

# ランダムポテンシャル中の拡散過程

福島 竜輝<sup>\*1</sup> (京都大学理学研究科)

一様な媒質においては熱の伝導は熱方程式  $\partial_t u = \kappa \Delta u$  に支配される。この方程式の解の存在, 一意性やその性質については古くから多くの研究がなされ, 現在ではよく理解されていると言ってよいだろう。一方で現実には存在する媒質は必ずしも均質とは限らず, 偶発的な不規則性を含んでいることが多い。そのような状況を実現する一つの方法は, 方程式の係数を確率場 (空間パラメータを持つ確率変数の族) にすることである。例えば拡散係数がランダムな場合:

$$\partial_t u(t, x) = \operatorname{div}(\kappa_\omega(x) \nabla u(t, x)), \quad (1)$$

移流項がランダムな場合:

$$\partial_t u(t, x) = \kappa \Delta u(t, x) + h_\omega(x) \cdot \nabla u(t, x), \quad (2)$$

またランダムな湧き出しや吸い込みがある場合:

$$\partial_t u(t, x) = \kappa \Delta u(t, x) + V_\omega(x) u(t, x) \quad (3)$$

となる。但し巨視的には一様に近い媒質を考えたいため, 確率場の分布は通常平行移動不変かつエルゴード的であることを仮定する。この内 1, 2 番目のモデルについては現在まで主に均質化 (homogenization) の観点から研究が行われており, 適当な条件の下で解の長時間挙動は“平均化された”定数係数熱方程式の解と同様に振る舞うことが示されている ([21, 20, 17] 参照)。但し均質化が起こることが典型的という訳ではなく, 特に (2) のモデルにおいては非常に奇妙なことも起こりえる。(離散空間の場合だが, 例えば [27] や [6].)

これに対して 3 番目のポテンシャル項がランダムな場合には, 解が空間中の狭い領域に局在しているという, 通常の熱方程式とは全く異なる長時間挙動が典型的に現れる。講演者はこの後者のモデルで特にポテンシャルが負の場合について主に研究を行ってきたので, 本稿ではこの場合について周辺の結果や講演者の貢献につ

---

<sup>\*1</sup> 日本学術振興会特別研究員 (PD)

いて述べる．なお一般に (3) は放物型 Anderson 模型と呼ばれており，正のポテンシャルに対しても詳細に研究されているが，その内容に言及する余裕はないので Gärtner–König による解説記事 [15] を参照されたい．また以下では負のポテンシャルのみを扱うため，方程式自体を

$$\partial_t u(t, x) = \kappa \Delta u(t, x) - V_\omega(x) u(t, x) \quad (4)$$

と書き直し  $V_\omega(x) \geq 0$  とする．

さて，このとき方程式 (4) の解は (緩い条件の下で) 非負有界な範囲では一意であり，Feynman–Kac 表現

$$u_\omega(t, x) = E_x \left[ \exp \left\{ - \int_0^t V_\omega(B_s) ds \right\} \right]$$

を持つことが知られている．ここで  $\{B_s\}_{s \geq 0}$  は  $-\kappa \Delta$  を生成作用素とする拡散過程—連続空間なら Brown 運動，離散空間ならランダムウォーク—とする．この右辺はポテンシャルの高さに比例した速さで死ぬ拡散過程が時刻  $t$  まで生存する確率と解釈できることから，このモデルの研究は trapping problem と呼ばれることもある．いずれにせよ，この表示によって放物型 Anderson 模型を表題のランダムポテンシャル中の拡散過程の問題と見て解析することができるようになるわけである．また，上記の“解が局在している”という現象にも，上の表現の右辺の期待値において主要な貢献をする path の終着点  $B_t$  が局在しているという確率論的解釈を与えることができる．(より確率論的かつ正確に言うと，trapping problem と見なして，生存しているように条件づけた拡散過程は局在するということ.)

## 1. 背景と略史

上記のような障害物に殺される拡散過程を最初に考えたのは Smoluchowski [28] であり，その動機は化学反応



において局所的な濃度の揺らぎがいわゆる質量作用の法則にどの程度影響を及ぼすかを理解することだったようである．例えば A 粒子が十分希薄で B 粒子が比較的重い場合に，A 粒子を拡散過程，B 粒子を障害物と考えると局所的には上のような記述が自然である．Smoluchowski 自身が扱った状況はこれとは異なるのでここではその詳細は省略するが，このモデルの一つの背景として化学反応における濃度の揺らぎの影響を理解するという目標があるということは注意しておきたい．

一方別の側面として,  $-\kappa\Delta + V_\omega$  のスペクトル理論との関わりも 1970 年代に Kac–Luttinger [16] によって指摘された. 具体的には連続空間で Brown 運動の代わりに Brownian bridge を考えると基本解  $p_\omega(t, x, x)$  の表現が得られ, その平均がいわゆる状態密度

$$\ell(d\lambda) := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{(2N)^d} \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{\lambda_k^\omega((-N, N)^d)}(d\lambda)$$

の Laplace 変換になっているということである. ここで  $\lambda_k^\omega(U)$  は  $-\kappa\Delta + V_\omega$  の  $U$  における  $k$  番目の Dirichlet 固有値を表す. この関係と Tauber 型定理を用いると, Brown 運動の生存確率の漸近挙動から Hamiltonian  $-\kappa\Delta + V_\omega$  の低エネルギー状態の分布を知ることができることになる.

歴史的には上記の Feynman–Kac 表現に対応する (劣) 拡散過程に関する研究は後者の視点から 1970 年代に活発になったようである. 特に離散空間で各点に Bernoulli 確率変数を配置した場合や, 連続空間で Poisson 点過程に従ってポテンシャルを配置した場合に Fukushima [9], Donsker–Varadhan [7], Pastur [22] 等によって, 媒質について平均を取った  $\mathbb{E}[u_\omega(t, x)]$  の長時間挙動が議論され, その応用として Lifshitz [18] が 1965 年に指摘したランダム Schrödinger 作用素の状態密度が基底付近で希薄になる現象が厳密に証明された (Nakao [19] 等).

