$0.999\cdots = 1$ の証明？

福島竜輝

$0.999\cdots = 1$ という等式を不思議に感じる人は少なくないようである．もちろん左辺の $0.999\cdots$ を小数第 n 位以下を切り捨てた有限小数からなる数列の極限だと解釈すれば証明は簡単である．

しかし極限と解釈することに抵抗を感じる人がいるせいか，初等的な数学の本 [1] に次のような“知的でエレガントな証明”が与えられていた：

> $x = 0.999\cdots$ とすると $10x = 9.99\cdots$ だから，差をとれば $10x - x = 9$ となる．両辺を 9 で割れば $x = 1$ とわかる．よって $0.999\cdots = 1$.

これは証明にはなっていないと思う．少なくともこんな簡単な話では済まないことは知っておいたほうがよいと思うので，どこが問題か考えてみる．

まず最初に認識すべきことは，高校までの数学で無限小数同士の四則演算を正式には扱っていないことである．有限小数の場合は下の桁から計算するルールになっていたが，それは無限小数には適用できない．するとおそらく有力な方針は無限小数を有限小数で近似して計算するということになるだろう．ただし近似の意味には注意が必要で，極限を自由に使うことはできない（それを許すならもっと簡単な証明があるのだから）．

そこであくまで有限小数による計算に限定して上の $10x - x = 9.99\cdots - 0.999\cdots$ の定義を考えるとすれば，

$$
\begin{gathered}
8.9 = 9.9 - 1 < 9.99\cdots - 0.999\cdots < 10 - 0.9 = 9.1 \\
8.99 = 9.99 - 1 < 9.99\cdots - 0.999\cdots < 10 - 0.99 = 9.01 \\
8.999 = 9.999 - 1 < 9.99\cdots - 0.999\cdots < 10 - 0.999 = 9.001 \\
\vdots
\end{gathered}
$$

のように不等式をたくさん作って，これらを元に $10x - x$ の十進小数表示を上の桁から順に決めていくということになるだろう．ところがこの手続きを続けて得られるのは

$$
8.999\cdots < 10x - x < 9.000\cdots
$$

であって，これから $10x - x = 9$ を結論するためには，$8.999\cdots = 9.000\cdots$ が必要になってしまう．しかしこれはほとんど証明すべきことそのものだったので，これを使うことは許されず，証明はここで破綻する．

念のためだが「だから $0.999\cdots = 1$ は極限の等式と解釈すべきなのだ」と主張するつもりはない．実際，十進無限小数による表示から出発して実数を構成する方法があり，その場合にはこれは単に定義として受け入れるのが標準的なのである[1]．

[1] `https://www.dpmms.cam.ac.uk/~wtg10/decimals.html`

参考文献

[1] Q.E.D.：知的でエレガントな数学的証明, Burkard Polster (著), 駒田 曜 (翻訳)，アルケミスト双書