

ランダムポテンシャル中の Brown 運動

福島 竜輝

京都大学理学研究科
日本学術振興会特別研究員 (PD)

日本数学会秋季総合分科会
2009 年 9 月 24 日

P.W. Anderson (1958)

“ランダムポテンシャル中の電子は局在する”

P.W. Anderson (1958)

“ランダムポテンシャル中の電子は局在する”



拡散粒子

(Gärtner–Molchanov 1990)

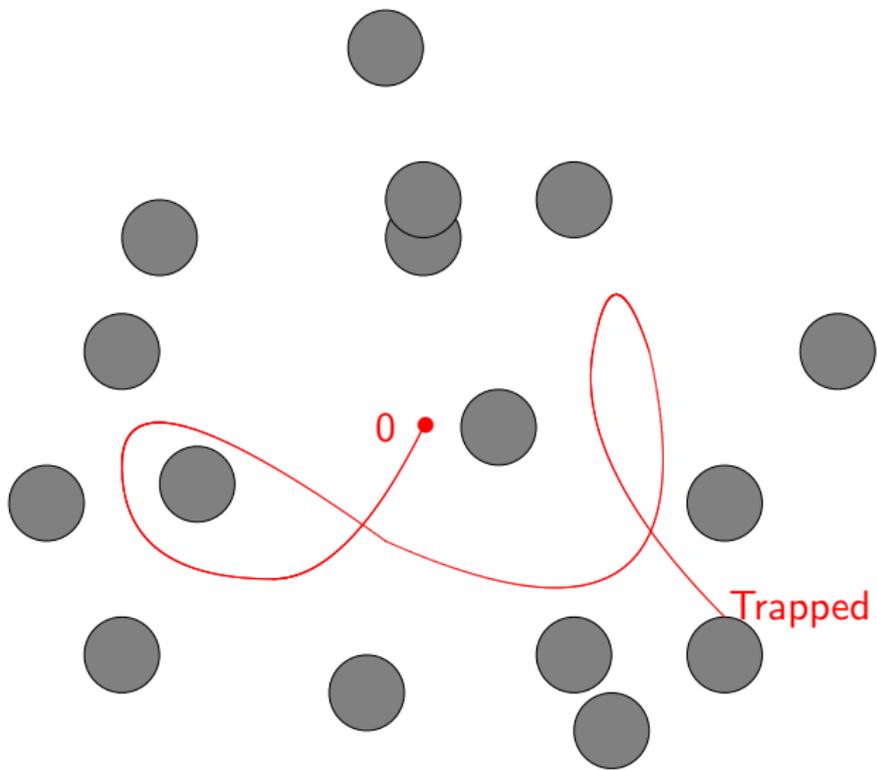
V_ω をランダムポテンシャルとして $H_\omega = -\kappa\Delta + V_\omega$ とおく。
Anderson 局在の一つの数学的定式化は

「基底エネルギー周辺のスペクトルは固有値からなり、
対応する固有関数は遠方で指数減衰する。」

これが成り立つと信じると、

$$e^{(\kappa\Delta - V_\omega)t} f = \int e^{-\lambda t} dE_\lambda f$$

から対応する拡散方程式の解にもある種の局在が起こることが推測される。



目次

1. 一般的な設定と問題
2. Poisson 点過程の場合
3. 他の点過程の場合
4. ランダム作用素のスペクトル理論への応用
5. 述べられなかったことと今後の課題

1. 一般的な設定と問題

- $(\{B_t\}_{t \geq 0}, P_x)$: d 次元標準 Brown 運動
- $(\omega = \sum_i \delta_{\omega_i}, \mathbb{P})$: \mathbb{R}^d 上のランダムな点配置

Hard obstacles

(非極) コンパクト集合 K と $\omega = \sum_i \delta_{\omega_i}$ に対し

$$S(\omega) := \bigcup_i (\omega_i + K).$$

1. 一般的な設定と問題

- $(\{B_t\}_{t \geq 0}, P_x)$: d 次元標準 Brown 運動
- $(\omega = \sum_i \delta_{\omega_i}, \mathbb{P})$: \mathbb{R}^d 上のランダムな点配置

Hard obstacles

(非極) コンパクト集合 K と $\omega = \sum_i \delta_{\omega_i}$ に対し

$$S(\omega) := \bigcup_i (\omega_i + K).$$

Soft obstacles

非負有界かつ可積分な関数 W と $\omega = \sum_i \delta_{\omega_i}$ に対し

$$V(x, \omega) := \sum_i W(x - \omega_i).$$

どれくらい生き残れるか？

Brown 運動が時刻 T まで生存する確率は,

- ▶ Hard obstacles の場合衝突すれば即死するとして

$$u_\omega(T, x) := P_x (H_{S(\omega)} > T),$$

- ▶ Soft obstacles の場合 $[t, t + dt]$ で死ぬ確率を $V(B_t, \omega) dt$ と
して

$$u_\omega(T, x) := E_x \left[\exp \left\{ - \int_0^T V(B_s, \omega) ds \right\} \right].$$

前述の生存確率の表示は, Feynman-Kac の公式によりそれぞれ
ランダムな吸い込みを伴う熱方程式

$$\text{(Hard)} \quad \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = \frac{1}{2} \Delta u(t, x), \quad u = 0 \text{ on } S(\omega),$$

$$\text{(Soft)} \quad \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = \frac{1}{2} \Delta u(t, x) - V(x, \omega) u(t, x),$$

の初期値 $u(0, \cdot) \equiv 1$ に対する解の (T, x) での値である .

生き残っている粒子の分布

生存確率の挙動が分かれば, 次の問題は生存している粒子の分布である. これは条件付き確率

$$\begin{aligned} Q_{T, \omega}(\cdot) &:= P_0(\cdot \mid B_T \text{ survives.}) \\ &= \frac{1}{u_\omega(T, x)} \mathbf{1}_{\{H_{S(\omega)} > T\}} P_0(\cdot), \end{aligned}$$

或いは平均をとった形で

$$\begin{aligned} Q_T(\cdot) &:= \mathbb{P} \otimes P_0(\cdot \mid B_T \text{ survives.}) \\ &= \frac{1}{\mathbb{E}[u_\omega(T, x)]} \mathbf{1}_{\{H_{S(\omega)} > T\}} \mathbb{P} \otimes P_0(\cdot) \end{aligned}$$

のもとでの $\{B_t\}_{0 \leq t \leq T}$ の挙動を調べることにあたる.

生き残っている粒子の分布

生存確率の挙動が分かれば、次の問題は生存している粒子の分布である。これは条件付き確率

$$\begin{aligned} Q_{T,\omega}(\cdot) &:= P_0(\cdot \mid B_T \text{ survives.}) \\ &= \frac{1}{u_\omega(T, x)} \exp \left\{ - \int_0^T V(B_s, \omega) ds \right\} P_0(\cdot), \end{aligned}$$

或いは平均をとった形で

$$\begin{aligned} Q_T(\cdot) &:= \mathbb{P} \otimes P_0(\cdot \mid B_T \text{ survives.}) \\ &= \frac{1}{\mathbb{E}[u_\omega(T, x)]} \exp \left\{ - \int_0^T V(B_s, \omega) ds \right\} \mathbb{P} \otimes P_0(\cdot) \end{aligned}$$

のもとでの $\{B_t\}_{0 \leq t \leq T}$ の挙動を調べることにあたる。

2. Poisson 点過程の場合

ランダムな点配置の中で最も基本的な対象は Poisson 点過程であり, それは以下のように特徴づけられる:

$$(1) \mathbb{P}_\nu(\omega(A) = k) = \frac{(\nu|A|)^k}{k!} \exp\{-\nu|A|\},$$

(2) $\{A_i\}_{i=1}^n$ が非交差ならば $\{\omega(A_i)\}_{i=1}^n$ は独立.

ここで $\nu > 0$ はパラメータであり, 強度とか密度と呼ばれる.