その後 1990 年代に入って, 今度は trapping problem の立場から粒子の生存確率だけでなく時刻  $t$  まで生き残るように条件づけた時の粒子の挙動にも興味を持たれるようになり, Poisson 及び Bernoulli 媒質の場合に Schmock [26], Sznitman [30], Bolthausen [5], Povel [23] によって条件付き確率

$$\mathbb{P} \otimes P_0(\cdot \mid \text{時刻 } t \text{ まで生存})$$

のもとでは粒子が原点付近に局在することが示された. 更に Sznitman は媒質を固定した場合についても研究し, [31] で  $u_\omega(t, x)$  の長時間挙動を議論したのに続き [32, 35] で

$$P_0(\cdot \mid \text{時刻 } t \text{ まで生存})$$

のもとでは粒子が原点から遠く離れた小さな領域に局在するという, 上の媒質について平均を取った場合とは対照的な結果を示している.

その後の進展はやや散発的であるが, Albeverio–Bogachev 等による相関を持つ配置に関する研究 [1, 4], Biskup–König による独立同分布だが Bernoulli とは異なる分布の場合の研究 [3], 講演者と上木氏による格子をランダムに摂動したモデルの研究 [12, 14] などがある.

以下ではモデルが導入された年代の順に、媒質について平均を取った場合の主要な結果の概要を解説する。媒質を固定した場合についても様々な結果があるが、本稿では割愛する。興味のある方は [2, 36, 3, 13] などを参照されたい。

## 2. Poisson 媒質 (Light tail case)

ランダムポテンシャル  $V_\omega$  として最初に研究されたのは強度  $\nu > 0$  の Poisson 点過程 ( $\omega = \sum_i \delta_{\omega_i}, \mathbb{P}_\nu$ ) に従ってポテンシャルを配置した

$$V_\omega(x) = \sum_i W(x - \omega_i)$$

である。但し  $W$  は非負の可積分関数とする。なお Poisson 点過程とは

- (1)  $\mathbb{P}_\nu(\omega(A) = k) = \frac{(\nu|A|)^k}{k!} \exp\{-\nu|A|\}$ , (Poisson 分布)
- (2)  $\{A_i\}_{i=1}^n$  が非交叉ならば  $\{\omega(A_i)\}_{i=1}^n$  は独立,

を満たすランダムな点配置で、“完全にランダム” な点配置と考えられている基本的な対象である\*2。Donsker–Varadhan [7] は  $W$  が遠方で  $o(|x|^{-d-2})$  のように振る舞うときに、拡散方程式 (4) の解 (又は粒子の生存確率) の平均が

$$\mathbb{E}_\nu[u_\omega(t, 0)] = \exp\left\{-c_1(d, \nu, \kappa)t^{\frac{d}{d+2}}(1 + o(1))\right\} \quad \text{as } t \rightarrow \infty \quad (5)$$

なる長時間挙動を持つことを示した。ここで定数  $c_1(d, \nu, \kappa)$  は  $\lambda(U)$  を  $U$  上の  $-\Delta$  の Dirichlet 最小固有値として

$$c_1(d, \nu, \kappa) = \inf_U \{\kappa\lambda(U) + \nu|U|\} \quad (6)$$

と表される。この下限は Faber–Krahn の等周不等式によってある半径の球  $B(0, R_0(d, \nu, \kappa))$  で達成されることが分かるので、定数の値も求めることができる。また後に [8] で Bernoulli 媒質中のランダムウォークに対しても同じ結果が示されている。上の (5) において右辺が指数減衰より遥かに遅いことは興味深いが、実は下からの評価は簡単である。実際例えば  $W$  が台コンパクトの場合には  $U \subset \mathbb{R}^d$  に対して  $\{\omega(t^{1/(d+2)}U) = 0\} \cap \{B_{[0,t]} \subset t^{1/(d+2)}U\}$  が粒子が生存する (ほぼ) 十

---

\*2 一番目の条件は二番目に比べて自然でないように見えるかも知れないが、(2) と少しの技術的条件があると (粗っぽく言って) Poisson の少数の法則から (1) が従う。

分条件になっていることから

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\nu[u_\omega(t, 0)] &\geq \mathbb{P}_\nu(\omega(t^{1/(d+2)}U) = 0)P_0(B_{[0,t]} \subset t^{1/(d+2)}U) \\ &= \exp \left\{ -t^{\frac{d}{d+2}}(\nu|U| + \kappa\lambda(U) + o(1)) \right\} \quad \text{as } t \rightarrow \infty\end{aligned}$$

が分かるので後は右辺を最大にする  $U$  をとればよい. ここで  $P_0(\cdots)$  は Feynman–Kac の公式により Dirichlet 条件付き熱方程式の解であり, その漸近挙動は最小固有値で評価できることを使っている. 上からの評価については, 結果から分かるように最適戦略のみが漸近挙動に貢献していることを示すことになるが, Donsker–Varadhan は Brown 運動の経験分布に対する大偏差原理を用いていわゆる Laplace 原理のような形でこれを証明した<sup>\*3</sup>. なおこの結果は Brownian bridge に対しても同じ形で成立し, そのことを用いて Nakao [19] は状態密度が基底状態エネルギー付近で指数的に希薄になっている現象

$$\log \ell([0, \lambda]) \sim -\nu\kappa|B(0, 1)|\lambda(B(0, 1))^{d/2}\lambda^{-d/2} \quad \text{as } \lambda \rightarrow 0 \quad (7)$$

(Lifshitz tail effect) を示した.

さて, Donsker–Varadhan の証明が最適戦略のみが漸近挙動に貢献していることを示す形で実行されたことは, 次のような現象を暗示する:

生存している粒子だけに着目すると, その大多数は最適戦略に従っている.

(言い換えると最適戦略をとった粒子だけが生存できる.)

