから，この場合にも補題 1は成り立っている．最後に「第一成分に第二成分を加える」変換は，$U = \prod_{j=1}^{d}[0, b)$ を

$$\left\{(x_j)_{j=1}^{d} : x_2 \leq x_1 < b + x_2, 0 \leq x_2 < b\right\} \cap \left(\mathbb{R}^2 \times [0, b)^{d-2}\right) \tag{2}$$

に写す（$d \leq 2$ のときには $\times[0, b)^{d-2}$ は無いものとする）．この集合は二つの交わらない Jordan 可測な集合

$$\left\{(x_j)_{j=1}^{d} : 0 \leq x_2 \leq x_1 < b\right\} \cap \left(\mathbb{R}^2 \times [0, b)^{d-2}\right), \tag{3}$$

$$\left\{(x_j)_{j=1}^{d} : b \leq x_1 < x_2 + b, 0 \leq x_2 < b\right\} \cap \left(\mathbb{R}^2 \times [0, b)^{d-2}\right) \tag{4}$$

の和集合になっていることに注意する[*4]．この (4) を $(-b, 0, \ldots, 0)$ だけ平行移動すると，

$$\left\{(x_j)_{j=1}^{d} : 0 \leq x_1 < x_2 < b\right\} \cap \left(\mathbb{R}^2 \times [0, b)^{d-2}\right)$$

[*3] $c < 0$ の場合は区間の上端が開いているか下端が開いているかが変換によって変わる．そういう少し変わった d 次元区間の Jordan 測度が各区間の長さの積であることは簡単に証明できるので，自習に任せる．

[*4] これらの集合は有界だから，Jordan 可測であることを示すには，境界の Jordan 測度が 0 であることを確かめればよい．座標軸に直交する面は簡単である．そうでないのは，$\{(x_j)_{j=1}^{d} : x_1 = x_2\}$ か，その平行移動である $\{(x_j)_{j=1}^{d} : x_1 = x_2 + b\}$ に含まれる面だが，例えば前者は $\bigcup_{0 \leq k \leq \lfloor b/\varepsilon \rfloor}[(k-1)\varepsilon, (k+1)\varepsilon)^2 \times [0, b)^{d-2}$ に含まれることに注意すればよい．

となり，(3) との和集合は U になる．平行移動は Jordan 測度を変えないことと，交わらない集合の合併の Jordan 測度はそれぞれの Jordan 測度の和であったことを思い出すと，(2) の Jordan 測度は $|U|$ であることがわかる[*5]．この変換の行列式は 1 であるから，この場合にも補題 1は成り立っている．

一般の全単射な線型変換 ϕ を，上の三つの変換の有限回の合成で

$$\phi = \phi_1 \circ \cdots \circ \phi_m$$

と表す．最初に施す変換 ϕ_m が上の三つの変換のうち最初の二つのときには像 $\phi_m(U)$ も d 次元立方体なので，次の ϕ_{n-1} を施すときも上と同じ議論ができる．一方で ϕ_m が上の三つの変換の最後のもののときは像 $\phi_m(U)$ は d 次元立方体ではなくなるが，$\phi_m(U)$ は Jordan 可測なので，任意の $\varepsilon > 0$ に対して L を十分大きくとれば

$$|\phi_m(U)| - \varepsilon \leq \sum_{Q \in \mathcal{C}_L^d, Q \subset \phi_m(U)} |Q|$$

とできる（内側からの近似）．これに ϕ_{m-1} を施すと，$\{\phi_{m-1}(Q)\}_{Q \in \mathcal{C}_L^d, Q \subset \phi_m(U)} \subset \phi_m(U)$ は非交差な Jordan 可測集合の集まりであって，$|\phi_{m-1}(Q)| = |\det(\phi_{m-1})||Q|$ は既に示したから，

$$\begin{aligned} |\phi_{m-1} \circ \phi_m(U)| &\geq |\det(\phi_{m-1})| \sum_{Q \in \mathcal{C}_L^d, Q \subset \phi_m(U)} |Q| \\ &\geq |\det(\phi_{m-1})|(|\phi_m(U)| - \varepsilon) \end{aligned}$$

が成り立つ．外側からの近似についても同じ議論をすることで

$$|\phi_{m-1} \circ \phi_m(U)| \leq |\det(\phi_{m-1})|(|\phi_m(U)| + \varepsilon)$$