2. Poisson 点過程の場合

ランダムな点配置の中で最も基本的な対象は Poisson 点過程であり、それは以下のように特徴づけられる：

$$(1) \mathbb{P}_\nu(\omega(A) = k) = \frac{(\nu|A|)^k}{k!} \exp\{-\nu|A|\},$$

(2) $\{A_i\}_{i=1}^n$ が非交差ならば $\{\omega(A_i)\}_{i=1}^n$ は独立．

ここで $\nu > 0$ はパラメータであり、強度とか密度と呼ばれる．

実は2番目の条件があると、特殊な例外を排除する技術的条件の下で1番目が従い、それがこの点配置が基本的と考えられる所以である．

2.1 Light tail case

Donsker and Varadhan (1975), Sznitman (1990)

Hard obstacles 又は soft obstacles で $W(x) = o(|x|^{-d-2})$ の場合

$$\mathbb{E}_\nu[u_\omega(T, 0)] = \exp \left\{ -c(d, \nu) T^{\frac{d}{d+2}} (1 + o(1)) \right\} \quad (T \rightarrow \infty).$$

$$c(d, \nu) := \inf_{U \subset \mathbb{R}^d : \text{open}} \{ \nu |U| + \lambda_1(U) \},$$

$$\lambda_1(U) : -\frac{1}{2} \Delta \text{ の Dirichlet 最小固有値.}$$

2.1 Light tail case

Donsker and Varadhan (1975), Sznitman (1990)

Hard obstacles 又は soft obstacles で $W(x) = o(|x|^{-d-2})$ の場合

$$\mathbb{E}_\nu[u_\omega(T, 0)] = \exp \left\{ -c(d, \nu) T^{\frac{d}{d+2}} (1 + o(1)) \right\} \quad (T \rightarrow \infty).$$

$$c(d, \nu) := \inf_{U \subset \mathbb{R}^d : \text{open}} \{ \nu |U| + \lambda_1(U) \},$$

$$\lambda_1(U) : -\frac{1}{2} \Delta \text{ の Dirichlet 最小固有値.}$$

Remarks.

- (i) 変分問題 $\inf \{ \nu |U| + \lambda_1(U) \}$ の最小はある半径 $R_0(d, \nu)$ の球 $B(x, R_0)$ で達成される . (Faber-Krahn's inequality)

(ii) Jensen の不等式により,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\nu[u_\omega(T, 0)] &= \mathbb{E}_\nu \otimes E_0 \left[\exp \left\{ - \int_0^T V(B_s, \omega) ds \right\} \right] \\ &\geq \exp \left\{ - \mathbb{E}_\nu \otimes E_0 \left[\int_0^T V(B_s, \omega) ds \right] \right\} \\ &= \exp \{-cT\}.\end{aligned}$$

これが悪い lower bound にしかになっていないことは、一行目の平均が起こりにくい事象に支配されていることを暗示している。

証明のアイデア (Hard obstacles, $K = \overline{B}(0, 1)$ の場合)

$W_T := \bigcup_{0 \leq t \leq T} \overline{B}(B_t, 1)$ とおく.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\nu[u_\omega(T, 0)] &= \mathbb{E}_\nu [P_0(H_{S(\omega)} > T)] \\ &= E_0 [\mathbb{P}_\nu(\omega(W_T) = 0)] \\ &= \int e^{-\nu|U|} P_0(W_T \in dU).\end{aligned}$$

証明のアイデア (Hard obstacles, $K = \overline{B}(0, 1)$ の場合)

$W_T := \bigcup_{0 \leq t \leq T} \overline{B}(B_t, 1)$ とおく.

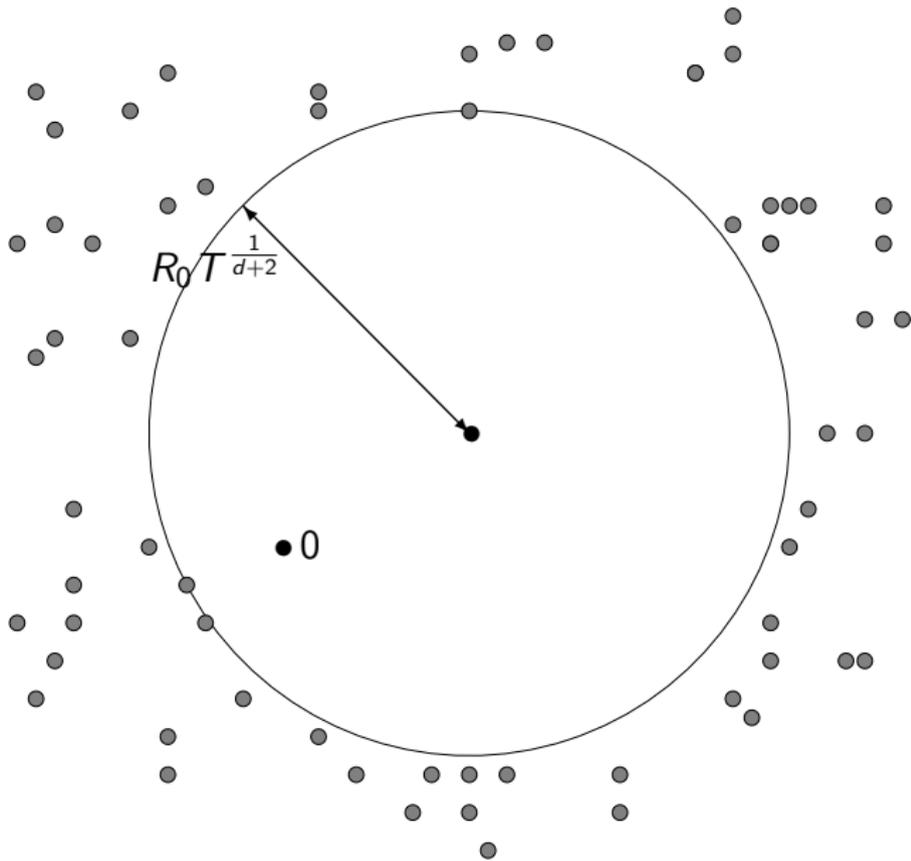
$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\nu[u_\omega(T, 0)] &= \mathbb{E}_\nu [P_0(H_{S(\omega)} > T)] \\ &= E_0 [\mathbb{P}_\nu(\omega(W_T) = 0)] \\ &= \int e^{-\nu|U|} P_0(W_T \in dU).\end{aligned}$$

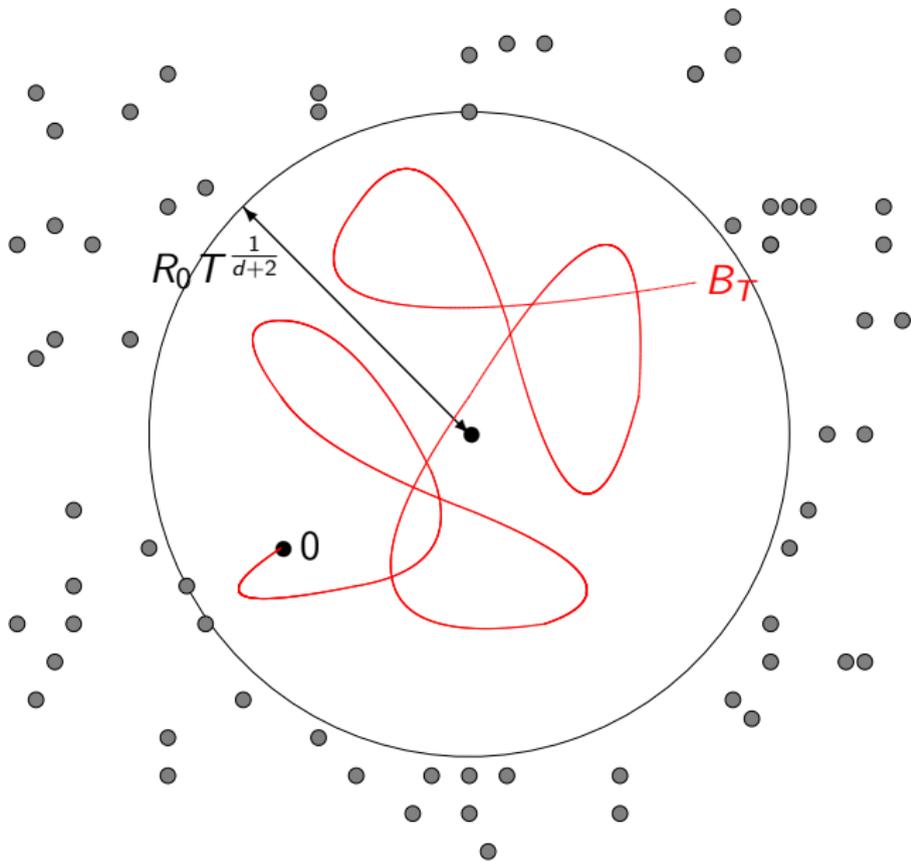
$$\begin{cases} P_0(W_T \in dU) \approx e^{-\lambda_1(U)T} & \text{(大偏差原理)} \\ U \mapsto |U| & \text{は "regular" な汎関数} \end{cases}$$