これは具体的には条件付き確率  $Q_t(\cdot) = \mathbb{P} \otimes P_0(\cdot | \text{時刻 } t \text{ まで生存})$  のもとでの粒子の挙動を見ることに相当し, Schmock [26](1 次元 Brown 運動), Sznitman [30](2 次元 Brown 運動), Bolthausen [5](2 次元ランダムウォーク), Povel [23](3 次元以上の Brown 運動) によって, 以下のように予想よりも強い形で証明された:  $\delta(t) \rightarrow 0$  ( $t \rightarrow \infty$ ) と可測写像  $D_t: \Omega \rightarrow B(0, R_0 + \delta(t))$  が存在して  $t \rightarrow \infty$  で,

$$Q_t \left( B_{[0,t]} \subset t^{\frac{1}{d+2}} B(D_t(\omega), R_0 + \delta(t)) \right) \rightarrow 1.$$

さらに Sznitman, Povel は  $t^{-1/(d+2)}B_{[0,t^{2/(d+2)}]}$  がランダムな中心を持つ球の中に留まるように条件づけられた Brown 運動に法則収束することも示している. 上の結果は通常の Brown 運動に対する  $\sup_{0 \leq s \leq t} |B_s| = O(\sqrt{t})$  との対比から局在と見なすことができるが, 通常の意味 ( $t^{-1/(d+2)}$ -scaling した process が tight など) よりも強い主張であることから “confinement property” と呼ばれている.

---

<sup>\*3</sup> この部分の議論はランダムウォークの場合の方が分かり易い. 第 5 節でもう少し一般の場合に概要を述べるのでそちらを参照.

このように粒子が狭い領域に局在している状況では、軌道がその領域を埋め尽くしていると想像するのは自然であり、実際 2 次元の場合の証明は本質的に上の局在を示した論文に含まれている。(1 次元の場合はほとんど自明.) 一方 3 次元以上の場合は異なる議論が必要であり、自然な被覆時間の評価とあわせて最近講演者が確かめた [10, 11].

### 3. Poisson 媒質 (Heavy tail case)

Donsker–Varadhan は lower bound の証明においてのみ  $W(x) = o(|x|^{-d-2})$  を仮定しているが、論文の中で「この条件は必要と思われる」と述べている。つまり遠方でより遅く減衰する  $W$  に対しては彼らの upper bound は最良ではないということである。これはすぐに Pastur [22] によって以下のような形で確かめられた： $W(x) \sim c_0|x|^{-\alpha}$  ( $d < \alpha < d+2$ ) の場合

$$\mathbb{E}_\nu[u_\omega(t, 0)] = \exp \left\{ -c_2(d, \nu) t^{\frac{d}{\alpha}} (1 + o(1)) \right\} \quad \text{as } t \rightarrow \infty, \quad (8)$$

$$c_2(d, \nu) = \nu c_0^{d/\alpha} |B(0, 1)| \Gamma\left(\frac{\alpha-d}{\alpha}\right).$$

この場合の定数  $c_2(d, \nu)$  は  $\kappa$  に依存していない。実際に上の漸近挙動は Brown 運動とは関係ない  $\mathbb{E}_\nu[\exp\{-tV_\omega(0)\}]$  のそれと一致することも分かる。感覚的には太い tail のせいで  $V_\omega \approx 0$  となる領域を作ることが難しくなり、 $\mathbb{E}_\nu[\exp\{-t \inf_{B(0,t)} V_\omega\}]$  のようなものが漸近挙動の主要項を支配してしまうということである。Pastur(を含むランダム作用素の研究者達) はここから導かれる状態密度の漸近挙動

$$\log \ell([0, \lambda]) \sim -\frac{\alpha-d}{d} \left( \nu \frac{d}{\alpha} |B(0, 1)| \Gamma\left(\frac{\alpha-d}{\alpha}\right) \right)^{\frac{\alpha}{\alpha-d}} \left( \frac{\lambda}{c_0} \right)^{-\frac{d}{\alpha-d}} \quad \text{as } \lambda \rightarrow 0$$

に興味があったため、量子効果を現す  $-\kappa\Delta$  が関与していないという意味で “classical” と呼んだが、それ以上には興味を持たなかったように思われる。

しかしランダムポテンシャルが Brown 運動の挙動にどう影響するかという問題に対しては、上の結果は主要項からはそれが読み取れないということしか教えない。そこでより高次の項を見ることが必要になるが、これは最近になって König と講演者によって  $W(x) = |x|^{-\alpha} \wedge 1$  の場合には、以下のように解決された：

$$\frac{\mathbb{E}_\nu[u_\omega(t, 0)]}{\mathbb{E}_\nu[\exp\{-tV_\omega(0)\}]} = \exp \left\{ -c_3(d, \nu, \kappa) t^{\frac{\alpha+d-2}{2\alpha}} (1 + o(1)) \right\} \quad \text{as } t \rightarrow \infty, \quad (9)$$

$$c_3(d, \nu, \kappa) = \inf_{\|\phi\|_2=1} \left\{ \int \kappa |\nabla \phi(x)|^2 + C_\alpha |x|^2 \phi(x)^2 dx \right\}$$

ここで (8) の右辺ではなく  $\mathbb{E}_\nu[\exp\{-tV_\omega(0)\}]$  で割るのは空間一様な killing を直接表す量で割らないと “正しい剰余項” が捉えられないからである．なおこの証明の過程から, Brown 運動が  $\sup_{0 \leq s \leq t} |B_s| = O(t^{\frac{\alpha-d+2}{4\alpha}})$  なるスケールで局在していることも分かるのだが, それには少し議論に立ち入る必要があるので, 以下で議論の概要を述べる.

