Landauの記号について

福島竜輝

微積分の講義をしていると，Landau の記号がよくわからないという声をよく聞く．慣れてしまえば実用上はどうということはないのだが，正確な定義を考えると意外に難しいところもある．また Landau の記号を正確に定義している微積分の本は見当たらないので，ここではそれに触れてみる．ただし数学における正確な定義は，安心材料になることはあっても，必ずしも感覚的な理解の助けになるとは限らないことに留意されたい．正確な定義が理解できたとしても，使いこなすのには結局はある程度の慣れがいると思う．

まず Landau の記号について，よくある説明は

$$o(f(x))\ (x \to 0) \text{ とは，} x \to 0 \text{ において } f(x) \text{ より速く } 0 \text{ に収束する状態}$$

である．これは「状態」という単語が未定義であるという問題があるので，通常は

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0 \text{ のとき，} g(x) = o(f(x))\ (x \to 0) \text{ という}$$

と定義する．しかしこれはこのままでは不都合があって，$x^2 = o(x)$ かつ $x^3 = o(x)$ から $x^2 = x^3$ という矛盾が導かれるように見えてしまう．この問題は，Landau の記号を単なる便宜上の記法として導入して，「$o(f(x))$ が何であるか」を明確に定義することを避けたことに由来している．

上に述べた通り，Landau の記号 $o(f(x))$ を正式に定義している微積分の本は見当たらないが，一つの自然な定義は

$$o(f(x))\ (x \to 0) \text{ とは，} x \to 0 \text{ において } f(x) \text{ より速く } 0 \text{ に収束する関数全体の集合}$$

である．この定義では未定義語だった「状態」が「(条件を満たす) 関数全体の集合」に置き換わっている．例を挙げれば

$$\begin{aligned} o(x) &= \left\{0, x^2, x^{1.1}, e^{-1/x^2}, \frac{x}{\log|\log x|}, \dots\right\}, \\ o(x^{10}) &= \left\{0, x^{11}, x^{10.1}, e^{-1/x^2}, \frac{x^{10}}{\log|\log x|}, \dots\right\} \end{aligned}$$

のようになる．そしてこの定義の下では，$x^2 = o(x)$ は $x^2 \in o(x)$，$x^3 = o(x)$ は $x^3 \in o(x)$ と書き直すべきということになり，そうするとこの二つから $x^2 = x^3$ とういう矛盾は導かれない．他にもいくつか利点がある．例えば極限演算などでよく使われる命題 $x^m o(x^n) = o(x^{m+n})$ について，「状態に関数を掛けるとはどういうことか」という疑問を持つ人は少なくない．これは上の定義では，左辺の $x^m o(x^n)$ を「集合 $o(x^n)$ のそれぞれの元を x^m 倍した集合」と解釈すれば，集合の間の等式として意味がつく[*1]．

もう少し演算について追及してみる．Landau の記号ばかりの演算

$$o(f(x))o(g(x)) = o(f(x)g(x))$$

も命題として述べられることがあるが，上と同様に左辺を「二つの集合から任意にとった元の積」

[*1] ただし微積分の教科書では，実際によく使う $x^m o(x^n) \subset o(x^{m+n})$ の方しか証明しないことが多いようである．

と解釈すれば，やはり集合の等式として成立する．和については

$$o(f(x)) + o(g(x)) = o(\max\{|f(x)|, |g(x)|\})$$

と演算の形式が変わることには注意が必要であるが，意味は同じである．商 $o(f(x))/o(g(x))$ は，$o(g(x))$ が 0 を含むので意味がつかない．このように Landau の記号に関する演算の意味を明確にしておけば，Taylor の定理の応用である

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n + o(h^n) \quad (x \to 0)$$

という式も

$$f(x+h) \in f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n + o(h^n) \quad (x \to 0)$$

と見ることができるようになる．こう書くと $o(h^n)$ が場合によって（正確には f, x に依存して）変わるものであるということが認識し易く，またその集合のどの元かを具体的に明らかにしているのが剰余項であるという認識も有益である思う．

ところで少し進んだ数学を学んでいれば，上で述べたことが「$+o(f(x))$ $(x \to 0)$」が「$f(x)$ で割って $x \to 0$ としたときの極限が一致する」という同値関係による同値類に対応していると考えたくなるのは自然である．正確に言えば

$$g(x) = f(x) + o(f(x)) \quad (x \to 0)$$

を上の同値関係を使って

$$g(x) \equiv f(x) \bmod [o(f(x)) \quad (x \to 0)]$$

と書くということである．以前は筆者もこのような解釈に意義があるのではないかと思っていたが，よく考えると

$$g(x) = h(x) + o(f(x)) \quad (x \to 0)$$

にはこれでは意味がつけられない（$\lim_{x\to 0} g(x)/f(x)$ が存在する保証がない）．もちろん

$$g(x) - h(x) = o(f(x)) \quad (x \to 0)$$

と書き直せば意味がつく場合に限定できるが，常にこう書き直すのでは Landau の記号の利便性は失われる．また演算の議論をするときには，異なる同値関係による同値類を同時に扱うことになるが，これは Landau の記号に特有のことではないかと思う．このような理由で，今は Landau の記号を同値類と解釈することにはあまり意義を感じていない．