がわかり，$\varepsilon > 0$ は任意だから $|\phi_{m-1} \circ \phi_m(U)| = |\det(\phi_{m-1})||\det(\phi_m)||U|$ であることが従う．これを繰り返して，行列式の乗法性を使えば

$$\begin{aligned} |\phi(U)| &= |\phi_1 \circ \cdots \circ \phi_m(U)| \\ &= |\det(\phi_1)| \cdots |\det(\phi_m)||U| \\ &= |\det(\phi)||U| \end{aligned}$$

となって，補題 1の証明が終わる． □

補題 2. ϕ が $\mathbb{R}^d$ からそれ自身への線型同型写像であり，U が Jordan 可測集合であるとき，像 $\phi(U)$ は Jordan 可測であり，その Jordan 測度は $|\det(\phi)||U|$ である．とくに直交変換は Jordan 測度を不変にする．

証明. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，L を十分大きくとれば

$$|U| - \varepsilon \leq \sum_{Q \in \mathcal{C}_L^d, Q \subset U} |Q|, \qquad \sum_{Q \in \mathcal{C}_L^d, Q \cap U \neq \emptyset} |Q| \leq |U| + \varepsilon \tag{5}$$

[*5] $d = 2$ のときに図を描いてみればわかるように，これは小学校で学ぶ「平行四辺形の面積は底辺 × 高さ」の証明の特殊な場合である．ここで Jordan 測度の元の定義通りに一般の d 次元区間を使っていると，分割と平行移動を何度も行う必要がある場合が生じて面倒である．

とできる．ここで ϕ による変換の像について

$$\bigcup_{Q\in\mathcal{C}_L^d, Q\subset U} \phi(Q) \subset \phi(U) \subset \bigcup_{Q\in\mathcal{C}_L^d, Q\cap U\neq\emptyset} \phi(Q)$$

であり，従って和集合の Jordan 測度が非交差なら加法的であることから

$$\sum_{Q\in\mathcal{C}_L^d, Q\subset U} |\phi(Q)| \leq \phi(U) \leq \sum_{Q\in\mathcal{C}_L^d, Q\cap U\neq\emptyset} |\phi(Q)|$$

が成り立つ．補題 1により各 Q に対して $|\phi(Q)| = |\det(\phi)||Q|$ となることを用いれば，(5) と合わせて

$$|\det(\phi)|(|U| - \varepsilon) \leq |\phi(U)| \leq |\det(\phi)|(|U| + \varepsilon)$$

が得られる．最後に $\varepsilon > 0$ は任意だったことを思い出すと，これは $|\phi(U)| = |\det(\phi)||U|$ を意味する．とくに ϕ が直交変換ならば，その行列式は $|\det(\phi)| = 1$ だから，$|\phi(U)| = |U|$ となる． □

2.3 ϕ が一般の場合の局所評価：ここが一番大変

次に ϕ が定理 1の仮定を満たすときに，小さな正方形の像の Jordan 測度の近似評価を示す．これは微分可能な写像 ϕ が，局所的には線型写像 ϕ' で近似できることからすぐにわかりそうに見えるかも知れないが，実はそうではなく，ここが変数変換公式の証明の技術的核心である．

補題 3. ϕ は開集合 $V \subset \mathbb{R}^d$ から $\mathbb{R}^d$ への単射な C^1 級関数で，ϕ' が V の各点で非退化であるとする．このとき，任意の $x \in V$ と $\varepsilon > 0$ に対して，$\delta_{x,\varepsilon} > 0$ を十分小さくとれば，$x + (-\delta_{x,\varepsilon}, \delta_{x,\varepsilon})^d$ に含まれる全ての $Q \in \bigcup_{L\in\mathbb{N}} \mathcal{C}_L^d$ に対して以下が成り立つ：

$$\left| \frac{|\phi(Q)|}{|Q|} - |\det(\phi'(x))| \right| < \varepsilon.$$

注意 2. 補題 2の証明と同じ方法で，この主張は Jordan 測度が正の $U \subset x + (-\delta_{x,\varepsilon}, \delta_{x,\varepsilon})^d$ に拡張できる．この補題の主張を「集合に対して実数値を返す関数 $|\phi(\cdot)|$ の x における密度微分が $|\det(\phi'(x))|$ である」と表現することがある．その意味は，$Q = x + [-\delta, \delta)^d$ に限ったときに得られる

