

ランダムウォークの滞在時間の同時分布と Laplace 原理への応用

福島 竜輝

京都大学数理解析研究所

確率論早春セミナー

2014 年 3 月 7 日

Laplace principle

Stirling の公式の一つの見方として

$$\begin{aligned}n! &= \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx \\&= n^n \int_0^{\infty} n e^{n(\log y - y)} dy \quad (x = ny \text{ と変換}) \\&\sim n^n \int_{1-\epsilon}^{1+\epsilon} n e^{n(\log y - y)} dy \\&\stackrel{\log}{\sim} n^n e^{-n}.\end{aligned}$$

二行目以降に見られるような大きなパラメータを持った指数関数の積分の漸近挙動が被積分関数の最大値付近の寄与で決まる現象は Laplace 原理と呼ばれている。

Large deviation

Definition

ある位相空間上の確率測度の族 $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が大偏差原理を満たすとは、ある下半連続関数 I が存在して任意の Borel 集合 B に対して

$$-\inf_{x \in B^\circ} I(x) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mu_n(B) \leq -\inf_{x \in \bar{B}} I(x)$$

を満たすことをいう. (標語的には $\mu_n(dx) \stackrel{\log}{\sim} e^{-nI(x)}$.)

Large deviation

Definition

ある位相空間上の確率測度の族 $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が大偏差原理を満たすとは、ある下半連続関数 I が存在して任意の Borel 集合 B に対して

$$-\inf_{x \in B^\circ} I(x) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mu_n(B) \leq -\inf_{x \in \bar{B}} I(x)$$

を満たすことをいう。(標語的には $\mu_n(dx) \stackrel{\log}{\sim} e^{-nI(x)}$.)

Theorem (Varadhan's lemma)

ある位相空間上で定義された確率測度の族 $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が大偏差原理を満たし、さらに $\{x : I(x) \leq L\}$ はすべての $L > 0$ に対してコンパクトであるとする。このとき任意の上の有界な連続関数 f に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \int e^{nf(x)} \mu_n(dx) = \sup \{f(x) - I(x)\}.$$

大偏差原理は Laplace 原理を抽象的な設定のもとで定式化するものでその理論も応用もよく研究されているが、とくに古くからある代表的なものを挙げると

1. 独立確率変数の場合とその統計物理モデルへの応用,
2. 力学系の微小なノイズによる摂動に関する Freidlin–Wentzell 理論,
3. Markov 過程の滞在時間に関する Donsker–Varadhan 理論.

今回のテーマは、この内でとくに Markov 過程の滞在時間に関する大偏差原理の応用において大偏差原理の位相に関わる部分が問題になることと、それを部分的に解決する結果を紹介することである。

Brown 運動の滞在時間に関する大偏差原理

$(\{B_s\}_{s \geq 0}, P_x)$ を $\mathbb{R}^d$ 上の x を出発点とする Brown 運動とし，滞在時間（測度）を

$$L_t(A) = \frac{1}{t} \int_0^t 1_{\{B_s \in A\}} ds$$

で定める．Feynman–Kac の公式により適当な仮定のもとで

$$\begin{aligned} & E_x [u_0(B_t) \exp \{t \langle V, L_t \rangle\}] \\ &= E_x \left[u_0(B_t) \exp \left\{ \int_0^t V(B_s) ds \right\} \right] \\ &= e^{t(\frac{1}{2}\Delta + V)} u_0(x) \\ &= \sum_{k \geq 1} e^{t\lambda_k} \langle u_0, \phi_k \rangle \phi_k(x) \stackrel{\log}{\sim} e^{t\lambda_1}. \end{aligned}$$

従って仮に $\nu_0 \equiv 1$ が許されるなら

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log E_x [\exp \{t \langle V, L_t \rangle\}] & (= \lambda_1) \\ & = \sup_{\|f\|_2=1} \left\{ \langle V, f^2 \rangle - \frac{1}{2} \|\nabla f\|_2^2 \right\}. \end{aligned}$$

これを $F(\nu) = \langle V, \nu \rangle$ に対して Laplace 原理を適用した結果と見なせば, $I(\nu) = \frac{1}{2} \|\nabla \sqrt{\nu}\|_2^2$ として $P_x(L_t \in d\nu) \stackrel{\log}{\sim} e^{-tI(\nu)}$ という大偏差原理が成り立ちそうに思える.

