ε-N 論法，ε-δ 論法について

福島竜輝

「ε-N 論法，ε-δ 論法」は大学一年生が微積分で最初に苦労するところと言われることが多い．その理由がはっきりわかるわけではないが，いくつか思うところはあるので，気休めのために小文を書いてみる．

まず ε-δ “論法”と呼ぶのはあまり良くないと思う[1]．これは単に極限の現代的な定義に過ぎないのに，こう呼ぶと極限には何らかの別の定義があって，新しい議**論**の方**法**を提供しているという誤解を生みかねない．定義というのはそれに従って議論しなければならない規則のようなものなので，議論の方法はむしろ狭められている．ただし狭めたお陰で，それに従う限り共通の基盤で議論できるようになり，数学ではそちらを重視するのである．

さて，定義だということを了解すると，どうして高校の数学から極限の定義が変わったのかと思うのは自然なことである．これは「高校での曖昧な定義を厳密にする」というそれ自体曖昧な説明で済まされることが多いが[2]，新しい定義が機能的に優れているという面も強調した方が良いと思う．とくに関数の一様連続性や一様収束などを学んでから，それらを高校で学んだ「限りなく近づく」という言葉で表現する方法を考えてみて，初めて新しい定義が新しい概念を記述するのに適した機能を持っていることがわかるのではないだろうか．大体において，定義というのは感覚的に受け入れやすいかより，それに基づいてどれだけ豊かな理論が展開できるかで良し悪しが決まるので，あまり急いで納得しようとしなくてもよいものである．微積分を一通り学び終えたときにようやく意義がわかるのが普通だと思う．

次に技術的で低級な話だが，定義の中で ε という特定の記号を使うことが混乱を招いているように感じることがある．具体的には

$$\text{任意の正の数 } \varepsilon > 0 \text{ に対して } \delta > 0 \text{ が存在して，} \\ |x-a| < \delta \text{ ならば } |f(x)-f(a)| < \varepsilon \text{ とできる}$$

という定義にしたがって何かを証明するときに

$$\varepsilon > 0 \text{ は任意なのだから } \delta > 0 \text{ を小さく} \\ \text{取り直せば } |f(x)-f(a)| < \varepsilon/2 \text{ とできる}$$

という議論を頻繁に使うが，定義では「$< \varepsilon$」なのにどうして「$< \varepsilon/2$」とできるのか，という疑問を持つ人がいる．「任意の」という言葉の意味を考えればわかる，と言ってしまうのは教える側にとっては簡単だが，日常生活で頻繁に使う言葉でもないので，気持ちはわからないでもない．そんな経緯で，定義の中で ε という特定の文字を使うのをやめてみたらどうなるか考えてみた．なお特定の文字 δ を使うことによる混乱もあるのだが，これはもう少し高級な問題になるので，後で触れる．

[1]ちなみに Google 検索で英語で表示される結果を見ると “epsilon-delta” の後に続くのは “definition” が圧倒的多数であり，“proof” がそれに次いで少しだけあり，“technique” はごく少数，“argument” は見当たらなかった．

[2]ここを敢えて追求するなら，数学において「曖昧でない」ことの一つの表現が「述語論理で記述されている」ことであるという原則を知っておく必要がある．高校での極限の定義は述語論理で記述されておらず，それをもって「曖昧な定義」と言っているのである．しかしこの説明が現代的な定義の理解に役立つかというと，それはかなり疑問である．

定義. $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ とは，どんな小さな正の数をとっても，それに応じて $\delta > 0$ を十分小さくとれば，$|x-a| < \delta$ となるすべての x に対して $|f(x) - f(a)|$ は初めにとった正の数より小さくできることをいう．

この定義にしたがって，

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \text{ かつ } \lim_{x\to a} g(x) = g(a) \text{ ならば } \lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = f(a) + g(a)$$

を証明しようとすると，以下のようになる．

Proof. 上の定義に従えば，証明すべきことは「どんな小さな正の数をとっても，それに応じて $\delta > 0$ を十分小さくとれば，$|x-a| < \delta$ となるすべての x に対して $|(f(x)+g(x)) - (f(a)+g(a))|$ は初めにとった正の数より小さくできる」である．そこで小さな正の数 $\varepsilon > 0$ をとろう．ここで $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ の定義は「どんな小さな正の数をとっても...」だったから，とくに $\varepsilon/2$ に対しても，$\delta(\varepsilon/2, f, a) > 0$ を十分小さくとれば，

$$|x-a| < \delta(\varepsilon/2, f, a) \text{ となるすべての } x \text{ に対して } |f(x) - f(a)| < \varepsilon/2 \tag{1}$$

とできる．ただし定義の $\delta > 0$ は $\varepsilon/2$ と関数 f，点 a に応じて決めるものなので，$\delta(\varepsilon/2, f, a)$ と書いた．同じように $\lim_{x\to a} g(x) = g(a)$ の仮定から，$\delta(\varepsilon/2, g, a)$ を十分小さくとれば，

$$|x-a| < \delta(\varepsilon/2, g, a) \text{ となるすべての } x \text{ に対して } |g(x) - g(a)| < \varepsilon/2 \tag{2}$$

とできる．そこで δ を $\delta(\varepsilon/2, f, a)$ と $\delta(\varepsilon/2, g, a)$ の小さい方とすれば，$|x-a| < \delta$ となる x に対しては (1), (2) の両方が使えるから，

$$\begin{aligned} |(f(x)+g(x)) - (f(a)+g(a))| &\le |f(x) - f(a)| + |g(x) - g(a)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

となる．以上の議論は最初の $\varepsilon > 0$ をどんなに小さくとっても可能であるから，「どんな小さな正の数 $(= \varepsilon)$ をとっても，それに応じて $\delta > 0$ を十分小さく（$= \min\{\delta(\varepsilon/2, f, a), \delta(\varepsilon/2, g, a)\}$ に）とれば，$|x-a| < \delta$ となるすべての x に対して $|(f(x)+g(x)) - (f(a)+g(a))|$ は初めにとった正の数 $(= \varepsilon)$ より小さくできる」ことが言えて，$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = f(a)+g(a)$ の定義が確かめられた． □

上のように定義で ε を使わないことにすると，$\varepsilon/2$ に対して定義を適用するときに心理的抵抗が少ないように思うが，どうだろうか．一方で，定義に ε を出さなくても，証明を書くときにはそういうものが自然に出てくることも感じられるのではないかと思う．

最後に文字 δ を定義の中で使うことだが，これも上のような証明において f と g に対して同じ δ を使ってしまうという誤りにつながることはよくある．では特定の文字 δ も定義に出てこないようにすれば良いかというと，こちらはそう簡単ではない．上で f と g に対して異なる δ をとることを $\delta(\varepsilon/2, f, a)$ と $\delta(\varepsilon/2, g, a)$ と表したが，このように依存関係を明確にすることは一様連続性や一様収束の理解には必要不可欠になる．例えば，上の証明における δ が a に依らずに $\delta(\varepsilon/2, f)$ と取れるというのが一様連続性である．そうすると，連続性や一様連続性の定義の δ はいつも何に依存して決まるかを明記するのが最も良いということになりそうだが，そのためには文字 ε が定義の中に登場しないと困る．というわけで，結局は教科書通りの ε も δ も出てくる定義に戻ってきてしまった．