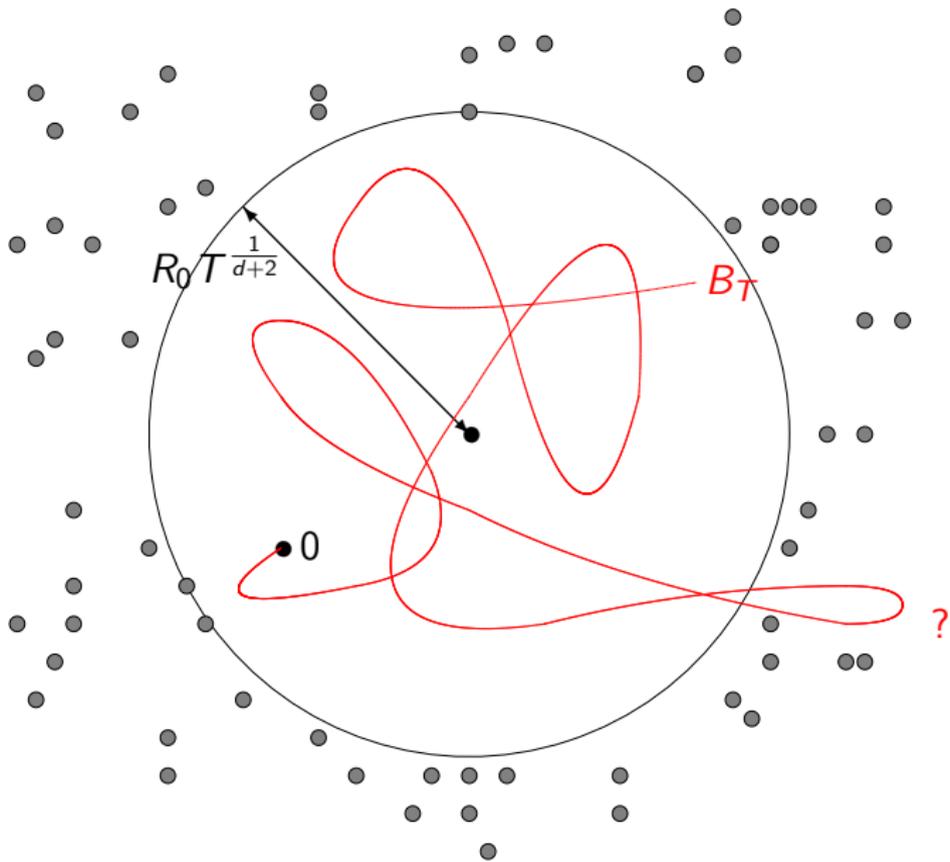
↓ (Laplace 原理)

$$\mathbb{E}_\nu[u_\omega(T, 0)] \approx \exp\left\{-\inf_U \{\nu|U| + \lambda_1(U)T\}\right\}$$

この左辺の inf は $T^{\frac{1}{d+2}} B(x, R_0)$ で達成される.







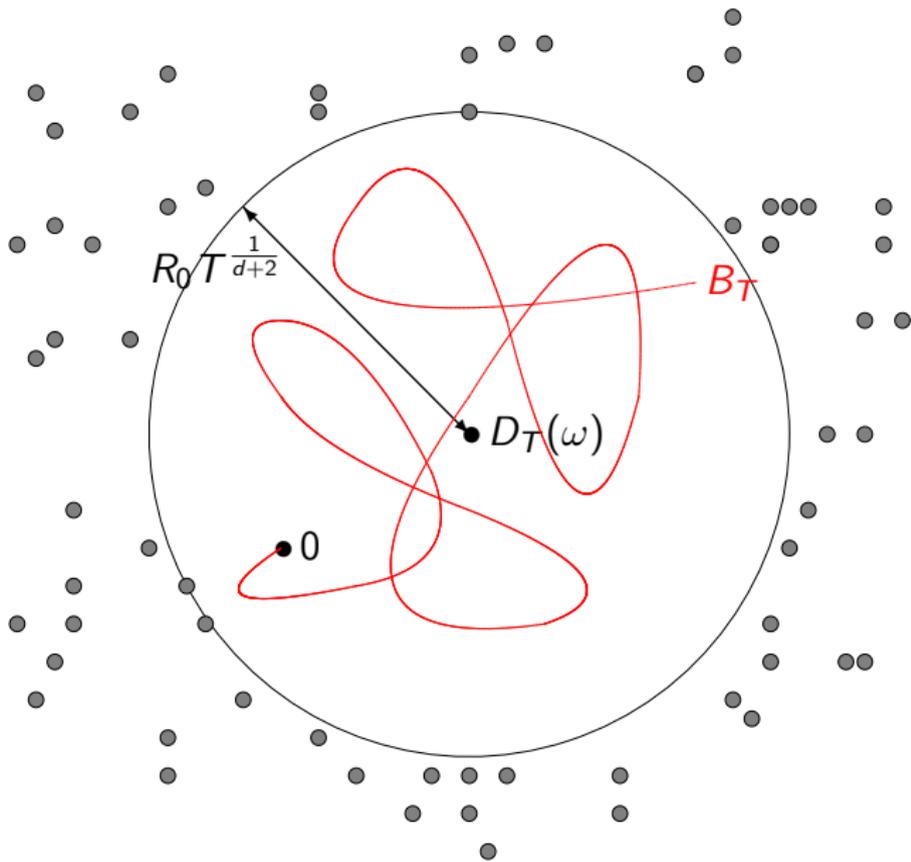
Sznitman (1991) and Povel (1999) ($d \geq 2$)

Hard obstacles または台コンパクトな soft obstacles に対して
 $R_0(d, \nu) > 0$, $\delta(T) \rightarrow 0$ ($T \rightarrow \infty$) と可測写像

$$D_T : \Omega \rightarrow B(0, T^{\frac{1}{d+2}}(R_0 + \delta(T)))$$

が存在して $T \rightarrow \infty$ で,

$$Q_T \left(B_{[0, T]} \subset B(D_T(\omega), T^{\frac{1}{d+2}}(R_0 + \delta(T))) \right) \rightarrow 1.$$



F. (2008)

Hard obstacles または台コンパクトな soft obstacles に対して,

$$T^{-\frac{d}{d+2}} |W_T| \rightarrow |B(0, R_0)| \quad \text{in } Q_T\text{-probability.}$$

従って $W_T \sim T^{\frac{1}{d+2}} B(D_T(\omega), R_0)$.

F. (2008)

Hard obstacles または台コンパクトな soft obstacles に対して,

$$T^{-\frac{d}{d+2}} |W_T| \rightarrow |B(0, R_0)| \quad \text{in } Q_T\text{-probability.}$$

従って $W_T \sim T^{\frac{1}{d+2}} B(D_T(\omega), R_0)$.