Brown 運動の経験分布を  $L_t = t^{-1} \int_0^t \delta_{B_s} ds$  と書くことにすると  $V_\omega(x) = \int W(x-y) \omega(dy)$  と合わせて

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\nu[u_\omega(t, 0)] &= \mathbb{E}_\nu \otimes E_0 \left[ \exp \left\{ - \int_0^t V_\omega(B_s) ds \right\} \right] \\ &= \mathbb{E}_\nu \otimes E_0 \left[ \exp \left\{ -t \int \int W(x-y) L_t(dx) \omega(dy) \right\} \right] \end{aligned}$$

と書き直すことができる<sup>\*4</sup>. ここで簡単のため  $W(x) = |x|^{-\alpha}$ ,  $\nu = 1$  として, Poisson 点過程の Laplace 汎関数の表示を用いることにより, (9) の左辺は

$$\begin{aligned} &E_0 \left[ \exp \left\{ - \int \left( e^{-t|y|^{-\alpha}} - \exp \left\{ -t \int |x-y|^{-\alpha} L_t(dx) \right\} \right) dy \right\} \right] \\ &= E_0 \left[ \exp \left\{ - \int e^{-t|y|^{-\alpha}} \left( 1 - \exp \left\{ -t \int (|y-x|^{-\alpha} - |y|^{-\alpha}) L_t(dx) \right\} \right) dy \right\} \right] \end{aligned}$$

となることが分かり, さらにどのような  $x, y$  が主に積分値に寄与するかを考えることにより, 内側の  $\{\dots\}$  は小さいことが示せるので,

$$\begin{aligned} (\dots) &\sim t \int (|y-x|^{-\alpha} - |y|^{-\alpha}) L_t(dx) \\ &\sim t \int \left( (x, W'(y)) + \frac{1}{2} (x, W''(y)x) \right) L_t(dx). \end{aligned}$$

2行目は Taylor の定理であるが, 第2項まで残したのは第1項が  $e^{-t|y|^{-\alpha}} dy$  で積分すると消えてしまうからである. さらに Fubini の定理,  $y$  積分を実行, Brownian

---

<sup>\*4</sup> 以下 (10) の1行目を得るまでの議論の詳細はそれほど重要ではないので, とばしてよい. 粒子の挙動を知るために重要なことは (9) の右辺が経験分布の関数としてどのように表されるかを知ることである.

scaling ( $x = r\xi$ ) と進めると

$$\begin{aligned}
(9) \text{ の左辺} &\sim E_0 \left[ \exp \left\{ -t \int \frac{1}{2} \left( x, \int W''(y) e^{-t|y|^{-\alpha}} dy x \right) L_t(dx) \right\} \right] \\
&\sim E_0 \left[ \exp \left\{ -t^{\frac{d-2}{\alpha}} \int C_\alpha |x|^2 L_t(dx) \right\} \right] \\
&\sim E_0 \left[ \exp \left\{ -t^{\frac{d-2}{\alpha}} r^2 \int C_\alpha |\xi|^2 L_{tr^{-2}}(d\xi) \right\} \right]
\end{aligned} \tag{10}$$

を得る．ここで Donsker–Varadhan の大偏差原理を使えば上は

$$\exp \left\{ - \inf_{\|\phi\|_2=1} \left\{ \int tr^{-2} \kappa |\nabla \phi(x)|^2 + t^{\frac{d-2}{\alpha}} r^2 C_\alpha |x|^2 \phi(x)^2 dx \right\} \right\}$$

と漸近的に同値になることが分かり、この変分問題が非自明になる  $r = t^{\frac{\alpha-d+2}{4\alpha}}$  が Brown 運動が留まるべきスケールであることが分かる．以上の議論からは、Brown 運動の局在のスケールだけでなく、そのスケールではポテンシャルは (局所的に) 二次関数のように見えているということまで分かる．このことから台コンパクトの場合と同様にスケーリングした確率過程の挙動を考えれば Ornstein-Uhlenbeck 過程に法則収束することが予想されるが、これについては現在確認を進めているところである．

#### 4. Poisson 媒質の周辺モデル

連続空間で Poisson 媒質と異なるものを最初に扱ったのは、Sznitman [33] による Poisson 点過程に有限距離の 2 点相互作用を付与した Gibbs 型点過程 (Ruelle [25] 参照) の場合の研究である．そこでは台コンパクトかつ高さが無限大のポテンシャル\*5のみが扱われているが、結果としては Poisson 点過程の強度を Gibbs 型点過程の圧力  $p$  で置き換えればよいことが示されている：

$$\mathbb{E}[u_\omega(t, 0)] = \exp \left\{ -c_1(d, p) t^{\frac{d}{d+2}} (1 + o(1)) \right\} \quad \text{as } t \rightarrow \infty.$$

ただしこの論文では nonoverlapping traps が主な興味の対象だったことと技術的な理由から、少なくとも局所的には反発的な相互作用だけが考察されている．特に相互作用が純粹に反発的な場合には  $p$  が密度 (=単位体積あたりの平均粒子数) よりも大きくなることが分かるので、Poisson 媒質の場合よりも右辺は速く減衰する．

---

\*5 ポテンシャルの台に触れた Brown 運動は即死すること．



一方で吸引力的な相互作用を持つモデルとして Albeverio–Bogachev [1] は Poisson cluster 過程と呼ばれる対象に上と同様のポテンシャルを付与した場合を研究した. これは Poisson 点過程の各点  $\omega_i$  にクラスターと呼ばれるランダムな有限点集合  $\{Y_j^{(i)} \in \mathbb{R}^d : 1 \leq j \leq N^{(i)}\}$  を配置して得られる点過程で, 作り方から凝集しやすい性質を持っているので吸引力的な相互作用を持つモデルと考えられるが, 実際然るべき意味でこの点過程が吸引力的であることも示されている. さて, [1] の主結果は Poisson 点過程の強度を用いて

$$\mathbb{E}[u_\omega(t, 0)] = \exp \left\{ -c_1(d, \nu) t^{\frac{d}{d+2}} (1 + o(1)) \right\} \quad \text{as } t \rightarrow \infty.$$

と表せる. これは一見 Poisson 点過程の場合と同じに見えるが, cluster の平均粒子数だけ密度が上がっていることに注意すると同じ密度では減衰が遅くなっている.