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{|\phi(x + [-\delta, \delta)^d)|}{|x + [-\delta, \delta)^d|} = |\det(\phi'(x))|$$

を見るとわかるだろう．しかし変数変換公式の証明では，補題 3のように近傍での一様評価に一般化してあることが重要になる．

補題 3の証明に先立って，行列の大きさに関する記号とその性質を準備する．$d \times d$ 行列 A に対して，

$$\|A\|_\infty = \max_{1\leq i,j\leq d} |A_{i,j}|$$

とする．このとき，任意の $v \in \mathbb{R}^d$ に対して，

$$\begin{aligned} |Av| &= \left(\sum_{i=1}^d \left(\sum_{j=1}^d A_{i,j}x_j\right)^2\right)^{1/2} \\ &\le \|A\|_\infty \left(\sum_{i=1}^d \left(\sum_{j=1}^d x_j\right)^2\right)^{1/2} \\ &\le d\|A\|_\infty |x| \end{aligned} \tag{6}$$

である．最後の行は，Cauchy–Schwarz の不等式から $(\sum_{j=1}^d x_j)^2 \le d\sum_{j=1}^d x_j^2$ であることを用いた．

補題 3の証明. 上からの評価から始める．ϕ は V 上で C^1 級だから，任意の $x \in V$ と $\varepsilon > 0$ に対して，$\delta > 0$ を十分小さくとれば，$x + (-\delta, \delta)^d$ に含まれる任意の点 y に対して

$$\|\phi'(x) - \phi'(y)\|_\infty < \varepsilon$$

とできる．このとき任意の $x_1, x_2 \in x + (-\delta, \delta)^d$ に対して，微積分学の基本定理と (6) を使って

$$\begin{aligned} |\phi(x_1) - \phi(x_2) - \phi'(x)(x_1 - x_2)| &= \left|\int_0^1 (\phi'(x_2 + t(x_1 - x_2)) - \phi'(x))(x_1 - x_2)\mathrm{d}t\right| \\ &\le d \sup_{y \in x + (-\delta,\delta)^d} \|\phi'(x) - \phi'(y)\|_\infty |x_1 - x_2| \\ &\le \varepsilon |x_1 - x_2| \end{aligned}$$

がわかる．ここで $Q = x_2 + [-a, a)^d \subset x + (-\delta, \delta)^d$ とすると[*6]，上の評価から任意の $x_1 \in Q$ に対して，$\phi(x_1)$ と $\phi(x_2) + \phi'(x)(x_1 - x_2)$ の距離は高々 $\sqrt{d}\varepsilon a$ である．従って $\phi(Q)$ は $\phi(x_2) + \phi'(x)([-a, a)^d)$ の $\sqrt{d}\varepsilon a$ 近傍に含まれているので，Jordan 測度の平行移動不変性も使って

$$\begin{aligned} |\phi(Q)| &\le |\phi(x_2) + \phi'(x)([-a, a)^d) \text{ の } \sqrt{d}\varepsilon a \text{ 近傍 }| \\ &= |\phi'(x)([-a, a)^d) \text{ の } \sqrt{d}\varepsilon a \text{ 近傍 }| \end{aligned}$$

となる．後はこの最後の量と $|\phi'(x)([-a, a)^d)| = |\det(\phi'(x))||Q|$（Joran 測度の平行移動不変性と補題 1を使った）との差が εa^d の定数倍以下であることを示せば，$\varepsilon > 0$ は任意だから上からの評価の証明が終わる．

さて，$\phi'(x)([-a, a)^d)$ の $\sqrt{d}\varepsilon a$ 近傍と $\phi'(x)([-a, a)^d)$ の（集合としての）差は，$\phi'(x)([-a, a)^d)$ の境界の $\sqrt{d}\varepsilon a$ 近傍に含まれる．ここで $\phi'(x)([-a, a)^d)$ の境界は $2d$ 個の $(d-1)$ 次元部分空間[*7]に含まれる $\{B_j\}_{j=1}^{2d}$ からなり，それぞれは平行移動と直交変換によって $\mathbb{R}^{d-1} \times \{0\}$ に含まれるようにできる．さらに

$$\phi'(x)([-a, a)^d) \subset d\|\phi'(x)\|_\infty [-a, a)^d$$

[*6] $\mathcal{C}_L^d$ の定義と違って x_2 を Q の中心に取るのは，この方が線型写像による拡大縮小への応答が見やすいからである．

[*7] 部分線型空間ではなく，その平行移動を許したいわゆる部分 Affine 空間である．

に注意すると，各 B_j の $\sqrt{d}\varepsilon a$ 近傍は平行移動と直交変換によって

$$d^{3/2}\|\phi'(x)\|_\infty[-a,a)^{d-1}\times[-d^{3/2}\varepsilon a, d^{3/2}\varepsilon a)$$