更に,

$$T^{-\frac{d}{d+2}} |W_{T^\sigma}| \longrightarrow \begin{cases} |B(0, R_0)|, & \sigma > \frac{d}{d+2}, \\ 0, & \sigma < \frac{d}{d+2}. \end{cases}$$

2.2 Heavy tail case

Pastur (1977)

Soft obstacles で $W(x) \sim c_0|x|^{-\alpha}$ ($d < \alpha < d + 2$) の場合

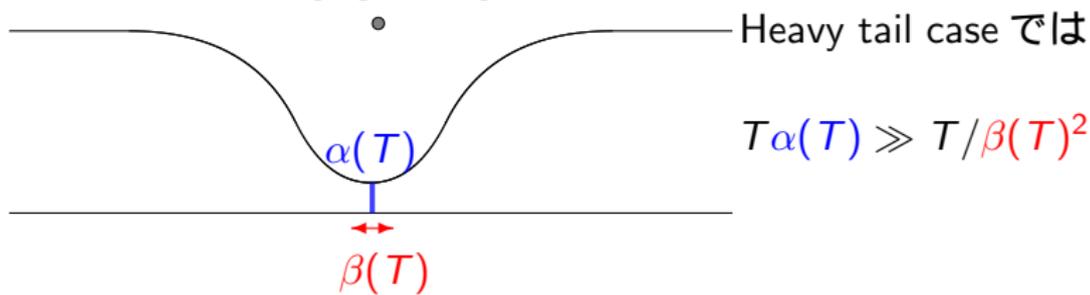
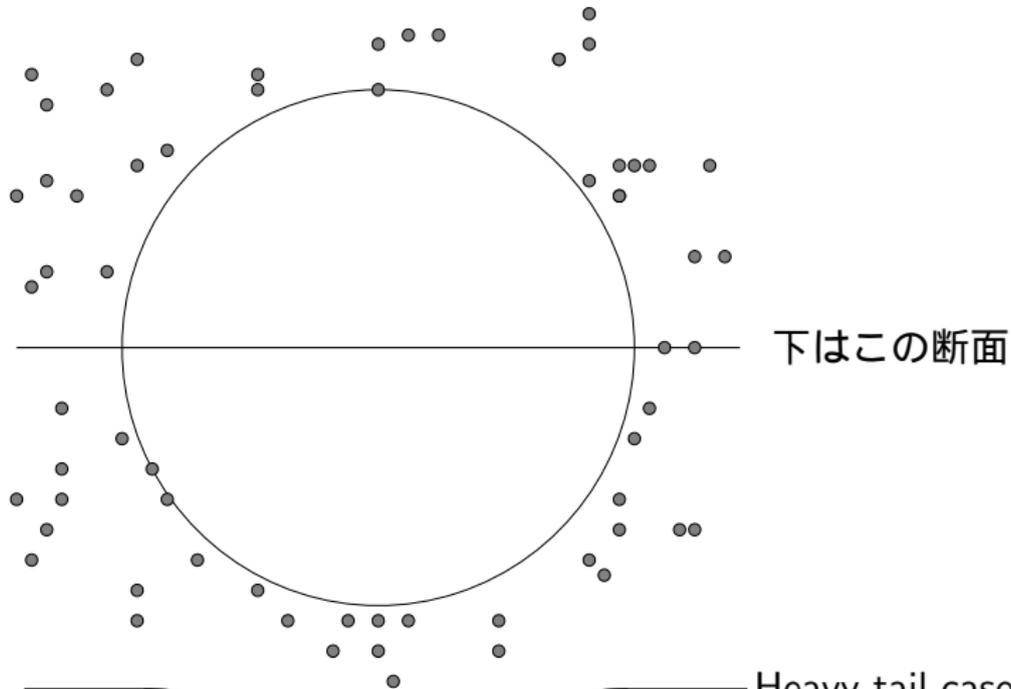
$$\mathbb{E}_\nu[u_\omega(T, 0)] = \exp\left\{-\tilde{c}(d, \nu) T^{\frac{d}{\alpha}}(1 + o(1))\right\} \quad (T \rightarrow \infty),$$

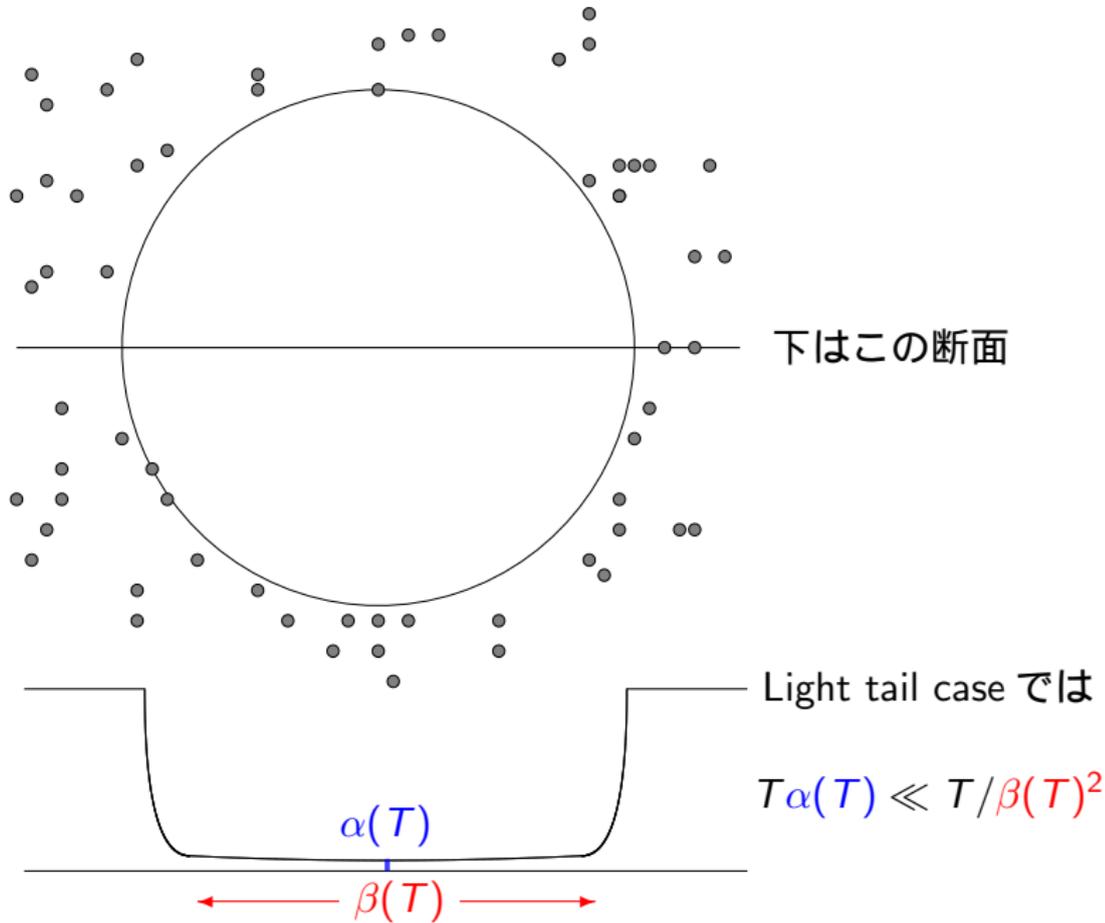
$$\tilde{c}(d, \nu) := \nu c_0^{d/\alpha} |\partial B(0, 1)| \Gamma\left(1 + \frac{d}{\alpha}\right).$$

Remark.

実は上の漸近挙動の右辺は $\mathbb{E}_\nu[\exp\{-TV_\omega(0)\}]$ から来ている.

Brown 運動の挙動を知るには $o(1)$ の部分をより詳しく知る必要がある.