上記のような点過程の相関が Brown 運動の生存確率に及ぼす影響については, 物理の文献では古くから問題とされていたが ([1] の文献参照) 数学的には Bogachev 等 [4] により定式化が行われ, 一般に

$$\mathbb{E}_{\text{rep}}[u_\omega(t, 0)] < \mathbb{E}_{\text{nc}}[u_\omega(t, 0)] < \mathbb{E}_{\text{atr}}[u_\omega(t, 0)]$$

(左から順に repulsive, non-correlated, attractive) となることが示された. 但しこの結果からは  $\log \mathbb{E}[u_\omega(t, 0)]$  の主要項が異なることまでは結論できないことには注意すべきである. 従ってこの一般論は, Poisson 点過程との比較に限っても前の二つの結果よりも弱い主張である.

更に  $\log \mathbb{E}[u_\omega(t, 0)]$  の主要項の変化を問題にするならば, Sznitman の扱った Gibbs 点過程, Poisson cluster 過程ともに  $t$  の冪 (trapping 指数と呼ばれる) は変化していないことから, Poisson 点過程と大きくは離れていないと言える.

## 5. Biskup–König の独立同分布モデル

離散空間  $\mathbb{Z}^d$  のモデルについては, 第 2 節で述べたように Bernoulli 媒質の場合は Donsker–Varadhan [8], Antal [2] によって研究されているが, Biskup–König [3] により一般的な独立同分布の場合も考察された. 彼らが扱った範疇で最も代表的で興味深い状況は各点におけるポテンシャルの高さが, ある  $\gamma > 0$  に対して

$$\mathbb{P}_\gamma(V_\omega(0) < v) \sim \exp\{-v^{-\gamma}/\gamma\} \quad \text{as } v \rightarrow 0$$

のように振る舞う場合である. このとき  $V_\omega(x)$  はいくらでも 0 に近づき得るがその確率は極めて小さい. その意味で heavy tailed Poissonian potential の場合に似て

いるようにも見えるが, この場合は主要項は “classical” ではなく

$$\mathbb{E}_\gamma[u_\omega(t, 0)] = \exp \left\{ -c_4(d, \gamma, \kappa) t^{\frac{d+2\gamma}{d+2+2\gamma}} (1 + o(1)) \right\} \quad (t \rightarrow \infty) \quad (11)$$

$$c_4(d, \gamma, \kappa) = \inf_{\|\phi\|_2=1} \left\{ \int \kappa |\nabla \phi(x)|^2 + 2\phi(x)^{\frac{2\gamma}{1+\gamma}} dx \right\} \quad (12)$$

となることが示されている\*6. 特にこのモデルでは trapping 指数が  $[\frac{d}{d+2}, 1)$  の間で変化することは, これまでのモデルとは対照的である. また対応して状態密度が

$$\begin{aligned} \log \ell([0, \lambda]) &\sim \\ &- \frac{2(d+2\gamma)^{\frac{d}{2}+\gamma}}{(d+2\gamma+2)^{\frac{d}{2}+\gamma+1}} c_4(d, \gamma, \kappa)^{\frac{d}{2}+\gamma+1} \lambda^{-\frac{d}{2}-\gamma} \quad \text{as } \lambda \rightarrow 0, \end{aligned}$$

のように振る舞うことも示されている.

この結果の証明は非常に粗っぽく言うと以下のような道筋で行われる. まず簡単な計算 (有限区間の Laplace 原理) で

$$\mathbb{E}_\gamma[\exp\{-tV_\omega(0)\}] = \exp \left\{ -2t^{\frac{\gamma}{\gamma+1}} (1 + o(1)) \right\} \quad \text{as } t \rightarrow \infty$$

が分かる. これと, ランダムウォークの経験分布  $L_t = t^{-1} \int_0^t \delta_{B_s} ds$  を用いて

$$\int_0^t V_\omega(B_s) ds = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} t L_t(x) V_\omega(x)$$

と書けることを使うと,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\gamma[u_\omega(t, 0)] &= \mathbb{E}_\gamma \otimes E_0 \left[ \exp \left\{ -t \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} L_t(x) V_\omega(x) \right\} \right] \\ &= E_0 \left[ \prod_{x \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{E}_\gamma [\exp \{-t L_t(x) V_\omega(x)\}] \right] \\ &= E_0 \left[ \exp \left\{ - \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} (t L_t(x))^{\frac{\gamma}{\gamma+1}} (1 + o(1)) \right\} \right]. \end{aligned}$$

ここで Donsker–Varadhan の大偏差原理を使えば

$$\log \mathbb{E}_\gamma[u_\omega(t, 0)] \sim - \inf_{\|\phi\|_2=1} \left\{ t \int \kappa |\nabla \phi(x)|^2 + 2(t\phi(x)^2)^{\frac{\gamma}{1+\gamma}} dx \right\}$$

---

\*6  $c_4 \neq 0, \infty$  でないと (11) は意味を持たないが, この事実は見た目ほど自明ではない. 実際 (12) において  $\phi$  の冪を 2 よりも大きいものに取り替えると下限は 0 になる.

となって,  $r = t^{\frac{1}{d+2+2\gamma}}$  において  $\phi(x)$  を  $r^{-d/2}\phi(x/r)$  で置き換えれば結論が従う.

ここで述べた結果は  $\gamma = 0$  とすることで Bernoulli 媒質の場合を含んでいると見なすことができるが,  $\gamma > 0$  の場合には上の変分問題に関する情報が不足しているために生存するように条件づけた粒子の挙動についてはよく分かっていない. (最近ミュンヘン工科大学の Schmidt によって minimizer の存在, 一意性及び対称性が示されたが, 条件付き過程の研究にはまだ少し定量的な評価が不足している.)