従って仮に $\nu_0 \equiv 1$ が許されるなら

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log E_x [\exp \{t \langle V, L_t \rangle\}] & (= \lambda_1) \\ &= \sup_{\|f\|_2=1} \left\{ \langle V, f^2 \rangle - \frac{1}{2} \|\nabla f\|_2^2 \right\}. \end{aligned}$$

これを $F(\nu) = \langle V, \nu \rangle$ に対して Laplace 原理を適用した結果と見なせば, $I(\nu) = \frac{1}{2} \|\nabla \sqrt{\nu}\|_2^2$ として $P_x(L_t \in d\nu) \stackrel{\log}{\sim} e^{-tI(\nu)}$ という大偏差原理が成り立ちそうに思える.

これはある意味で正しく, 実際に $P_x(L_t \in \cdot)$ は大偏差原理の定義で上からの評価をコンパクト集合に制限したもの (weak large deviation principle) を満たす. しかし weak LDP は Laplace 原理を導かない.

Wiener sausage の問題

Brown 運動に少し幅をつけた $W_t^r = \bigcup_{0 \leq s \leq t} \bar{B}(B_s, r)$ は Wiener sausage と呼ばれ，興味深い対象である．この指数モーメント $E_0[\exp\{-\kappa |W_t^r|\}]$ の漸近挙動を調べることは（数理論理からくる動機もあって）重要な問題であったが，Donsker–Varadhan は大偏差原理を用いて

$$E_0[\exp\{-\kappa |W_t^r|\}] \stackrel{\log}{\sim} \exp \left\{ -t^{\frac{d}{d+2}} \inf_U \{ \kappa |U| - \lambda_1(U) \} \right\}$$

を示した．

Laplace 原理を仮定して概要を述べると, Brownian scaling により

$$|W_t^r| \stackrel{(d)}{=} t^{d/(d+2)} |W_{t^{d/(d+2)}}^{rt^{-1/(d+2)}}| \quad \text{だから}$$

$$E_0[\exp\{-\kappa |W_t^r|\}]$$

$$= E_0[\exp\{-t^{\frac{d}{d+2}} \kappa |\text{supp}(L_{t^{d/(d+2)}} * 1_{\bar{B}(0, rt^{-1/(d+2)})})|\}]$$

$$\stackrel{\log}{\sim} \exp \left\{ -t^{\frac{d}{d+2}} \inf_{\|f\|_2=1} \left\{ \kappa |\text{supp}(f * 1_{\bar{B}(0, rt^{-1/(d+2)})})| + \frac{1}{2} \|\nabla f\|_2^2 \right\} \right\}$$

$$\stackrel{\log}{\sim} \exp \left\{ -t^{\frac{d}{d+2}} \inf_U \left\{ \kappa |U| + \inf_{\substack{\|f\|_2=1, \\ \text{supp} f \subset U}} \left\{ \frac{1}{2} \|\nabla f\|_2^2 \right\} \right\} \right\}$$

$$= \exp \left\{ -t^{\frac{d}{d+2}} \inf_U \{ \kappa |U| - \lambda_1(U) \} \right\}.$$

しかし厳密には次のような問題がある：

1. 滞在時間が weak LDP しか満たさないこと，
2. 汎関数 $\nu \mapsto |\text{supp}(\nu * 1_{\bar{B}(0, rt^{-1/(d+2)})})|$ の連続性．

しかし厳密には次のような問題がある：

1. 滞在時間が weak LDP しか満たさないこと，
2. 汎関数 $\nu \mapsto |\text{supp}(\nu * 1_{\bar{B}(0, rt^{-1/(d+2)})})|$ の連続性．

この内、一つ目は単に十分大きい torus に射影すれば解決する．
(実は lower bound は Laplace 原理を使わずにできるので upper bound が問題だが、射影すると Wiener sausage は小さくなる.)

しかし厳密には次のような問題がある：

1. 滞在時間が weak LDP しか満たさないこと，
2. 汎関数 $\nu \mapsto |\text{supp}(\nu * 1_{\bar{B}(0, rt^{-1/(d+2)})})|$ の連続性．

この内、一つ目は単に十分大きい torus に射影すれば解決する．
(実は lower bound は Laplace 原理を使わずにできるので upper bound が問題だが、射影すると Wiener sausage は小さくなる.)