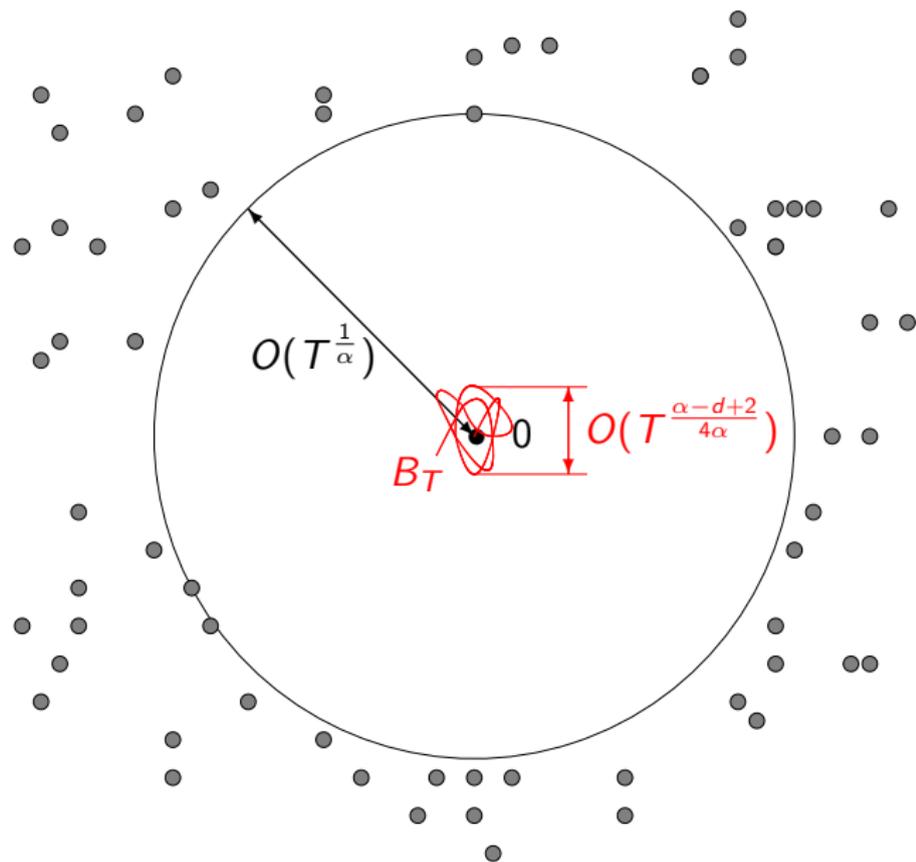
F. (in progress)

$W(x) = |x|^{-\alpha} \wedge 1$ とする. このとき $T \rightarrow \infty$ において

$$\mathbb{E}_\nu[u_\omega(T, 0)] = \exp \left\{ -\tilde{c}(d, \nu) T^{\frac{d}{\alpha}} - (a_2 + o(1)) T^{\frac{\alpha+d-2}{2\alpha}} \right\}.$$

ここで

$$a_2 = \inf_{\|\phi\|_2=1} \left\{ \int \frac{1}{2} |\nabla \phi(x)|^2 + \frac{\nu}{2} \sigma_d \Gamma \left(\frac{\alpha+2}{d} \right) |x|^2 \phi(x)^2 dx \right\}.$$



3. 他の点過程の場合

Poisson 点過程を離れるとあまり解析されている対象は多くない.

- ▶ Sznitman (1993)

Poisson 点過程に有限距離の相互作用を入れても, 結果はほとんど変わらない.

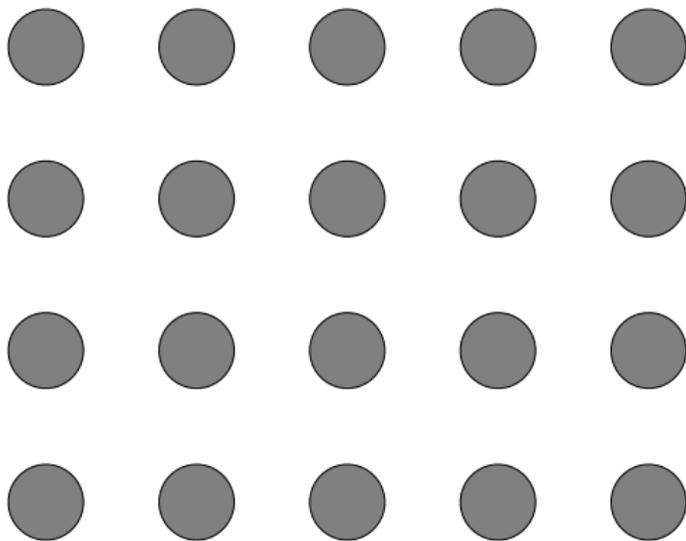
- ▶ Bogachev et al. (2001)

相互作用が“反発的”ならば生き残りにくく, “吸引的”ならば生き残りやすくなる.

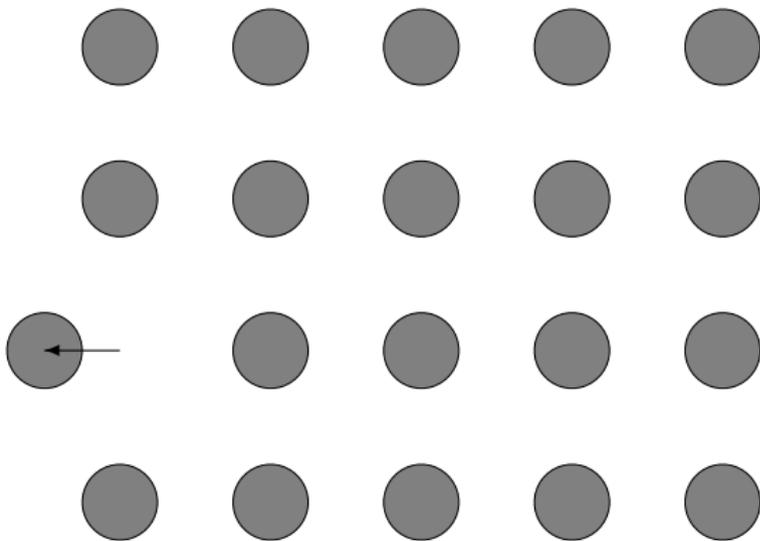
- ▶ Biskup–König (2001)

\mathbb{Z}^d の各点に独立同分布な高さのポテンシャルを置いた場合は Donsker–Varadhan の手法が使えて, 結果は分布に応じて色々変わる.