に含まれるようにできる．これは d 次元区間だから，その Jordan 測度は各辺の長さの積 $2^d(d^{3/2}\|\phi'(x)\|_\infty)^{d-1}d^{3/2}\varepsilon a^d$ であり，平行移動も直交変換も Jordan 測度を変えないことを思い出せば

$$\sum_{j=1}^{2d}|B_j\text{の } \sqrt{d}\varepsilon a \text{ 近傍 }| \leq (2d)2^d(d^{3/2}\|\phi'(x)\|_\infty)^{d-1}d^{3/2}\varepsilon a^d$$

が得られるから，これで上からの評価の証明が完成した．

次に下からの評価を示す（記号は上からの評価と同じとする）．そのためには上からの評価とは逆に，$\phi'(x)([-a,a)^d)$ を少し縮小して $\phi(x_2)$ だけ平行移動した集合が $\phi(Q)$ に含まれることを示す必要がある．これを「ϕ が線型写像で近似できる」という性質からは導けないことが，変数変換公式の証明の最も難しいところである．これを解決するために逆写像定理を使う．補題 3の仮定の下では，逆写像定理により $\phi^{-1}\colon \phi(V)\to V$ は C^1 級であって $(\phi^{-1})'(\phi(x))=(\phi'(x))^{-1}$ である．すると上からの評価と全く同じ方法で，任意の $\varepsilon'>0$ に対して δ' を十分小さくとれば，任意の $y_1,y_2\in\phi(x)+(-\delta',\delta')^d$ に対して

$$|\phi^{-1}(y_1)-\phi^{-1}(y_2)-\phi'(x)^{-1}(y_1-y_2)|\leq\varepsilon'|y_1-y_2| \tag{7}$$

がわかる．ここで，上からの評価の証明でとった $\delta>0$ を必要ならさらに小さく取り直して，$x+(-\delta,\delta)^d$ の ϕ による像は $\phi(x)+(-\delta',\delta')^d$ に含まれるようにしておく．するととくに Q の像 $\phi(Q)$ も $\phi(x)+(-\delta',\delta')^d$ に含まれる．

以上の準備の下に $\phi(x_2)+\phi'(x)([-(1-\varepsilon)a,(1-\varepsilon)a)^d)$ の ϕ^{-1} による像を考える．この集合の $y\mapsto x_2+\phi'(x)^{-1}(y-\phi(x_2))$ による像はもちろん $x_2+[-(1-\varepsilon)a,(1-\varepsilon)a)^d$ であるが，(7) により ϕ^{-1} による像もその $\sqrt{d}\varepsilon' a$ 近傍に含まれる．従って $\varepsilon'=\varepsilon/\sqrt{d}$ としておけば，

$$\begin{aligned}\phi^{-1}\left(\phi(x_2)+\phi'(x)([-(1-\varepsilon)a,(1-\varepsilon)a)^d)\right)&\subset x_2+[-(1-\varepsilon)a,(1-\varepsilon)a)^d\text{の } \varepsilon a \text{ 近傍}\\&\subset x_2+[-a,a)^d\end{aligned}$$

となる．これの ϕ による像を考えれば，Jordan 測度の関係

$$|\phi(x_2)+\phi'(x)([-(1-\varepsilon)a,(1-\varepsilon)a)^d)|\leq|\phi(x_2+[-a,a)^d)|$$

が得られる．Joran 測度の平行移動不変性と補題 1を使えば，左辺は $(1-\varepsilon)^d|\det(\phi'(x))|(2a)^d$ に等しいので，下からの評価の証明が終わる． □