二番目の問題は、大偏差原理の定義に現れる位相の問題であって、弱位相では連続性は期待できないのだが、Donsker–Varadhan は $L_{t^{d/(d+2)}} * 1_{\bar{B}(0, rt^{-1/(d+2)})}$ が density を持つことに注目して大偏差原理の位相を L^1 に強めることにより、この汎関数の下半連続性を示した．(ただしこの連続性のためにも torus に射影してコンパクト化することは必要.)

このように Markov 過程の滞在時間の**大偏差原理**は，応用上は case by case で対応せざるを得ない問題を含んでいる．これを部分的に解決するのが Brydges–van der Hofstad–König による滞在時間の同時密度関数の表示を用いた「**連続性を要求しない（が誤差項を伴う）Laplace 原理**」である．

記号の準備

Λ を高々可算の集合, $\{A_{x,y}\}_{x,y \in \Lambda}$ をその上の対称な連続時間 Markov chain $(\{X_s\}_{s \geq 0}, P_x)$ の generator とし, 滞在時間を

$$\ell_T(z) = \int_0^T 1_{\{X_s=z\}} ds$$

で定める. ℓ_T の z をパラメータとする同時分布を求めたい.

以下 $R \subset \Lambda$ は常に有限部分集合とする（あとで $X_{[0,T]}$ になる）。

- ▶ $\mathcal{M}_T(R) = \{\ell : R \rightarrow [0, \infty) : \sum_{x \in R} \ell(x) = T\}$
- ▶ $\mathcal{M}_T(R)$ 上の surface measure を σ_T とする：

$$\int_{\mathbb{R}^R} F(\ell) d\ell = \int_0^\infty dT \int_{\mathcal{M}_T} F(\ell) \sigma_T(d\ell)$$

- ▶ $\Lambda \times \Lambda$ 行列 M の $R \times R$ 小行列の (b, a) 余因子行列式を $\det_{a,b}^{(R)} M$ と表す。
- ▶ ∂_ℓ で対角成分が $\partial/\partial \ell(x)$ である対角行列を表す。

Theorem (Brydges–van der Hofstad–König 2007)

以上の設定のもとで、任意の有界可測な $F : \mathcal{M}_T \rightarrow \mathbb{R}$ に対して

$$E_a[F(\ell_T) : X_{[0,T]} = R, X_T = b] = \int_{\mathcal{M}_T(R)} F(\ell) \rho_{a,b}^{(R)}(\ell) \sigma_T(d\ell),$$

ただし $\ell \in \mathcal{M}_T(R)$ に対して

$$\rho_{a,b}^{(R)}(\ell) = \det_{a,b}^{(R)}(\partial_\ell - A) \int_{[0,2\pi]^R} e^{\sum_{x,y \in R} A_{x,y} \sqrt{\ell(x)} \sqrt{\ell(y)} e^{i(\theta_x - \theta_y)}} \frac{d\theta}{(2\pi)^{|R|}}.$$

大偏差原理のレート関数の類似で

$$I_A(\mu) = \inf_{\mu \in \mathcal{M}_1(\Lambda)} \left\{ \sum_{x,y \in \Lambda} \sqrt{\mu(x)} A_{x,y} \sqrt{\mu(y)} \right\}$$

と定める．いろいろとがんばってひょうかすると …

Proposition

$\ell \in \mathcal{M}_T(R)$ に対して

$$\rho_{a,b}^{(R)}(\ell) \leq e^{-T I_A(\ell/T)} \left(\prod_{x \in R \setminus \{a,b\}} \sqrt{\frac{T}{\ell(x)}} \right) \eta_R^{|R|-1} e^{|R|(1+(4\eta_R T)^{-1}) \sum_{x \neq y \in R} A_{x,y}}$$