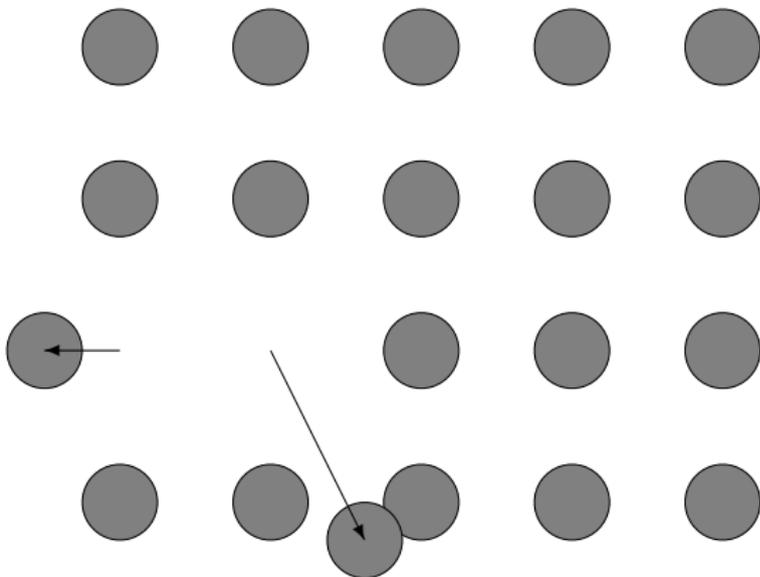
Frenkel 欠陥のモデル



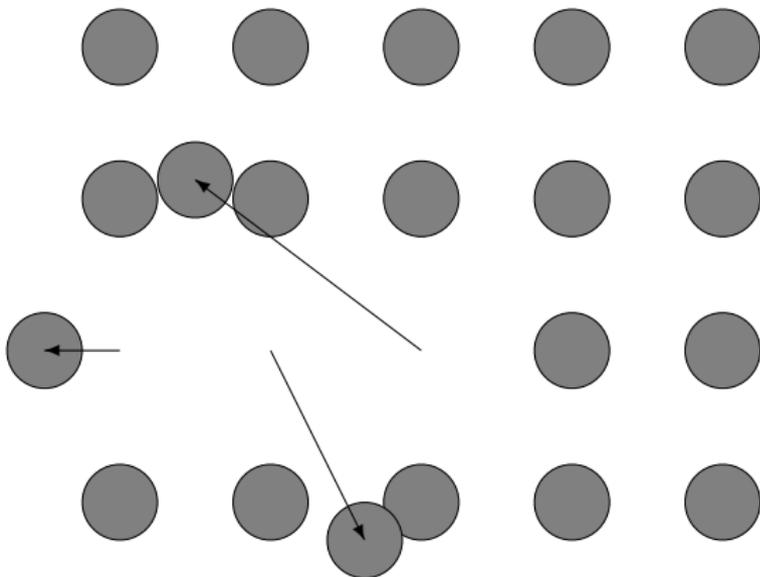
Frenkel 欠陥のモデル



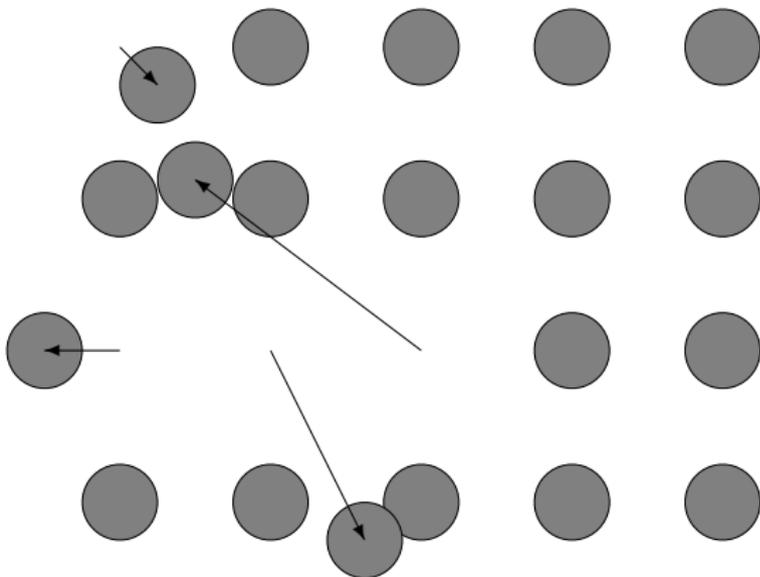
Frenkel 欠陥のモデル



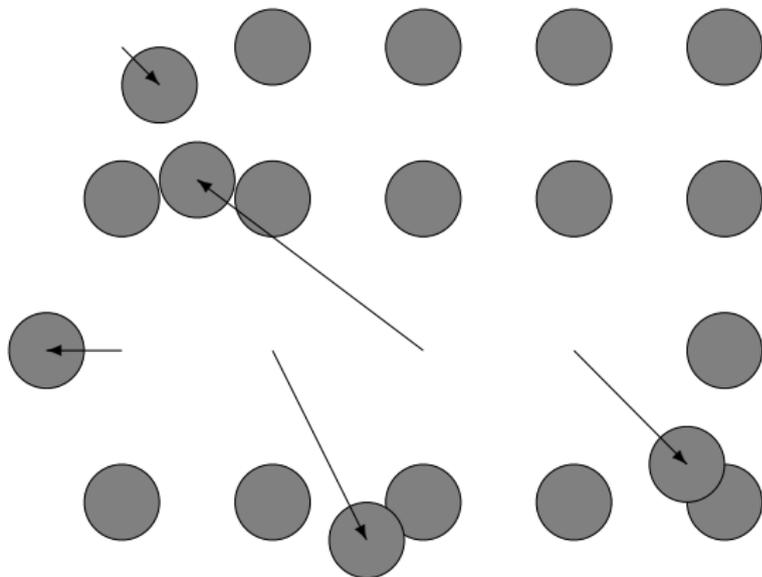
Frenkel 欠陥のモデル



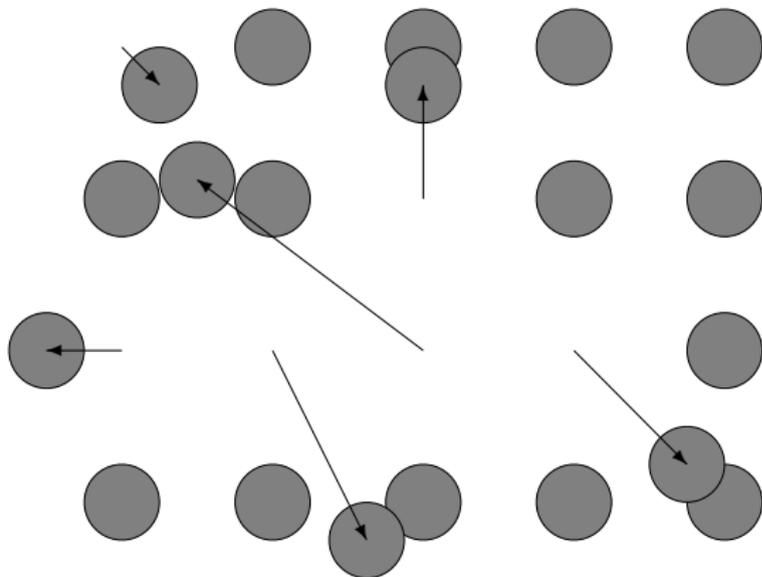
Frenkel 欠陥のモデル



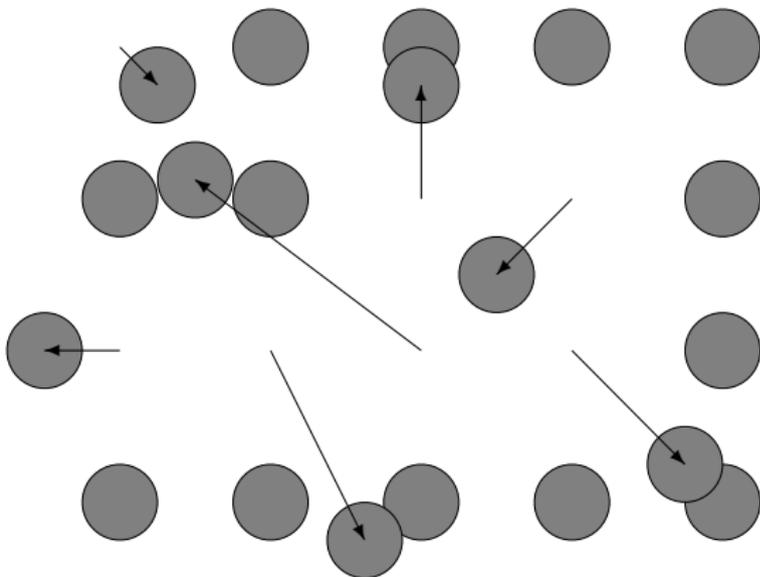
Frenkel 欠陥のモデル



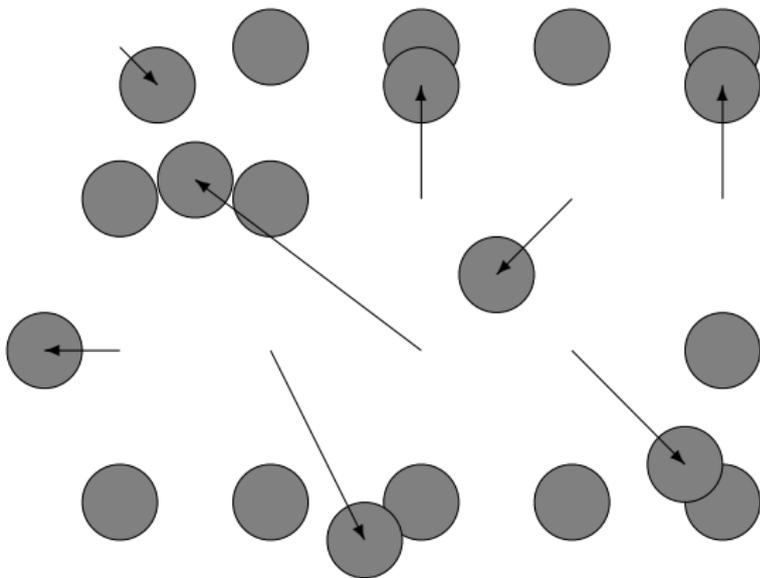
Frenkel 欠陥のモデル



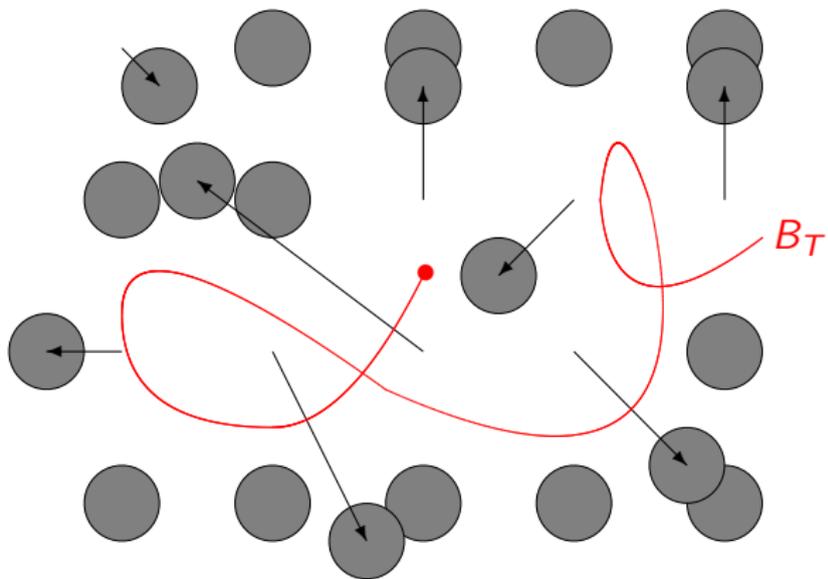
Frenkel 欠陥のモデル



Frenkel 欠陥のモデル



Frenkel 欠陥のモデル



格子点を摂動する確率変数 $\{\omega_q\}_{q \in \mathbb{Z}^d}$ としては, 独立同分布で

$$\mathbb{P}_\theta(\omega_q \in dx) = N(d, \theta) \exp\{-|x|^\theta\} dx.$$

なるものをとる. ここで θ は正のパラメータである. これに対して点過程を $\omega := \sum_{q \in \mathbb{Z}^d} \delta_{q+\omega_q}$ で定める.

格子点を摂動する確率変数 $\{\omega_q\}_{q \in \mathbb{Z}^d}$ としては, 独立同分布で

$$\mathbb{P}_\theta(\omega_q \in dx) = N(d, \theta) \exp\{-|x|^\theta\} dx.$$

なるものをとる. ここで θ は正のパラメータである. これに対して点過程を $\omega := \sum_{q \in \mathbb{Z}^d} \delta_{q+\omega_q}$ で定める.

この種のモデルの soft obstacles の場合は, ランダム Schrödinger 作用素の文献にはしばしば例として挙げられているが, 結果は作用素の可測性や本質的自己共役性など, 基本的なものを除いてほとんどない.

3.1 Compact obstacles case

F. (2009)

Hard obstacles 又は台コンパクトな soft obstacles に対しては、任意の $\theta > 0$ について

$$\log \mathbb{E}_\theta[u_\omega(T, 0)] \asymp \begin{cases} -T^{\frac{2+\theta}{4+\theta}} (\log T)^{-\frac{\theta}{4+\theta}} & (d = 2), \\ -T^{\frac{d^2+2\theta}{d^2+2d+2\theta}} & (d \geq 3). \end{cases}$$

Remark.

$$\frac{d}{d+2} \xleftarrow{\theta \rightarrow 0} \frac{d^2+2\theta}{d^2+2d+2\theta} \xrightarrow{\theta \rightarrow \infty} 1.$$

類似の補間が Biskup–König (2001) の研究でも得られている。

証明のアイデア (Hard obstacles, $K = \overline{B}(0, 1)$ の場合)

とりあえず Donsker–Varadhan に従って

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\theta[u_\omega(T, 0)] &= \mathbb{E}_\theta [P_0(H_{S(\omega)} > T)] \\ &= \int \mathbb{P}_\theta(\omega(U) = 0) P_0(W_T \in dU),\end{aligned}$$

と進めようとする、 $\mathbb{P}_\theta(\omega(U) = 0)$ の表示が必要である。

証明のアイデア (Hard obstacles, $K = \overline{B}(0, 1)$ の場合)

とりあえず Donsker–Varadhan に従って