下からの評価の難しさについて補足する．ϕ は微分可能なので線型写像で近似できるが，それは（誤差の）上からの評価なので，ϕ の像が「大きくならない」ことは言えても，「小さくならない」ことは言えないことが問題である．最も簡単な一次元の場合でも，例えば一点で微分可能というだけでは，その点に近づくに従って細かくなるような階段型の関数[*8]も許容されており，その像はどんな区間も含まない．一次元の場合に像が区間を含むことを示す方法と言えば中間値の

[*8] 例えば $|x|\in(2^{-n},2^{-n+1}]$ のとき $f(x)=2^{-n}\mathrm{sign}(x)$，$f(0)=0$ という関数は原点で微分可能である．

定理があるが，それは関数の微分可能性とは直接関係がないのであった（代わりに区間での連続性が必要である）．像が区間を含むとか，平行六面体を含むというのは，その中の全ての点に対して原像が存在するという意味で存在定理なのであって，必然的に完備性などを使った難しい証明にならざるを得ないのである．上の証明では下からの評価の証明は比較的短かったが，それはここで説明した存在定理の議論が逆写像定理の証明に含まれていて，表に出てこないからである．逆写像定理は，それ自体が変数変換公式と並んで多変数関数の微積分において難しい定理とされているが，その理由はまさに上で説明したようにそれが存在定理だからなのである[*9]．

ちなみに杉浦光夫「解析入門Ⅱ」（東京大学出版）では第Ⅶ章の補題 4.2 がこの部分にあたるが，そこではもっと写像の同相性を前面に出した位相的な議論がされている．また W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGrawHill では Lemma 7.23 にあたるが，そこでは Brouwer の不動点定理という位相幾何学の定理を援用している．ここではより微積分らしい議論を用いたが，この方針は J. Schwartz, *The Formula for Change in Variables in a Multiple Integral*, The American Mathematical Monthly, Vol.61, No.2, 1954, pp.81–85 が元ネタである．

2.4 ϕ が一般の場合の大域評価：コンパクト性で繋ぐだけ

最後にここまでの準備を使って，変数変換公式の証明を完成させよう．基本的には「密度微分」という局所評価をコンパクト性を使って全体に延ばすという，微積分での常套手段を使うだけであり，長いが難しくはない．

定理 1の証明. $\varepsilon > 0$ を任意にとる．補題 3と $\det(\phi')$，$f \circ \phi$ の連続性を用いて，U の各点 x に対して $\delta_{x,\varepsilon} > 0$ を以下を満たすようにとる：

1. $x + (-\delta_{x,\varepsilon}, \delta_{x,\varepsilon})^d$ に含まれる全ての d 次元立方体 Q に対して以下が成り立つ：
$$\left| \frac{|\phi(Q)|}{|Q|} - |\det(\phi'(x))| \right| < \varepsilon,$$
2. 全ての $y \in x + (-\delta_{x,\varepsilon}, \delta_{x,\varepsilon})^d$ に対して $|\det(\phi'(x)) - \det(\phi'(y))| < \varepsilon$,
3. 全ての $y \in x + (-\delta_{x,\varepsilon}, \delta_{x,\varepsilon})^d$ に対して $|f \circ \phi(x) - f \circ \phi(y)| < \varepsilon$.

このとき $(x + (-\delta_{x,\varepsilon}/2, \delta_{x,\varepsilon}/2)^d)_{x \in U}$ は有界閉集合 U の開被覆だから，Heine–Borel の被覆定理により有限個の $\{x_n\}_{n=1}^N$ に対応する集合族で被覆できる．記号の簡略化のため $\delta_{x_n,\varepsilon} = \delta_n$ と書くことにすると
$$U \subset \bigcup_{n=1}^N x_n + (-\delta_n/2, \delta_n/2)^d \tag{8}$$
である．

さて，定理の仮定の下で $f \circ \phi |\det \phi'| 1_U$ は Riemann 積分可能であり，従って L を十分大きくとれば，U と交わる $\mathcal{C}_L^d$ に属する集合の全体を $\{I_k\}_{k=1}^K$ として，代表点 $\xi_k \in I_k$ をどのように選

[*9] ただし変数変換公式との関連で言えば，逆写像定理が嫌なら初めから ϕ^{-1} が C^1 級と仮定する逃げ道があることは認識しておくべきである．具体的な計算で使うほとんどの変数変換は，逆写像定理など使わなくても ϕ^{-1} が C^1 級であることはわかることが多い．この辺りは教えている相手によって調整すべきところであろう．