## 5. 格子点を揺動したモデル

前節の Biskup–König のモデルは離散空間における Bernoulli 媒質の一般化であったが, 講演者は最近 Poisson 点過程と本質的に異なる連続空間の配置として, 格子点をランダムに摂動した点配置 ( $\omega = \sum_{q \in \mathbb{Z}^d} \delta_{q+\omega_q}, \mathbb{P}_\theta$ ) を考察した. 但し各  $\omega_q$  の分布は独立同分布で

$$\mathbb{P}_\theta(\omega_q \in dx) \sim \exp\{-|x|^\theta\} dx \quad \text{as } |x| \rightarrow \infty$$

なるものとする. このモデルを考えた動機は 2 次元で  $\theta = 2$  のときにあるランダムな解析関数の零点集合の近似になっている (Sodin–Tsirelson [29] 参照) ことだったが, 物理的にも Frenkel 欠陥と呼ばれる格子欠陥のモデルを与える自然な対象である. このモデルについては講演者は部分的に上木氏と共同 [12, 14] で以下のような少し弱い漸近挙動を示した<sup>\*7</sup>:

(1)  $W$  が台コンパクトの場合:

$$\log \mathbb{E}_\theta[u_\omega(t, 0)] \asymp \begin{cases} -t^{\frac{2+\theta}{4+\theta}} (\log t)^{-\frac{\theta}{4+\theta}} & (d=2), \\ -t^{\frac{d+2\theta/d}{d+2+2\theta/d}} & (d \geq 3). \end{cases}$$

(2)  $W(x) \asymp |x|^{-\alpha}$  ( $\alpha > d+2$ ) の場合:

$$\log \mathbb{E}_\theta[u_\omega(t, 0)] \asymp \begin{cases} -t^{\frac{2+\theta}{4+\theta}} (\log t)^{-\frac{\theta}{4+\theta}} & (d=2), \\ -t^{\frac{d+2\theta\mu/d}{d+2+2\theta\mu/d}} & (d \geq 3). \end{cases}$$

ここで  $\mu = (\alpha - 2)/(\alpha - d)$ .

---

<sup>\*7</sup> 1 次元の場合は  $W(x) \asymp |x|^{-3}$  の場合を除いて定数まで分かるが, 色々な意味で特殊なので省略した. 結果は [14] 参照.

(3)  $W(x) \asymp |x|^{-d-2}$  の場合 :

$$\log \mathbb{E}_\theta[u_\omega(t, 0)] \asymp -t^{\frac{d+\theta}{d+2+\theta}} \quad (d \geq 2).$$

(4)  $W(x) \sim c_0|x|^{-\alpha}$  ( $d < \alpha < d+2$ ) の場合

$$\log \mathbb{E}_\theta[u_\omega(t, 0)] \sim -c_5(d, \theta)t^{\frac{d+\theta}{\alpha+\theta}} \quad (t \rightarrow \infty),$$

$$c_5(d, \theta) := \int_{\mathbb{R}^d} \inf_{y \in \mathbb{R}^d} \left( \frac{c_0}{|q+y|^\alpha} + |y|^\theta \right) dq.$$

但し  $f(t) \asymp g(t)$  は  $0 < \liminf_{t \rightarrow \infty} f(t)/g(t) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} f(t)/g(t) < \infty$  を表すものとする. 特に最後の heavy tail case 以外では Biskup–König のモデルと同様に trapping 指数が  $[\frac{d}{d+2}, 1)$  の範囲で変化する. 実は  $W(x) \asymp |x|^{-d-2}$  の場合以外は Laplace 原理を経由した証明ができているため, 変分問題の形でならば結果を  $\sim$  で書くこともできる. しかしその変分問題の中には時間に依存する部分が残ってしまい, 例えばその表示から上の結果を読み取ることすら容易ではないため, 上の形を結果として書いているのである.

とはいえ Poisson 媒質の時に見たように, 生存している粒子の挙動を調べるためには変分問題の解を知ることが必要になる. そこで, 以下で ( $W$  が台コンパクトの場合に限って) どこまで分かっているかの概要を述べておく. まず Laplace 原理を証明できるということは認めよう. すると下からの評価

$$\mathbb{E}_\theta[u_\omega(t, 0)] \geq \mathbb{P}_\theta(\omega(U) = 0)P_0(B_{[0,t]} \subset U)$$

を最大化するのが変分問題に他ならない. いま  $U$  に対する緩い regularity condition のもとで

$$\log \mathbb{P}_\theta(\omega(U) = 0) \sim - \int_U d(x, \partial U)^\theta dx \quad \text{as } |U| \rightarrow \infty$$

が成立するという事実<sup>\*8</sup> を用いると, 上の確率論的最大化問題は

$$\exp \left\{ - \inf_{U \in \mathcal{S}} \left\{ \lambda(U)t + \int_U d(x, \partial U)^\theta dx \right\} \right\}$$

と解析的な形に書き直すことができる. ここで  $\mathcal{S} = \{\mathbb{R}^d \setminus \text{supp } V_\omega\}_{\omega \in \Omega}$  は  $U$  がとりうる形の全体である<sup>\*9</sup>. さて, ここで仮に上の下限を汎関数が時間を陽に含まな

<sup>\*8</sup> この右辺が非常に irregular な関数であることがこの後で問題になるが, それ以前の Laplace 原理の証明においても Donsker–Varadhan の理論が使えないという障害をもたらした.

<sup>\*9</sup> これは厳密には正しくなく, 実際には Laplace 原理を証明する過程でもう少し制限されたクラスになっている.

いようにスケーリングしようとするなら  $r(t) = t^{\frac{1}{d+2+\theta}}$  として  $U$  を  $r(t)U$  で置き換えればよく, 結果は

$$t^{\frac{d+\theta}{d+2+\theta}} \inf_{U \in \mathcal{S}_{r(t)}} \left\{ \lambda(U) + \int_U d(x, \partial U)^\theta dx \right\} \quad (13)$$

となる. ここで  $\mathcal{S}_{r(t)} = \{r(t)^{-1}(\mathbb{R}^d \setminus \text{supp } V_\omega)\}_{\omega \in \Omega}$  であり, ここに時間への依存が陰に含まれている.