ただし $\eta_R = 1 \vee \max_{x \in R} \sum_{y \in R \setminus \{x\}} A_{x,y}$

これから目的である Laplace 原理の類似が従う：

Corollary

任意の可測な $F : \mathcal{M}_T(R) \rightarrow \mathbb{R}$ に対して,

$$\begin{aligned} E_a[\exp \{TF(T^{-1}\ell_T)\} : X_{[0,T] \subset R}] \\ \leq \exp \left\{ T \sup_{\mu \in \mathcal{M}_1(R)} \{F(\mu) - I_A(\mu)\} \right. \\ \left. + |R| \log(\eta_R \sqrt{8e} T) + \log |R| + \frac{|R|}{4T} \right\}. \end{aligned}$$

Remark

誤差項 $\ll T$ のときにのみ有用な評価である. ... ということは *Wiener sausage* の問題には使えない ...

定理の証明について

基本方針は Laplace 変換の一致から分布の一致を導くということで、次の事実が鍵になる：

Λ が有限で $v \in \mathbb{C}^\Lambda$ が $\Re v \in (-\infty, 0)^\Lambda$ を満たすならば

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty E_a \left[e^{\langle v, \ell_T \rangle} : X_T = b \right] dT \\ &= \int_{[0, \infty)^\Lambda \times [0, 2\pi]^\Lambda} \left[\det_{a,b} (-\partial_\ell - A) e^{\langle v, \ell \rangle} \right] \\ & \quad e^{\sum_{x,y \in \Lambda} A_{x,y} \sqrt{\ell(x)} \sqrt{\ell(y)} e^{i(\theta_x - \theta_y)}} \frac{d\ell d\theta}{(2\pi)^{|\Lambda|}}. \end{aligned}$$

$V = \text{diag}\{v(x)\}_{x \in \Lambda}$ **とすると Feynman–Kac の公式により**

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty E_a \left[e^{\langle v, \ell_T \rangle} : X_T = b \right] dT \\ &= \int_0^\infty [e^{T(A+V)}]_{a,b} dT \\ &= (-A - V)_{a,b}^{-1} \end{aligned}$$

であり, Cramér の公式を使うと

$$(-A - V)_{a,b}^{-1} = \frac{\det_{a,b}(-A - V)}{\det(-A - V)}$$

と書けるが, ...

$v \in (-\infty, 0)^\Lambda$ のときは分母の $\det$ を Gauss 積分で

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\det(-A - V)} \\ &= \frac{1}{\pi^{|\Lambda|}} \int_{\mathbb{R}^\Lambda \times \mathbb{R}^\Lambda} e^{\sum_{x,y \in \Lambda} (A+V)_{x,y} (p_x + iq_x)(p_y - iq_y)} dp dq \\ &= \int_{[0, \infty)^\Lambda \times [0, 2\pi]^\Lambda} e^{\langle v, \ell \rangle} e^{\sum_{x,y \in \Lambda} A_{x,y} \sqrt{\ell(x)} \sqrt{\ell(y)} e^{i(\theta_x - \theta_y)}} \frac{d\ell d\theta}{(2\pi)^{|\Lambda|}} \end{aligned}$$

と書き直せる．さらにこれは解析接続によって $\Re v \in (-\infty, 0)^\Lambda$ ま
で拡張される．

$v \in (-\infty, 0)^\Lambda$ のときは分母の $\det$ を Gauss 積分で

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\det(-A - V)} \\ &= \frac{1}{\pi^{|\Lambda|}} \int_{\mathbb{R}^\Lambda \times \mathbb{R}^\Lambda} e^{\sum_{x,y \in \Lambda} (A+V)_{x,y} (p_x + iq_x)(p_y - iq_y)} dp dq \\ &= \int_{[0,\infty)^\Lambda \times [0,2\pi]^\Lambda} e^{\langle v, \ell \rangle} e^{\sum_{x,y \in \Lambda} A_{x,y} \sqrt{\ell(x)} \sqrt{\ell(y)} e^{i(\theta_x - \theta_y)}} \frac{d\ell d\theta}{(2\pi)^{|\Lambda|}} \end{aligned}$$

と書き直せる．さらにこれは解析接続によって $\Re v \in (-\infty, 0)^\Lambda$ ま
で拡張される．

これと分子をあわせて,

$$e^{\langle v, \ell \rangle} \det_{a,b}(-A - V) = \det_{a,b}(-\partial_\ell - A) e^{\langle v, \ell \rangle}$$

