Anderson 模型の固有値の揺らぎについて

福島竜輝（京都大学）

新潟確率論ワークショップ
2015 年 1 月 23 日

Joint work with M. Biskup (UCLA) and W. König (WIAS)

Anderson Hamiltonian

Anderson 模型とはランダムポテンシャル付きの Schrödinger 作用素

$$H_\omega = -\kappa\Delta + V_\omega$$

で $L^2(\mathbb{R}^d)$ または $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ で考える． V_ω は通常 stationary, ergodic を仮定する.

V_ω の典型例は alloy model

$$V_\omega(x) = \sum_{q\in\mathbb{Z}^d} \omega_q v(x-q)$$

や random displacement model

$$V_\omega(x) = \sum_{q\in\mathbb{Z}^d} v(x-q-\omega_q).$$

Localizations

V_ω はランダムなので，稀に深い“ 谷 ”を持つ．この影響で色々な局在現象が起こる:

Spectral localization (elliptic)
: H_ω のスペクトルは基底状態付近で固有値のみからなる．

Dynamical localization (hyperbolic)
: 低エネルギー状態 ϕ から出発すると，波動関数 $e^{itH_\omega}\phi$ は有界領域に留まる．

Localization of diffusion (parabolic)
: $e^{-tH_\omega}\delta_0$ で表される拡散（過程）は小さな領域に局在する．

Localizations

V_ω はランダムなので，稀に深い“ 谷 ”を持つ．この影響で色々な局在現象が起こる:

Spectral localization (elliptic)
: H_ω のスペクトルは基底状態付近で固有値のみからなる.

Dynamical localization (hyperbolic)
: 低エネルギー状態 ϕ から出発すると，波動関数 $e^{itH_\omega}\phi$ は有界領域に留まる.

Localization of diffusion (parabolic)
: $e^{-tH_\omega}\delta_0$ で表される拡散（過程）は小さな領域に局在する.

一般に V_ω の谷による局在効果は Δ の平滑化よりはるかに強い.

Acceleration

$$\kappa \text{ が大きい} \Longrightarrow \text{非局在?}$$

この方向は拡散過程（放物型の問題）に対して van den Berg-Bolthausen-den Hollander, Sznitman, König-Schmidt などによって調べられている．結果は（暗示的なレベルに留まるが）

$$\kappa \lesssim t^{2/d} \Longrightarrow \langle e^{-tH_\omega}\delta_0 \rangle \text{ は局在.}$$

逆に次が予想されている：$\kappa \gg t^{2/d} \Longrightarrow \langle e^{-tH_\omega}\delta_0 \rangle$ は非局在.

F.-König (unpublished): 以下の設定では拡散性が言える：

$$\kappa \gg t^3 \ (d = 1), \ \kappa \gg t \log t \ (d = 2), \ \kappa \gg t \ (d \geq 3).$$

Acceleration

$$\kappa \text{ が大きい} \Longrightarrow \text{非局在?}$$

この方向は拡散過程（放物型の問題）に対して van den Berg-Bolthausen-den Hollander, Sznitman, König-Schmidt などによって調べられている．結果は（暗示的なレベルに留まるが）

$$\kappa \lesssim t^{2/d} \Longrightarrow \langle e^{-tH_\omega}\delta_0\rangle \text{ は局在.}$$

逆に次が予想されている：$\kappa \gg t^{2/d} \Longrightarrow \langle e^{-tH_\omega}\delta_0\rangle$ は非局在.

F.-König (unpublished): 以下の設定では拡散性が言える：

$$\kappa \gg t^3 \ (d=1), \ \kappa \gg t\log t \ (d=2), \ \kappa \gg t \ (d \geq 3).$$

この種の結果は “homogenization” に似ている．（？）

Setting of the problem

今回は少し違う "homogenization" を考える.