ところが, 実はこの変分問題は  $t \rightarrow \infty$  で 0 に収束してしまう. その証明は自明とは言えないが, アイデアは単純である. 上で注意した通り時間依存性は  $\mathcal{S}_{r(t)}$  にだけ含まれているが, これは  $t$  が大きくなるに従ってより複雑な形の  $U$  が取れることを意味する. ここで下限の中の第 2 項の積分は  $U$  として多くの小さな穴があいた領域を考えると著しく小さくできることに注意すると, 初めに  $U$  を大きくとって  $\lambda(U)$  を小さくし, 次に “Brown 運動からは見えない程度の密度” で小さな (半径  $r(t)$  程度の) 穴を空けることで  $\lambda(U)$  を小さく保ったまま第 2 項の積分も小さくすることができるのである.

この事実から分かることは (13) は正しい漸近挙動が見える形にはなっていないということである. 従って異なるスケーリングを考える必要があるが, 正しいスケールを見いだすためには  $\int_U d(x, \partial U)^\theta dx$  がどこまで小さくなり得るか, 言い換えると “Brown 運動からは見えない程度の密度” の上限を知ることが必要である. このような研究は Rauch–Taylor [24] によってなされており, 大雑把に言うと単位体積あたりに含まれる穴の Newton capacity が定数のオーダーになる密度が臨界であることが示されている. この事実をもとに少し計算すれば,

$$r(t) = \begin{cases} t^{\frac{1}{4+\theta}} (\log t)^{\frac{\theta}{8+2\theta}} & (d = 2), \\ t^{\frac{1}{d+2+2\theta/d}} & (d \geq 3), \end{cases}$$

が正しいスケールであることが推測でき, 実際にこのスケールで変換した変分問題

$$tr^{-2} \inf_{U \in \mathcal{S}_{r(t)}} \left\{ \lambda(U) + \frac{r(t)^{d+2+\theta}}{t} \int_U d(x, \partial U)^\theta dx \right\}$$

に現れる下限が  $t \rightarrow \infty$  において 0 からも  $\infty$  からも離れていることが示せる. これが結果の直後に述べた “時間に依存する変分問題” である. 従って例えばこれが  $t \rightarrow \infty$  である定数に収束することが示せれば, 最初に述べた結果を少し改良することができる. もちろんより重要な問題は, 下限を達成する  $U$  がどのような形をしているかということである. これが分かれば生存するように条件づけた粒子がどのよ

うな形の領域で生き残っているかを推測することができる。これらはもはや確率論の問題ではなく解析の問題であり、更にこのように時間に強く依存した変分問題に関する研究はあまり見当たらないが、せめて下限を達成する  $U$  が有界であることぐらいは確かめておきたいと考えている。

## 6. 今後の課題

最後にいくつか今後の課題として考えられるものを挙げておく。まず第4, 5節で扱った Poisson 媒質から離れた例では、いずれも trapping 指数が  $[\frac{d}{d+2}, 1)$  の間にあった。特に Biskup–König の結果は独立同分布の高さを持つポテンシャルではその間にしかないことまで言っているので、この範囲に収まらない指数が現れるモデルが存在するかどうかは興味ある問題と思われる。Bogachev 等の結果により、原理的に点同士が吸引力的な相互作用を持つ点過程か、少なくともそういう要素を含むものを考えなくてはならないことは分かる。しかし、かなり強い相関を持つものを考えなくてはいけないことが予想され、すぐに例が作れるようなものではなさそうである。ちなみに1次元の場合だけは Poisson 点過程を一般化した renewal process を用いて  $(0, 1)$  区間の任意の値を trapping 指数に持つ例を作ることができるので、問題は高次元の場合である。

次により古くからある問題として、(定数)ドリフト付きの Brown 運動  $B_t + ht$  を考えるという問題がある。これは物理的には不規則媒質中での輸送現象と関わる重要な問題であるが、数学的にも Poisson 媒質の場合にはドリフトの強さに応じて相転移が起きることが示されている。現在分かっているのは、例えば  $d \geq 2$  で  $W$  が台コンパクトかつ原点について回転対称な場合にはある  $h_c > 0$  が存在して、生存するように条件づけた確率測度のもとで粒子の最長不倒が

$$\sup_{0 \leq s \leq t} |B_t + ht| \begin{cases} \asymp t & \text{if } |h| > h_c, \\ = o(t^{\frac{d}{d+2}}) & \text{if } |h| < h_c, \end{cases}$$

のように振る舞うということである<sup>\*10</sup>。この内、特に後者は単に技術的な理由でここまでしかできていないだけで、例えばドリフトが非常に小さいときにはドリフトなしの場合と同じ  $O(t^{\frac{1}{d+2}})$  のオーダーであると思われるが、この問題は [34] 以来長い間進展がない難問である。なお前者については、 $t$  の係数がある変分問題の minimizer の集合 ( $\neq \emptyset$ ) に集中していることは分かっている、もし minimizer が一

<sup>\*10</sup> 実はこれ以前に生存確率の長時間挙動にも相転移が観察されるのだが、感覚的に分かり易いものではないので省略した。

点ならば大数の法則が言える．問題はその変分問題が

Brown 運動が Poisson 媒質を横切るときの生存確率

$$= \mathbb{E}_\nu \otimes E_0 \left[ \exp \left\{ - \int_0^{H_{B(y,1)}} V_\omega(B_s) ds \right\} \right]$$

の  $y \rightarrow \infty$  での減衰レートを測る Lyapunov 指数と呼ばれる明示的でない量で記述されていることであり，従って上記の確率の挙動を詳しく調べるのが解決につながるはずである．