であることを使えば, 示したかった事実が分かる．

さて、 $v = \lambda + i\xi$ と書き直すと

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty E_a \left[e^{\langle \lambda + i\xi, \ell_T \rangle} : X_T = b \right] dT \\ &= \int_{[0, \infty)^\Lambda \times [0, 2\pi]^\Lambda} \left[\det_{a,b} (-\partial_\ell - A) e^{\langle \lambda + i\xi, \ell \rangle} \right] \\ & \quad e^{\sum_{x,y \in \Lambda} A_{x,y} \sqrt{\ell(x)} \sqrt{\ell(y)} e^{i(\theta_x - \theta_y)}} \frac{d\ell d\theta}{(2\pi)^{|\Lambda|}} \end{aligned}$$

となるが、さらに Fourier 係数をかけて ξ について積分することで $e^{\langle \lambda + i\xi, \ell \rangle}$ は $e^{\langle \lambda, \ell \rangle} \prod_{x \in \Lambda} f_x(\ell(x))$ ($f_x \in C_c^\infty(0, \infty)$) に置き換えても成立する。

すなわち $v \in (-\infty, 0)^\Lambda$, $f_x \in C_c^\infty(0, \infty)$ **ならば**

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\infty E_a \left[e^{\langle \lambda, \ell_T \rangle} \prod_{x \in \Lambda} f_x(\ell_T(x)) : X_T = b \right] dT \\
 &= \int_{[0, \infty)^\Lambda \times [0, 2\pi]^\Lambda} \left[\det_{a,b}(-\partial_\ell - A) e^{\langle \lambda, \ell \rangle} \prod_{x \in \Lambda} f_x(\ell(x)) \right] \\
 & \quad e^{\sum_{x,y \in \Lambda} A_{x,y} \sqrt{\ell(x)} \sqrt{\ell(y)} e^{i(\theta_x - \theta_y)}} \frac{d\ell d\theta}{(2\pi)^{|\Lambda|}} \\
 &= \int_{[0, \infty)^\Lambda \times [0, 2\pi]^\Lambda} e^{\langle \lambda, \ell \rangle} \prod_{x \in \Lambda} f_x(\ell(x)) \det_{a,b}(\partial_\ell - A) \\
 & \quad e^{\sum_{x,y \in \Lambda} A_{x,y} \sqrt{\ell(x)} \sqrt{\ell(y)} e^{i(\theta_x - \theta_y)}} \frac{d\ell d\theta}{(2\pi)^{|\Lambda|}}.
 \end{aligned}$$

$f_x \nearrow 1_{(0, \infty)}$ **とすると左辺では** $\{X_{[0, T]} = \Lambda\}$ **だけが生き残る**
ので ...

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty E_a \left[e^{\langle \lambda, \ell_T \rangle} : X_T = b, X_{[0,T]} = \Lambda \right] dT \\
&= \int_{[0,\infty)^\Lambda} e^{\langle \lambda, \ell \rangle} \rho_{a,b}(\ell) d\ell \\
&= \int_0^\infty dT \int_{\mathcal{M}_T(\Lambda)} e^{\langle \lambda, \ell \rangle} \rho_{a,b}(\ell) \sigma_T(d\ell).
\end{aligned}$$

これをまず T について Laplace 変換と見ると，ほとんど全ての $T > 0$ で

$$\begin{aligned}
& E_a \left[e^{\langle \lambda, \ell_T \rangle} : X_T = b, X_{[0,T]} = \Lambda \right] \\
&= \int_{\mathcal{M}_T(\Lambda)} e^{\langle \lambda, \ell \rangle} \rho_{a,b}(\ell) \sigma_T(d\ell).
\end{aligned}$$

両辺が T について連続なので実際には全ての $T > 0$ で成立する．

以上で Laplace 変換の一致が言えたので, $R = \Lambda$ のときに定理は示された. 一般の $R \subset \Lambda$ に対しては R から外へのジャンプを消した generator $A^{(R)}$ を考えれば, 同じ形を得られることが分かる.