- $D \subset \mathbb{R}^d$: 滑らかな境界を持つ有界領域;
- $D_\epsilon = D \cap \epsilon\mathbb{Z}^d$: 自然な離散近似;
- $\Delta^{(\epsilon)} f(x) = \epsilon^{-2} \sum_{|y-x|=\epsilon} (f(y) - f(x))$;
- $\xi^{(\epsilon)} = \{\xi^{(\epsilon)}(x) \colon x \in D_\epsilon\}$: ランダムポテンシャル.

$\{\lambda^{(k)}_{D_\epsilon,\xi}\}_{k\geq 1}$ を

$$-\Delta^{(\epsilon)} + \xi^{(\epsilon)}$$

の固有値で D_ϵ の外側で Dirichlet 境界条件を課したものとする.

Setting of the problem

今回は少し違う “homogenization” を考える.

- $D \subset \mathbb{R}^d$: 滑らかな境界を持つ有界領域;
- $D_\epsilon = D \cap \epsilon\mathbb{Z}^d$: 自然な離散近似;
- $\Delta^{(\epsilon)} f(x) = \epsilon^{-2} \sum_{|y-x|=\epsilon} (f(y) - f(x))$;
- $\xi^{(\epsilon)} = \{\xi^{(\epsilon)}(x) \colon x \in D_\epsilon\}$: ランダムポテンシャル.

$\{\lambda^{(k)}_{D_\epsilon,\xi}\}_{k\geq 1}$ を

$$-\Delta^{(\epsilon)} + \xi^{(\epsilon)}$$

の固有値で D_ϵ の外側で Dirichlet 境界条件を課したものとする.

Remark

$-\Delta^{(\epsilon)} + \xi^{(\epsilon)}$ *on* $D_\epsilon \longleftrightarrow -\epsilon^{-2}\Delta^{(1)} + \xi^{(\epsilon)}(\epsilon\cdot)$ *on* $\epsilon^{-1}D_\epsilon$.

Assumptions

(1) $(\{\xi^{(\epsilon)}(x)\}_{x\in D_\epsilon}, \mathbb{P})$ は独立である $K > 2 \vee \frac{d}{2}$ に対し

$$\sup_{\epsilon\in(0,1)} \sup_{x\in D_\epsilon} \mathbb{E}\left[\left|\xi^{(\epsilon)}(x)\right|^K\right] < \infty;$$

(2) ある $U, V \in C_b(D)$ があって全ての $\epsilon > 0$ と $x \in D_\epsilon$ に対し

$$\mathbb{E}[\xi^{(\epsilon)}(x)] = U(x), \quad \mathrm{Var}\big(\xi^{(\epsilon)}(x)\big) = V(x).$$

Assumptions

(1) $(\{\xi^{(\epsilon)}(x)\}_{x\in D_\epsilon}, \mathbb{P})$ は独立である $K > 2 \vee \frac{d}{2}$ に対し

$$\sup_{\epsilon\in(0,1)} \sup_{x\in D_\epsilon} \mathbb{E}\left[|\xi^{(\epsilon)}(x)|^K\right] < \infty;$$

(2) ある $U, V \in C_b(D)$ があって全ての $\epsilon > 0$ と $x \in D_\epsilon$ に対し

$$\mathbb{E}[\xi^{(\epsilon)}(x)] = U(x), \quad \mathrm{Var}\big(\xi^{(\epsilon)}(x)\big) = V(x).$$

Expect: $-\Delta^{(\epsilon)} + \xi^{(\epsilon)} \xrightarrow{\epsilon\downarrow 0} -\Delta + U.$

Homogenization of eigenvalues

- $\lambda_D^{(k)}$: $-\Delta + U$ on $H_0^2(D)$ の k 番目に小さい固有値.

Theorem (homogenization)

Assumptions のもとで各 $k \geq 1$ に対して

$$\lambda_{D_\epsilon,\xi}^{(k)} \to \lambda_D^{(k)} \quad \textit{as} \quad \epsilon \downarrow 0$$

in probability.

