# 不定積分について

福島竜輝

不定積分というのはよくわからない概念である．伝統があるから微積分の教科書から近い将来に消えることはないと思われるが，明らかに有害な点もあるのでそれを指摘しておくことには意味があるだろう．

まず初めに記号の問題がある．不定積分を通常 $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)$（積分定数は省略）と書くが，これは定積分における積分変数の扱いと真っ向から矛盾する．例えば Taylor の定理を使うときに誤って

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \tfrac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \tfrac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \int_0^x \tfrac{f^{(n)}(0)}{(n-1)!}(x-x)^{n-1}dx \\ &= f(0) + f'(0)x + \tfrac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \tfrac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} \end{aligned}$$

として「$n$ 階連続微分可能な関数は全て多項式である」という大定理（？）を証明してしまう間違いを見かけるが，これは不定積分の良くない記号を今でも使っていることが一因ではないかと思う．また，この記号に従うと $F(3) = \int f(3)\mathrm{d}3$ などという気持ち悪いことになる[1]．

次に定義の曖昧さの問題がある．高校数学の教科書では原始関数と不定積分が区別されていないように見えるが，一つの概念に二つの名前をつけているのだとしたら混乱を招くだけである．一方で大学で学ぶ微積分の教科書ではいろいろな流儀があって，例えば [1] では微積分学の基本定理の説明として Riemann 積分の上端を変数と見なすと原始関数になっていることを述べて，それが不定積分の定義であって「原始関数とは異なる」としている．つまり不定積分の定義は唯一ではないのだ．これはできれば避けた方がよいことであって，なぜ

$f$ が Riemann 積分可能のとき，その原始関数は Riemann 積分（＋定数）で求められる

で終わりにしないのかと思う．原始関数は曖昧さなく明確に定義されていて，例えば微分方程式の解を与える重要な概念で，それが定積分によって求まることは微積分学で最も重要な定理である．

ところで上に書いたことを見て，$f$ が Riemann 積分可能でないときに原始関数を求める方法はあるのか疑問に思う人もいるかもしれない．これは上の「定義は唯一ではない」に関連するので，少しだけ話を広げておこう．実は積分には Riemann 積分の他にもいくつか定義があって，不定〇〇積分の「〇〇」に何を入れるかによって定義が変わっている，という解釈もできる．この場合 [1] は不定 Riemann 積分を扱っていることになり，それが原始関数とは異なると言っているのである[2]．例えば大学の数学科で 3 年次くらいに学ぶ Lebesgue 積分を使って不定 Lebesgue 積分を考えれば，原始関数を求められる範囲は少し拡がる．さらに進んで，この解釈で高校の教科書の「原始関数＝不定積分」を正当化することも可能であるが，そうすると高校で習った積分は

[1] この書き方は $\int f(x)\mathrm{d}x$ が同値類であることをわかっている人にとっては，別の意味で馬鹿げているのだが，このノートはそこまでわかっている人を想定して書いていない．

[2] 実際に異なることを確かめるのは非自明だが，微分可能なのに導関数が Riemann 積分可能でない関数を作ればよいわけで，それは例えば $x^2 \sin \frac{1}{x^2}$ でよい．

Denjoy–Perron–Henstock–Kurzweil 積分という，極めて高度な（しかし欠点もあるので広く受け入れられてはいない）積分だった，という笑えない冗談ができる．

もちろんこれはただの冗談であり，事実ではない．その証拠に，高校の教科書では定積分を

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

と原始関数の端点の差で定義するときに「$f$ が連続ならば」という，おそらくその時点では誰にも意味のわからない条件をつけている．これは定積分が Riemann 積分であることを示唆していると考えるのが自然だろう[3]．この伏線は，大学で学ぶ微積分の一つのハイライトである「有界閉区間上の連続関数は Riemann 積分可能」という定理によって回収される．

## 参考文献

[1] 吹田信之，新保経彦，理工系の微分積分学，学術図書出版社

[3] Riemann 積分するのに連続性は必要ではないので，断言はできない．また Riemann 積分より弱い Bourbaki 流の積分という可能性も論理的にはあるが，これもまったく流行らないので，現実的にはないと言ってよいだろう．