扇形の弧長と面積の関係

福島竜輝

微積分において $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ を示すときに，高校の教科書などでは半径が 1 の扇形の面積が中心角（＝弧長）の半分であるという事実を使うが，これが問題視されることがあるらしい[1]．その根拠は，扇形の面積が弧長の半分と一致することを示すのに置換積分して三角関数の積分に帰着すると，上記の極限を使って求めた三角関数の微分を使うことになるので循環論法になるということである．しかしそれはやり方が悪いだけである．扇形の面積が弧長の半分であることは三角関数を使った置換積分など経由しなくても以下のように示せる．まず面積と弧長の表示を思い出しておく．扇形としては，$0<a<1$ に対して $x^2+y^2=1$ の $a\le x\le 1$ かつ $y\ge 0$ の部分に弧があるものを考えることにすると

$$
\begin{aligned}
(\text{扇形の面積}) &= \frac{1}{2}a\sqrt{1-a^2}+\int_a^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x,\\
(\text{扇形の弧長}) &= \int_a^1 \sqrt{1+\left(\sqrt{1-x^2}'\right)^2}\mathrm{d}x\\
&= \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

このうち扇形の面積に現れる積分を，部分積分を使って書き直すと

$$
\begin{aligned}
\int_a^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_a^1 x'\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x\\
&= \left[x\sqrt{1-x^2}\right]_a^1+\int_a^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\\
&= -a\sqrt{1-a^2}+\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x-\int_a^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

となる．広義積分を含んでいるが収束するので問題ない．これを整理すると，

$$
\frac{1}{2}a\sqrt{1-a^2}+\int_a^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x
$$

となって最初に述べた事実が証明された．

参考文献

[1] 森毅，新版 数学プレイ・マップ，ちくま学芸文庫

[1] 例えば [1] 所収の「微積分の七不思議」にその種の記述がある．森毅のことだから知的に高度な冗談という可能性は否定できず，このようなノートを書くこと自体が的外れかもしれない．しかし何も知らない高校生や大学生が本気にして「教科書に書いてあることが間違っているとは・・・」と数学嫌いになっても困るので，無粋を承知で書いている．