Fluctuation around the mean

- $\lambda_D^{(k)}$: $-\Delta + U$ on $H_0^2(D)$ の k 番目に小さい固有値.
- $\varphi_D^{(k)}$: 対応する固有関数.

Theorem (fluctuation)

Assumptions のもとで，$\lambda_D^{(k_1)}, \dots, \lambda_D^{(k_n)}$ が単純固有値であるならば,

$$\epsilon^{-d/2}\left(\lambda_{D_\epsilon,\xi}^{(k_1)} - \mathbb{E}\lambda_{D_\epsilon,\xi}^{(k_1)}, \dots, \lambda_{D_\epsilon,\xi}^{(k_n)} - \mathbb{E}\lambda_{D_\epsilon,\xi}^{(k_n)}\right) \xrightarrow{\epsilon\downarrow 0} \mathcal{N}(0,\sigma)$$

が法則収束として成り立つ．ここで

$$\sigma_{ij}^2 := \int_D \varphi_D^{(k_i)}(x)^2 \varphi_D^{(k_j)}(x)^2\, V(x)\, \mathrm{d}x.$$

Where does the fluctuation come from?

独立確率変数の重み付き和

$$\langle \xi^{(\epsilon)}, (\varphi_D^{(k)})^2 \rangle := \sum_{x \in D_\epsilon} \epsilon^d \xi^{(\epsilon)}(x) \varphi_D^{(k)}(x)^2$$

は同じ CLT を満たす.

Where does the fluctuation come from?

独立確率変数の重み付き和

$$\langle \xi^{(\epsilon)}, (\varphi_D^{(k)})^2 \rangle := \sum_{x \in D_\epsilon} \epsilon^d \xi^{(\epsilon)}(x) \varphi_D^{(k)}(x)^2$$

は同じ CLT を満たす.
これと正規化された固有関数 $g_{D_\epsilon,\xi}^{(k)}$ を用いた固有値の表現

$$\lambda_{D_\epsilon,\xi}^{(k)} = \underbrace{\|\nabla^{(\epsilon)} g_{D_\epsilon,\xi}^{(k)}\|_2^2}_{\text{kinetic energy}} + \underbrace{\langle \xi^{(\epsilon)}, (g_{D_\epsilon,\xi}^{(k)})^2 \rangle}_{\text{potential energy}}$$

を比較すると，固有値の揺らぎは potential energy の部分だけから来ているように見える．これは正しく，実際以下が示せる：

$$\mathrm{Var}(\|\nabla^{(\epsilon)} g_{D_\epsilon,\xi}^{(k)}\|_2^2) = o(\epsilon^d).$$

Optimality of the moment assumption

今の仮定

$$\sup_{\epsilon\in(0,1)} \sup_{x\in D_\epsilon} \mathbb{E}\left[|\xi^{(\epsilon)}(x)|^K\right] < \infty \quad \text{for some } K > 2 \vee \frac{d}{2}$$

により高確率で次が成り立つ：

$$\sup_{x\in D_\epsilon} |\xi^{(\epsilon)}(x)| \ll \epsilon^{-2\wedge\frac{2}{d}}.$$

Optimality of the moment assumption

今の仮定

$$\sup_{\epsilon\in(0,1)} \sup_{x\in D_\epsilon} \mathbb{E}\left[|\xi^{(\epsilon)}(x)|^K\right] < \infty \quad \text{for some } K > 2 \vee \frac{d}{2}$$

により高確率で次が成り立つ：

$$\sup_{x\in D_\epsilon} |\xi^{(\epsilon)}(x)| \ll \epsilon^{-2\wedge\frac{2}{d}}.$$

もしこれとは逆に

$$\sup_{x\in D_\epsilon} \xi_-^{(\epsilon)}(x) \gg \epsilon^{-2\wedge\frac{d}{2}},$$

とすると第一固有値は $-\infty$ に発散する. (演習問題)

Related works

Crushed ice problem

- Kac (1974) and Rauch-Taylor (1975): ランダムに" 穴の空いた "領域における $-\Delta$ の固有値の homogenization;
- Figari-Orlandi-Teta (1985) and Ozawa (1990): $d = 3$ で "homogenized eigenvalue" の周りでの中心極限定理.