んでも

$$\left|\int_U f(\phi(x))|\det\phi'(x)|\mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{K} f(\phi(\xi_k))|\det\phi'(\xi_k)|1_U(\xi_k)|I_k|\right| < \varepsilon \tag{9}$$

とできる[*10]．基本的な方針としてはこれに補題 3を使うのであるが，I_k が ∂U と交わるときには 1_U の不連続性などが問題になるので，別に扱う必要がある．ここで U は Jordan 可測なので $|\partial U| = 0$ であり，従って必要なら L を大きくとり直せば

$$\sum_{k: I_k \cap \partial U \neq \emptyset} |I_k| < \varepsilon$$

とできることに注意する．以下の議論を見やすくするため，∂U と交わる I_k を集めたものを $\{Q_m\}_{m=1}^{M}$ と書くことにする．最後に必要なら L を再び大きく取り直して，各 I_k の辺の長さは $\min_{1\leq n\leq N} \delta_n/2$ より小さいとしておく．このとき各 I_k は (8) によりある $x_n + (-\delta_n/2, \delta_n/2)^d$ と交わるが，辺の長さに課した条件から

$$I_k \subset x_n + (-\delta_n, \delta_n)^d \tag{10}$$

となる．従って初めの δ_n のとり方に課した一つ目の条件から

$$\begin{aligned} &||\phi(I_k)| - |\det(\phi'(\xi_k))||I_k|| \\ &\quad \leq ||\phi(I_k)| - |\det(\phi'(x_n))||I_k|| + |\det(\phi'(\xi_k)) - \det(\phi'(x_n))||I_k| \\ &\quad < 2\varepsilon|I_k| \end{aligned} \tag{11}$$

となっている．すると (9) の Riemann 和において $|\det(\phi'(\xi_k))||I_k|$ を $|\phi(I_k)|$ で置き換えたときの誤差は

$$\begin{aligned} &\left|\sum_{k=1}^{K} f(\phi(\xi_k))|\det\phi'(\xi_k)|1_U(\xi_k)|I_k| - \sum_{k=1}^{K} f(\phi(\xi_k))1_U(\xi_k)|\phi(I_k)|\right| \\ &\quad < \sup_{x\in U}|f(\phi(x))|\sum_{k=1}^{K} 2\varepsilon|I_k| \\ &\quad = O(\varepsilon) \end{aligned} \tag{12}$$

と評価できる．ここで $f\circ\phi$ は有界閉集合 U 上の連続関数だから有界であり，また $\sum_{k=1}^{K}|I_k|$ は初めにとった U を含む d 次元立方体の Jordan 測度 $|I|$ 以下であることを使った．

上の置き換えを行った後の $\sum_{k=1}^{K} f(\phi(\xi_k))1_U(\xi_k)|\phi(I_k)|$ において，∂U と交わる I_k を考える

[*10] Riemann 積分可能の定義は，分割の最大幅さえ十分小さければ Riemann 和がある値（積分）に近いということだったから，特殊な分割を指定しても構わないのである．

と，(11) も使って

$$
\begin{aligned}
&\left|\sum_{k:I_k\cap\partial U\neq\emptyset} f(\phi(\xi_k))1_U(\xi_k)|\phi(I_k)|\right| \\
&\quad\leq \sup_{x\in U}|f(\phi(x))|\sum_{m=1}^{M}|\phi(Q_m)| \\
&\quad\leq \sup_{x\in U}|f(\phi(x))|\left(\sup_{x\in U}|\det(\phi'(x))|+2\varepsilon\right)\sum_{m=1}^{M}|Q_m| \\
&\quad= O(\varepsilon)
\end{aligned}
\tag{13}
$$

が得られ，この寄与は小さいことがわかる．ここで逆写像定理により $\phi\colon V\to\phi(V)$ が同相写像であることを用いると，$\phi(I_k)$ が $\partial\phi(U)$ と交わるならば，I_k が ∂U と交わることがわかる[*11]．従って $\partial\phi(U)\subset\bigcup_{m=1}^{M}\phi(Q_m)$ であり，上の式で $f\equiv 1$ としたものを使えば

$$
|\partial\phi(U)|\leq\sum_{m=1}^{M}|\phi(Q_m)|=O(\varepsilon)
$$

となる．$\varepsilon>0$ は任意だから，これは $|\partial\phi(U)|=0$ を意味し，有界閉集合の連続写像による像が有界であることも思い出すと，$\phi(U)$ が Jordan 可測であることもわかる．同じ議論で $\phi(I_k\cap U)$ も Jordan 可測とわかる．