## 参考文献

- [1] S. Albeverio and L. V. Bogachev. Brownian survival in a clusterized trapping medium. *Rev. Math. Phys.*, 10(2):147–189, 1998.
- [2] P. Antal. Enlargement of obstacles for the simple random walk. *Ann. Probab.*, 23(3):1061–1101, 1995.
- [3] M. Biskup and W. König. Long-time tails in the parabolic Anderson model with bounded potential. *Ann. Probab.*, 29(2):636–682, 2001.
- [4] L. V. Bogachev, S. A. Molchanov, Y. A. Makhnovskii, and A. M. Berezhkovskii. Correlation effects in the trapping problem: general approach and rigorous results. In *Stochastic processes, physics and geometry: new interplays, II (Leipzig, 1999)*, volume 29 of *CMS Conf. Proc.*, pages 29–42. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.
- [5] E. Bolthausen. Localization of a two-dimensional random walk with an attractive path interaction. *Ann. Probab.*, 22(2):875–918, 1994.
- [6] E. Bolthausen, A.-S. Sznitman, and O. Zeitouni. Cut points and diffusive random walks in random environment. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 39(3):527–555, 2003.
- [7] M. D. Donsker and S. R. S. Varadhan. Asymptotics for the Wiener sausage. *Comm. Pure Appl. Math.*, 28(4):525–565, 1975.
- [8] M. D. Donsker and S. R. S. Varadhan. On the number of distinct sites visited by a random walk. *Comm. Pure Appl. Math.*, 32(6):721–747, 1979.
- [9] M. Fukushima. On the spectral distribution of a disordered system and the range of a random walk. *Osaka J. Math.*, 11:73–85, 1974.

- [10] R. Fukushima. Asymptotics for the Wiener sausage among Poissonian obstacles. *J. Stat. Phys.*, 133(4):639–657, 2008.
- [11] R. Fukushima. Replica overlap and covering time for the Wiener sausages among Poissonian obstacles. *J. Math. Kyoto Univ.*, 48(2):455–470, 2008.
- [12] R. Fukushima. Brownian survival and Lifshitz tail in perturbed lattice disorder. *J. Funct. Anal.*, 256(9):2867–2893, 2009.
- [13] R. Fukushima. From the Lifshitz tail to the quenched survival asymptotics in the trapping problem. *submitted*, available at <http://www.math.kyoto-u.ac.jp/~fukushima/Fuk09b.pdf>, 2009.
- [14] R. Fukushima and N. Ueki. Classical and quantum behavior of the integrated density of states for a randomly perturbed lattice. Kyoto University Preprint Series, Kyoto-Math 2009-10, *submitted.*, 2009.
- [15] J. Gärtner and W. König. The parabolic Anderson model. In *Interacting stochastic systems*, pages 153–179. Springer, Berlin, 2005.
- [16] M. Kac and J. M. Luttinger. Bose-Einstein condensation in the presence of impurities. II. *J. Mathematical Phys.*, 15:183–186, 1974.
- [17] T. Komorowski, C. Landim, and S. Olla. Fluctuations in Markov Processes. Book in progress, 2009.
- [18] I. M. Lifshitz. Energy spectrum structure and quantum states of disordered condensed systems. *Soviet Physics Uspekhi*, 7:549–573, 1965.
- [19] S. Nakao. On the spectral distribution of the Schrödinger operator with random potential. *Japan. J. Math. (N.S.)*, 3(1):111–139, 1977.
- [20] H. Osada. Homogenization of diffusion processes with random stationary coefficients. In *Probability theory and mathematical statistics (Tbilisi, 1982)*, volume 1021 of *Lecture Notes in Math.*, pages 507–517. Springer, Berlin, 1983.
- [21] G. C. Papanicolaou and S. R. S. Varadhan. Boundary value problems with rapidly oscillating random coefficients. In *Random fields, Vol. I, II (Esztergom, 1979)*, volume 27 of *Colloq. Math. Soc. János Bolyai*, pages 835–873. North-Holland, Amsterdam, 1981.
- [22] L. A. Pastur. The behavior of certain Wiener integrals as  $t \rightarrow \infty$  and the density of states of Schrödinger equations with random potential. *Teoret. Mat. Fiz.*, 32(1):88–95, 1977.



- [23] T. Povel. Confinement of Brownian motion among Poissonian obstacles in  $\mathbf{R}^d$ ,  $d \geq 3$ . *Probab. Theory Related Fields*, 114(2):177–205, 1999.
- [24] J. Rauch and M. Taylor. Potential and scattering theory on wildly perturbed domains. *J. Funct. Anal.*, 18:27–59, 1975.
- [25] D. Ruelle. Superstable interactions in classical statistical mechanics. *Comm. Math. Phys.*, 18:127–159, 1970.
- [26] U. Schmock. Convergence of the normalized one-dimensional Wiener sausage path measures to a mixture of Brownian taboo processes. *Stochastics Stochastics Rep.*, 29(2):171–183, 1990.
- [27] Y. G. Sinai. The limit behavior of a one-dimensional random walk in a random environment. *Teor. Veroyatnost. i Primenen.*, 27(2):247–258, 1982.
- [28] M. v. Smoluchowski. Versuch einer mathematischen theorie der koagulationskinetik kolloider lösungen. *Zeit. f. Physik. Chemie*, 92(2):129–168, 1917.
- [29] M. Sodin and B. Tsirelson. Random complex zeroes. II. Perturbed lattice. *Israel J. Math.*, 152:105–124, 2006.
- [30] A.-S. Sznitman. On the confinement property of two-dimensional Brownian motion among Poissonian obstacles. *Comm. Pure Appl. Math.*, 44(8-9):1137–1170, 1991.
- [31] A.-S. Sznitman. Brownian asymptotics in a Poissonian environment. *Probab. Theory Related Fields*, 95(2):155–174, 1993.
- [32] A.-S. Sznitman. Brownian motion in a Poissonian potential. *Probab. Theory Related Fields*, 97(4):447–477, 1993.
- [33] A.-S. Sznitman. Brownian survival among Gibbsian traps. *Ann. Probab.*, 21(1):490–508, 1993.
- [34] A.-S. Sznitman. Annealed Lyapounov exponents and large deviations in a Poissonian potential. I, II. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 28(3):345–370, 371–390, 1995.
- [35] A.-S. Sznitman. Brownian confinement and pinning in a Poissonian potential. I, II. *Probab. Theory Related Fields*, 105(1):1–29, 31–56, 1996.
- [36] A.-S. Sznitman. *Brownian motion, obstacles and random media*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1998.