Poisson-type equation

- Figari-Orlandi-Papanicolaou (1982): $(-\Delta^{(\epsilon)} + \xi^{(\epsilon)})u = f$ の解の homogenization と揺らぎ（Gaussian）.

Without scaling

- Biskup-König (2014): あるクラスの ξ に対して $-\Delta^{(1)} + \xi$ の固有値は extreme value distribution に従う.

Related works 2

- Bal (2007):

$$-\Delta + q(\cdot/\epsilon) \text{ on } D \subset \mathbb{R}^d \ (d \leq 3),$$

について q が stationary かつ以下のいずれか

1. 有界性＋ある混合条件；
2. $\mathbb{E}[q^6(0)] < \infty$ ＋少し強い混合条件

を満たすとき，Poisson 方程式の解及び固有値の homogenization と揺らぎ（Gaussian）．

Related works 2

- Bal (2007):

$$-\Delta + q(\cdot/\epsilon) \text{ on } D \subset \mathbb{R}^d \ (d \leq 3),$$

について q が stationary かつ以下のいずれか
1. 有界性＋ある混合条件；
2. $\mathbb{E}[q^6(0)] < \infty$ ＋少し強い混合条件

を満たすとき，Poisson 方程式の解及び固有値の homogenization と揺らぎ（Gaussian）.

Remark

$-\Delta$ は擬微分作用素にも置換えられるが，*Green* 関数が L^{2+}_{loc} であることが必要.

Proof of the fluctuation (martingale decomposition)

Martingale CLT を使う．簡単のため $\mathbb{E}[\xi] = 0$, $\mathrm{Var}(\xi) = 1$ とし，最小固有値 $\lambda_{D_\epsilon,\xi}$ だけを考える．
$D_\epsilon = \{x_1, \ldots, x_n\}$，$\mathcal{F}_m = \sigma[\xi(x_1), \ldots, \xi(x_m)]$ とする．

$$\begin{aligned}\lambda_{D_\epsilon,\xi} - \mathbb{E}[\lambda_{D_\epsilon,\xi}] &= \sum_{m=1}^{n} \mathbb{E}[\lambda_{D_\epsilon,\xi}|\mathcal{F}_m] - \mathbb{E}[\lambda_{D_\epsilon,\xi}|\mathcal{F}_{m-1}] \\ &=: \sum_{m=1}^{n} Z_m.\end{aligned}$$

以下をチェックすればよい:

(1) $\epsilon^{-d} \sum_m \mathbb{E}[Z_m^2|\mathcal{F}_{m-1}] \xrightarrow{\epsilon\downarrow 0} \int_D \varphi_D(x)^4 \mathrm{d}x$ in prob.;

(2) $\epsilon^{-d} \sum_m \mathbb{E}[Z_m^2 1_{\{|Z_m|>\delta\epsilon^{d/2}\}}|\mathcal{F}_{m-1}] \xrightarrow{\epsilon\downarrow 0} 0$ in prob. (比較的容易)

Proof of the fluctuation (Hadamard's formula)