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\theta[u_\omega(T, 0)] &= \mathbb{E}_\theta [P_0(H_{S(\omega)} > T)] \\ &= \int \mathbb{P}_\theta(\omega(U) = 0) P_0(W_T \in dU),\end{aligned}$$

と進めようとする、 $\mathbb{P}_\theta(\omega(U) = 0)$ の表示が必要である。

Lemma

$U \subset \mathbb{R}^d$ に対する適当な regularity condition のもとで、

$$\mathbb{P}_\theta(\omega(U) = 0) \stackrel{\text{log}}{\sim} \exp\left\{-\int_U d(x, \partial U)^\theta dx\right\}.$$

(cf. Poisson 点過程の場合 $\mathbb{P}_\nu(\omega(U) = 0) = e^{-\nu|U|}$.)

従って

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\theta[u_\omega(T, 0)] &\approx \int \exp\left\{-\int_{W_T} d(x, \partial W_T)^\theta dx\right\} P_0(W_T \in dU) \\ &\approx \exp\left\{-\inf_U \left\{\lambda_1(U)T + \int_{W_T} d(x, \partial W_T)^\theta dx\right\}\right\}\end{aligned}$$

となりそうだが,

$$U \mapsto \int_U d(x, \partial U)^\theta dx$$

が “regularity” を持ち得ない汎関数であるため、2行目はこの方針では確立できない。

Sznitman のアイデア

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\theta[u_\omega(T, 0)] &= \mathbb{E}_\theta [P_0(H_{S(\omega)} > T)] \\ &\approx \mathbb{E}_\theta \left[\exp\{-\lambda_1(\mathbb{R}^d \setminus S(\omega)) T\} \right] \\ &= \int e^{-\lambda_1(U)T} \mathbb{P}_\theta(\mathbb{R}^d \setminus S(\omega) \in dU).\end{aligned}$$

Sznitman のアイデア

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\theta[u_\omega(T, 0)] &= \mathbb{E}_\theta [P_0(H_{S(\omega)} > T)] \\ &\approx \mathbb{E}_\theta \left[\exp\{-\lambda_1(\mathbb{R}^d \setminus S(\omega)) T\} \right] \\ &= \int e^{-\lambda_1(U)T} \mathbb{P}_\theta(\mathbb{R}^d \setminus S(\omega) \in dU).\end{aligned}$$

ここで一般に写像

$$U \longmapsto \lambda_1(U)$$

は比較的良い “regularity” を持っていることがポイントである.

Sznitman のアイデア

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\theta[u_\omega(T, 0)] &= \mathbb{E}_\theta [P_0(H_{S(\omega)} > T)] \\ &\approx \mathbb{E}_\theta \left[\exp\{-\lambda_1(\mathbb{R}^d \setminus S(\omega)) T\} \right] \\ &= \int e^{-\lambda_1(U)T} \mathbb{P}_\theta(\mathbb{R}^d \setminus S(\omega) \in dU).\end{aligned}$$