Density の upper bound の証明について

B を A の対角成分を 0 にした行列とする．まず

$$\begin{aligned}\rho_{a,b}^{(R)}(\ell) &= \det_{a,b}^{(R)}(\partial_\ell - A) \int_{[0,2\pi]^R} e^{\sum_{x,y \in R} A_{x,y} \sqrt{\ell(x)} \sqrt{\ell(y)} e^{i(\theta_x - \theta_y)}} \frac{d\theta}{(2\pi)^{|R|}} \\ &= e^{\sum_{x \in R} A_{xx} \ell(x)} \det_{a,b}^{(R)}(\partial_\ell - B) \\ &\quad \int_{[0,2\pi]^R} e^{\sum_{x,y \in R} B_{x,y} \sqrt{\ell(x)} \sqrt{\ell(y)} e^{i(\theta_x - \theta_y)}} \frac{d\theta}{(2\pi)^{|R|}}.\end{aligned}$$

と書き直せることに注意．

Density の upper bound の証明について

B を A の対角成分を 0 にした行列とする．まず

$$\begin{aligned}\rho_{a,b}^{(R)}(\ell) &= \det_{a,b}^{(R)}(\partial_\ell - A) \int_{[0,2\pi]^R} e^{\sum_{x,y \in R} A_{x,y} \sqrt{\ell(x)} \sqrt{\ell(y)} e^{i(\theta_x - \theta_y)}} \frac{d\theta}{(2\pi)^{|R|}} \\ &= e^{\sum_{x \in R} A_{xx} \ell(x)} \det_{a,b}^{(R)}(\partial_\ell - B) \\ &\quad \int_{[0,2\pi]^R} e^{\sum_{x,y \in R} B_{x,y} \sqrt{\ell(x)} \sqrt{\ell(y)} e^{i(\theta_x - \theta_y)}} \frac{d\theta}{(2\pi)^{|R|}}.\end{aligned}$$

と書き直せることに注意．

鍵になるのは次の事実である：任意の $Q \subset R$ に対して，

$$0 \leq \partial_\ell^Q \int_{[0,2\pi]^R} e^{\sum_{x,y \in R} B_{x,y} \sqrt{\ell(x)} \sqrt{\ell(y)} e^{i(\theta_x - \theta_y)}} \frac{d\theta}{(2\pi)^{|R|}} \leq \partial_\ell^Q e^{\langle \sqrt{\ell}, B \sqrt{\ell} \rangle}.$$

これは指数関数を冪級数展開して

$$\begin{aligned}
 \text{中辺} &= \sum_{n \in \mathbb{Z}_+^{R \times R}} \frac{1}{n_{x,y}!} \partial_\ell^Q \left(\prod_{x,y} (B_{x,y} \sqrt{\ell(x)} \sqrt{\ell(y)})^{n_{x,y}} \right) \\
 &\quad \int_{[0,2\pi]^R} e^{i \sum_{x,y} n_{x,y} (\theta_x - \theta_y)} \frac{d\theta}{(2\pi)^{|R|}} \\
 &= \sum_{n \in \mathbb{Z}_+^{R \times R}} \frac{1}{n_{x,y}!} \partial_\ell^Q \left(\prod_{x,y} (B_{x,y} \sqrt{\ell(x)} \sqrt{\ell(y)})^{n_{x,y}} \right) \\
 &\quad \int_{[0,2\pi]^R} e^{i \sum_{x,y} n_x \theta_x} \frac{d\theta}{(2\pi)^{|R|}}
 \end{aligned}$$

$(n_x = \sum_y (n_{x,y} - n_{y,x}))$ で, θ 積分は $n_x = 0$ のものしか生き残らず, $\partial_\ell^Q(\cdots) \geq 0$ であることに注意すれば分かる.

あとはこれを使って

$$\begin{aligned} & \det_{a,b}^{(R)}(\partial_\ell - B) \int_{[0,2\pi]^R} e^{\sum_{x,y \in R} B_{x,y} \sqrt{\ell(x)} \sqrt{\ell(y)} e^{i(\theta_x - \theta_y)}} \frac{d\theta}{(2\pi)^{|R|}} \\ &= \sum_{Q \subset R \setminus \{a,b\}} \partial_\ell^Q \det_{a,b}^{(R \setminus Q)}(\partial_\ell - B) \int \dots \end{aligned}$$

の各項をがんばってひょうかしていく ...