独立性により

$$\begin{aligned} Z_m &= \mathbb{E}[\lambda_{D_\epsilon,\xi}|\mathcal{F}_m] - \mathbb{E}[\lambda_{D_\epsilon,\xi}|\mathcal{F}_{m-1}] \\ &= \hat{\mathbb{E}}\left[\lambda_{D_\epsilon,\,\xi_{\le m},\,\widehat{\xi}_{>m}} - \lambda_{D_\epsilon,\,\xi_{<m},\,\widehat{\xi}_{\ge m}}\right] \\ &= \hat{\mathbb{E}}\left[\int_{\widehat{\xi}_m}^{\xi_m} \partial_m \lambda_{D_\epsilon,\,\xi_{<m},\,\widetilde{\xi}_m,\,\widehat{\xi}_{>m}} \mathrm{d}\widetilde{\xi}_m\right] \\ &= \hat{\mathbb{E}}\left[\int_{\widehat{\xi}_m}^{\xi_m} \epsilon^d g^2_{D_\epsilon,\,\xi_{<m},\,\widetilde{\xi}_m,\,\widehat{\xi}_{>m}}(x_m) \mathrm{d}\widetilde{\xi}_m\right]. \end{aligned}$$

最後の=は Hadamard の第一変分公式:

$$\partial_m \lambda_{D_\epsilon,\xi} = \epsilon^d g_{D_\epsilon,\xi}(x_m)^2.$$

Proof of the fluctuation (heuristics)

Homogeniation の結果から以下が期待される：

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z_m^2|\mathcal{F}_{m-1}] &= \epsilon^{2d} \int \mathbb{P}(d\xi_m)\hat{\mathbb{E}}\left[\int_{\widehat{\xi}_m}^{\xi_m} g^2_{D_\epsilon,\xi_{<m},\widetilde{\xi}_m,\widehat{\xi}_{>m}}(x_m)d\widetilde{\xi}_m\right]^2 \\
&\overset{?}{\sim} \epsilon^{2d} \int \mathbb{P}(d\xi_m)\hat{\mathbb{E}}\left[\int_{\widehat{\xi}_m}^{\xi_m} \varphi_D^2(x_m)d\widetilde{\xi}_m\right]^2 \\
&= \epsilon^{2d}\varphi_D(x_m)^4
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \epsilon^{-d}\sum_m \mathbb{E}[Z_m^2|\mathcal{F}_{m-1}] \sim \sum_m \epsilon^d \varphi_D(x_m)^4 \sim \int_D \varphi_D(x)^4 dx.
$$

しかし"dummy variable" $\widetilde{\xi}_m$ のせいで，homogenization のような in probability の結果だけから $\overset{?}{\sim}$ を示すのは困難.

Proof of the replacement

証明の本質的部分は

$$\int \mathbb{P}(\mathrm{d}\xi_m)\hat{\mathbb{E}}\left[\int_{\widehat{\xi}_m}^{\xi_m} g^2_{D_\epsilon,\,\xi_{<m},\,\widetilde{\xi}_m,\,\widehat{\xi}_{>m}}(x_m)\mathrm{d}\widetilde{\xi}_m\right]^2$$
$$\overset{?}{\sim} \int \mathbb{P}(\mathrm{d}\xi_m)\hat{\mathbb{E}}\left[\int_{\widehat{\xi}_m}^{\xi_m} g^2_{D_\epsilon,\,\xi_{<m},\,\xi_m,\,\widehat{\xi}_{>m}}(x_m)\mathrm{d}\widetilde{\xi}_m\right]^2.$$

Lemma

$$\partial_m \log g_{D_\epsilon,\xi}(x_m) = \left\langle \delta_{x_m}, (H_{D_\epsilon,\xi} - \lambda_{D_\epsilon,\xi})^{-1} P_1^{\perp}\delta_{x_m}\right\rangle$$
$$=: \epsilon^d G_{D_\epsilon}(x_m, x_m; \xi)$$

ここで $P_1^{\perp}$ は $\langle g_{D_\epsilon,\xi}\rangle^{\perp}$ への直交射影.

