一変数の微積分に関する問題

福島竜輝

1. $\sqrt{2}$ の十進小数表示を $1.a_1a_2\cdots$ とする．各項が 0 から 9 までの整数であるような数列 $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ と，自然数の（狭義）単調増加列 $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ が存在して，$(a_{n_k+1}, a_{n_k+2}, \cdots, a_{n_k+k}) = (b_1, b_2, \cdots, b_k)$ となることを示せ．
2. 実数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が収束することは，その任意の部分列が収束部分列を含むことと同値であることを示せ．
3. $\alpha \in \mathbb{R}$ が無理数ならば数列 $(n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ の小数部分は $[0,1]$ で稠密であることを示せ．
4. 正項級数 $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ が収束するならば，ある正の数列 $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ であって，$\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ かつ $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n < \infty$ となるものが存在することを示せ．
5. $\mathbb{R}$ 上の実数値関数であって，全ての空でない開区間で非有界なものは存在するか．
6. 区間 $[0,1]$ 上の実数値関数であって，全ての有理数の点で右極限と左極限が存在してかつ一致しないものは存在するか．
7. 区間 $[0,1]$ 上の実数値関数であって，全ての点で右極限と左極限が存在してかつ一致しないものは存在するか．
8. $\mathbb{R}$ 上の実数値関数であって，全ての無理数で連続で全ての有理数で不連続なものは存在するか．
9. $\mathbb{R}$ 上の実数値関数であって，全ての有理数で連続で全ての無理数で不連続なものは存在するか．
10. $\mathbb{R}$ 上の実数値関数 f が連続かつ c 以外では微分可能で $\lim_{t\to c} f'(t) = a$ であるならば，f は c でも微分可能で $f'(c) = a$ である．
11. $\mathbb{R}$ 上の実数値関数 f が点 a で微分可能とする．二つの正の数列 $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が全ての $m, n \in \mathbb{N}$ に対して $h_m \neq k_n$，かつ $\lim_{n\to\infty} h_n = \lim_{n\to\infty} k_n = 0$ を満たすとき，
    (a) $\lim_{n\to\infty} \frac{f(a+h_n)-f(a-k_n)}{h_n+k_n} = f'(a)$ は正しいか．
    (b) $\lim_{n\to\infty} \frac{f(a+h_n)-f(a+k_n)}{h_n-k_n} = f'(a)$ は正しいか．
12. $\mathbb{R}$ 上の実数値関数 f が各点 $a \in \mathbb{R}$ において次の条件を満たすとする：$\mathbb{R}$ 上の関数 g が存在して，任意の二つの数列 $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で，全ての $n \in \mathbb{N}$ に対して $h_n \neq k_n$ かつ $\lim_{n\to\infty} h_n = \lim_{n\to\infty} k_n = 0$ を満たすものに対して，$\lim_{n\to\infty} \frac{f(a+h_n)-f(a+k_n)}{h_n-k_n} = g(a)$ が成り立つ．このとき f は C^1 級であることを示せ．逆は成り立つか．
13. 区間 $[a,b]$ から $\mathbb{R}^2$ への関数 v は (a,b) で微分可能であるとする．このとき以下は成り立つか：
$$\text{ある } c \in [a,b] \text{ が存在して，} v(b) - v(a) = v'(c)(b-a).$$
14. 任意の実数列 $(a_n)_{n\geq 0}$ を $x = 0$ での Taylor 級数の係数として持つような実数値関数は存在するか．
15. 区間 $[0,1)$ の点 x の二進小数展開の，ある所から先の全ての桁が 1 とはならない方の表示を

$0.x_1x_2x_3\cdots$ とする．このとき集合

$$\left\{x \in [0,1)\colon \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{1}{2}\right\}$$

は Jordan 可測でないことを示せ．

16. 閉区間 $[a,b]$ 上の実数値関数 f が Riemann 積分可能であるための必要十分条件は，それが有界であってかつ，任意の $\varepsilon > 0$ と $n \in \mathbb{N}$ に対して集合

$$D_n = \left\{x \in [a,b]\colon \limsup_{y\to x} f(y) - \liminf_{y\to x} f(y) \geq \tfrac{1}{n}\right\}$$

を長さの総和が ε 以下であるような可算個の開区間で覆えることである．これを示せ．

17. 閉区間 $[a,b]$ 上の実数値関数 f が単調増加ならば Riemann 積分可能であることを示せ．
18. 閉区間 $[a,b]$ 上の実数値関数 f が Riemann 積分可能で全ての点で正の値をとるならば，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > 0$ であることを示せ．
19. 実数全体で定義された実数値関数で，区間 $[0,1]$ の全ての点で微分可能であるが，導関数が $[0,1]$ で Riemann 積分可能でないものは存在するか．
20. 実数全体で定義された実数値関数で，区間 $[0,1]$ の全ての点で微分可能かつ導関数は有界であるが，導関数が $[0,1]$ で Riemann 積分可能でないものは存在するか．
21. $\mathbb{R}^3$ で原点方向に原点からの距離の 2 乗に反比例する力を受けて運動する正の質量を持つ質点を考える．初期位置を $x \neq 0$ とし，初速度 $v \neq 0$ が x に平行でなく十分小さいならば，この質点の軌跡は楕円であることを示せ．