ここで一般に写像

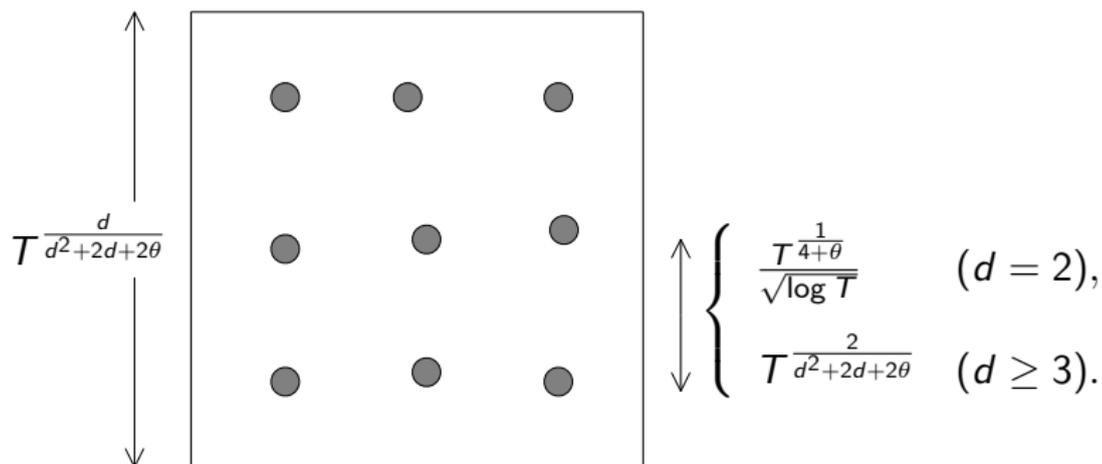
$$U \longmapsto \lambda_1(U)$$

は比較的良い “regularity” を持っていることがポイントである。
これを用いて $\mathbb{P}_\theta(\cdots \in dU)$ についてある種の粗視化を行うことにより Laplace 原理を確立することができる。

したがって後は変分問題

$$\inf_U \left\{ \lambda_1(U) T + \int_U d(x, \partial U)^\theta dx \right\}$$

を解析すればよい. これも Poisson の時ほど簡単ではないが, ともかく以下のような U が最小を与えることが示せる.



3.2 Light tail case

F. and Ueki (2009)

Soft obstacles で $W(x) \asymp |x|^{-\alpha}$ ($\alpha > d + 2$) の場合

$$\log \mathbb{E}_\theta[u_\omega(T, 0)] \asymp \begin{cases} -T^{\frac{2+\theta}{4+\theta}} (\log T)^{-\frac{\theta}{4+\theta}} & (d = 2), \\ -T^{\frac{d^2+2\theta\mu}{d^2+2d+2\theta\mu}} & (d \geq 3). \end{cases}$$

ここで $\mu = (\alpha - 2)/(\alpha - d)$.

Remark.

$\alpha = d + 2$ が閾値であることは Poisson 点過程の場合と同じだが、3次元以上では light tail においても α の影響があることは対照的である。

3.3 Heavy tail case

F. and Ueki (2009)

Soft obstacles で $W(x) \sim c_0|x|^{-\alpha}$ ($d < \alpha < d + 2$) の場合

$$\mathbb{E}_\theta[u_\omega(T, 0)] = \exp \left\{ -\hat{c}(d, \theta) T^{\frac{d+\theta}{\alpha+\theta}} (1 + o(1)) \right\} \quad (T \rightarrow \infty),$$

$$\hat{c}(d, \theta) := \int_{\mathbb{R}^d} \inf_{y \in \mathbb{R}^d} \left(\frac{c_0}{|q + y|^\alpha} + |y|^\theta \right) dq.$$

Remark.

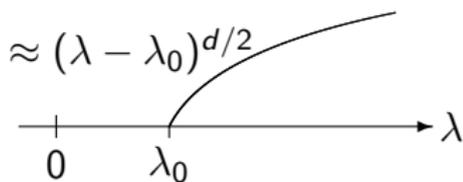
この場合だけ定数まで分かるのは、上の漸近挙動の右辺が Poisson の時と同様に $\mathbb{E}_\theta[\exp\{-TV_\omega(0)\}]$ から来ていることによる。

4. ランダム作用素のスペクトル理論への応用

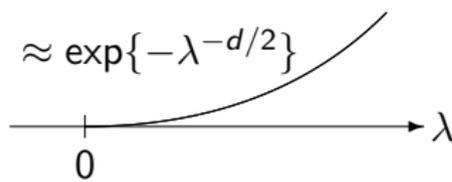
$-1/2\Delta + V_\omega$ の“状態密度” (density of states) を

$$\ell(d\lambda) := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{(2N)^d} \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{\lambda_k^\omega((-N, N)^d)}(d\lambda).$$

で定義する. Lifshitz (1965) は $\ell([0, \lambda])$ の基底エネルギー付近での挙動について, 次のような描像を予想した.



periodic potential



random potential

状態密度は生存確率と次のように Laplace 変換で結び付けられる :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[u_\omega(T, 0)] &\stackrel{\text{log}}{\sim} \mathbb{E}[p_\omega(T, 0, 0)] \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{(2N)^d} \int_{(-N, N)^d} p_\omega(T, x, x) dx \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{(2N)^d} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k^\omega T} \int_{(-N, N)^d} \phi_k(x) \bar{\phi}_k(x) dx \\ &= (\mathcal{L}\ell)(T).\end{aligned}$$

状態密度は生存確率と次のように Laplace 変換で結び付けられる :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[u_\omega(T, 0)] &\stackrel{\log}{\sim} \mathbb{E}[p_\omega(T, 0, 0)] \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{(2N)^d} \int_{(-N, N)^d} p_\omega(T, x, x) dx \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{(2N)^d} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k^\omega T} \int_{(-N, N)^d} \phi_k(x) \bar{\phi}_k(x) dx \\ &= (\mathcal{L}l)(T).\end{aligned}$$

Tauberian theorem: $(\mathcal{L}l)(+\infty) \longrightarrow l(0+)$.

Nakao (1977)

Poisson 点過程に従って配置された hard obstacles 又は soft obstacles で $W(x) = o(|x|^{-d-2})$ の場合

$$\ell([0, \lambda]) = \exp\left\{-l_1 \lambda^{-\frac{d}{2}}(1 + o(1))\right\} \quad \text{as } \lambda \rightarrow 0.$$

F. (in progress)

Poisson 点過程に従って配置された soft obstacles で $W(x) = |x|^{-\alpha} \wedge 1$ ($2 \vee d < \alpha < d + 2$) の場合

$$\ell([0, \lambda]) = \exp\left\{-l_2 \lambda^{-\frac{d}{\alpha-d}} - (l_3 + o(1)) \lambda^{-\frac{\alpha+d-2}{2(\alpha-d)}}\right\}.$$

F. and Ueki (2009)

Frenkel 欠陥のモデルで

(1) Hard obstacles 又は台コンパクトな soft obstacles の場合

$$\log \ell([0, \lambda]) \asymp \begin{cases} -\lambda^{-1-\frac{\theta}{2}} \left(\log \frac{1}{\lambda}\right)^{-\frac{\theta}{2}} & (d = 2), \\ -\lambda^{-\frac{d}{2}-\frac{\theta}{d}} & (d \geq 3). \end{cases}$$

(2) Soft obstacles で $W(x) \asymp |x|^{-\alpha}$ ($\alpha > d + 2$) の場合

$$\log \ell([0, \lambda]) \asymp \begin{cases} -\lambda^{-1-\frac{\theta}{2}} \left(\log \frac{1}{\lambda}\right)^{-\frac{\theta}{2}} & (d = 2), \\ -\lambda^{-\frac{d+\mu\theta}{2}} & (d \geq 3). \end{cases}$$

(3) Soft obstacles で $W(x) \sim c_0|x|^{-\alpha}$ ($d < \alpha < d + 2$) の場合

$$\log \ell([0, \lambda]) \sim -l_4 \lambda^{-(d+\theta)/(\alpha-d)}.$$

5. 述べなかったことと今後の課題

- ▶ ω を固定した場合の結果も色々あるが, Poisson 点過程以外のモデルにおいては不完全である.
- ▶ Frenkel 欠陥のモデルにおいて $\mathbb{E}_\theta[u_\omega(T, 0)]$ の漸近挙動をより詳しく解析することは, 生存するように条件づけた粒子の挙動を知るために必要である.
- ▶ $\mathbb{E}[u_\omega(T, 0)]$ の減衰が $\exp\{-cT^\beta\}$, $\beta \notin [\frac{d}{d+2}, 1]$ となるような状況はあるのか.
- ▶ ドリフト付き Brown 運動を考えることはランダム媒質中の輸送現象を理解するという視点から興味深い.
- ▶ Moving traps の問題も重要で, 最近 Gärtner, den Hollander が少し異なるモデルで研究を始めている.