さて，Jordan 可測な集合の上で連続な関数は Riemann 積分可能であるから $\int_{\phi(U)}f(y)\mathrm{d}y$ や $\int_{\phi(I_k\cap U)}f(y)\mathrm{d}y$ は意味を持ち，

$$
\int_{\phi(U)}f(y)\mathrm{d}y=\sum_{k=1}^{K}\int_{\phi(I_k\cap U)}f(y)\mathrm{d}y
$$

が成り立つ．この右辺の和においても (13) と全く同様に，∂U と交わる I_k からの寄与は $O(\varepsilon)$ であることがわかる．一方で U に含まれる I_k に対しては，(10) と最初に近傍のとり方に課した三つ目の条件から

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{\phi(I_k\cap U)}f(y)\mathrm{d}y-f(\phi(\xi_k))1_U(\xi_k)|\phi(I_k)|\right| &= \left|\int_{\phi(I_k)}f(y)-f(\phi(\xi_k))\mathrm{d}y\right| \\
&\leq\varepsilon|\phi(I_k)|
\end{aligned}
$$

[*11] $\phi(x)$ が境界点なら，それに収束する $\phi(U)$ の内点の列と外点の列がある．ϕ^{-1} が連続なのでそれらの原像は x に収束する U の内点の列と外点の列になっているから，$x\in\partial U$ である．

であり，これは k について和をとっても $\varepsilon|\phi(U)|$ を超えない．以上の評価をまとめると，

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_{\phi(U)} f(y)\mathrm{d}y - \sum_{k=1}^{K} f(\phi(\xi_k))1_U(\xi_k)|\phi(I_k)|\right| \\
&\quad \le \sum_{k:\ I_k\subset U}\left|\int_{\phi(U)} f(y)\mathrm{d}y - f(\phi(\xi_k))1_U(\xi_k)|\phi(I_k)|\right| \\
&\qquad + \left|\sum_{k:I_k\cap\partial U\neq\emptyset}\int_{\phi(I_k\cap U)} f(y)\mathrm{d}y\right| + \left|\sum_{k:I_k\cap\partial U\neq\emptyset} f(\phi(\xi_k))1_U(\xi_k)|\phi(I_k)|\right| \\
&\quad = O(\varepsilon)
\end{aligned}
$$

が得られる．これと (9) 及び (12) を合わせると，

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_U f(\phi(x))|\det\phi'(x)|\mathrm{d}x - \int_{\phi(U)} f(y)\mathrm{d}y\right| \\
&\quad \le \left|\int_U f(\phi(x))|\det\phi'(x)|\mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{K} f(\phi(\xi_k))|\det\phi'(\xi_k)|1_U(\xi_k)|I_k|\right| \\
&\qquad + \left|\sum_{k=1}^{K} f(\phi(\xi_k))|\det\phi'(\xi_k)|1_U(\xi_k)|I_k| - \sum_{k=1}^{K} f(\phi(\xi_k))1_U(\xi_k)|\phi(I_k)|\right| \\
&\qquad + \left|\sum_{k=1}^{K} f(\phi(\xi_k))1_U(\xi_k)|\phi(I_k)| - \int_{\phi(U)} f(y)\mathrm{d}y\right| \\
&\quad = O(\varepsilon)
\end{aligned}
$$

となるから，定理 1の主張が示された． □

この証明の中で唯一面倒なのは境界付近の扱いである．上の証明では，Jordan 測度の二進分割による同値な定義を導入したおかげで，Riemann 和の近似を良くすることと，∂U を外側から精度良く近似することが，同じ分割 $\mathcal{C}_L^d$ を使って L を大きくするだけで実現されている．これを元の Jordan 測度の定義で実行しようとすると，∂U を外側から近似する $\{Q_m\}_{m=1}^M$ は抽象的に存在が保証されるだけなので，先にとっておいてから Riemann 和の近似を良くするために細分する必要があって，議論が少し複雑になる．