Proof of the replacement (comparison)

十分大きい $\lambda > 0$ に対し,

$$
\begin{aligned}
G_{D_\epsilon}(x_m, x_m; \xi) &= \sum_{k \geq 2} \frac{1}{\lambda^{(k)}_{D_\epsilon,\xi} - \lambda_{D_\epsilon,\xi}} g^{(k)}_{D_\epsilon,\xi}(x_m)^2 \\
&\lesssim \sum_{k \geq 1} \frac{1}{\lambda^{(k)}_{D_\epsilon,\xi} + \lambda} g^{(k)}_{D_\epsilon,\xi}(x_m)^2 \\
&= (H_{D_\epsilon,\xi} + \lambda)^{-1}(x_m, x_m).
\end{aligned}
$$

もし $H_{D_\epsilon,\xi}$ が $H_{D_\epsilon,0}$ で置換えられたとすると，以下の評価があるので OK:

$$
(H_{D_\epsilon,0} + \lambda)^{-1}(x_m, x_m) \lesssim \begin{cases} 1, & d = 1, \\ \log \frac{1}{\epsilon}, & d = 2, \\ \epsilon^{2-d}, & d \geq 3. \end{cases}
$$

Proof of the replacement (Khas'minskii's lemma)

$$(H_{D_\epsilon,\xi}+\lambda)^{-1}(x_m,x_m)=\int_0^\infty e^{-t(H_{D_\epsilon,\xi}+\lambda)}(x_m,x_m)\mathrm{d}t$$

と書いて ⋯

Khas'minskii's lemma

$$\exists\tau>0,\ \sup_{z\in D_\epsilon} I_{\tau,z}(\xi):=\sup_{z\in D_\epsilon}\int_0^\tau e^{-sH_{D_\epsilon,0}}\xi_-(z)\mathrm{d}s<1/2$$
$$\Rightarrow e^{-tH_{D_\epsilon,\xi}}(x_m,x_m)\le e^{t\zeta(\tau)}e^{-tH_{D_\epsilon,0}}(x_m,x_m).$$

Proof of the replacement (Khas'minskii's lemma)

$$(H_{D_\epsilon,\xi}+\lambda)^{-1}(x_m,x_m)=\int_0^\infty e^{-t(H_{D_\epsilon,\xi}+\lambda)}(x_m,x_m)\mathrm{d}t$$

と書いて ⋯

Khas'minskii's lemma

$$\exists\tau>0,\ \sup_{z\in D_\epsilon} I_{\tau,z}(\xi):=\sup_{z\in D_\epsilon}\int_0^\tau e^{-sH_{D_\epsilon,0}}\xi_-(z)\mathrm{d}s<1/2$$
$$\Rightarrow e^{-tH_{D_\epsilon,\xi}}(x_m,x_m)\le e^{t\zeta(\tau)}e^{-tH_{D_\epsilon,0}}(x_m,x_m).$$

Remark

確率論的にはこれは $E^z[\int_0^\tau \xi_-(X_s)\mathrm{d}s]$ の評価から $E^z[e^{-\int_0^t \xi(X_s)\mathrm{d}s}]$ の評価を導くというものである．

Proof of the replacement (Khas'minskii's lemma)

$$(H_{D_\epsilon,\xi}+\lambda)^{-1}(x_m,x_m)=\int_0^\infty e^{-t(H_{D_\epsilon,\xi}+\lambda)}(x_m,x_m)\mathrm{d}t$$

と書いて ···

Khas'minskii's lemma

$$\exists\tau>0,\ \sup_{z\in D_\epsilon} I_{\tau,z}(\xi):=\sup_{z\in D_\epsilon}\int_0^\tau e^{-sH_{D_\epsilon,0}}\xi_-(z)\mathrm{d}s<1/2$$
$$\Rightarrow e^{-tH_{D_\epsilon,\xi}}(x_m,x_m)\le e^{t\zeta(\tau)}e^{-tH_{D_\epsilon,0}}(x_m,x_m).$$

もし上のような τ が見つかれば,

$$\begin{aligned}(H_{D_\epsilon,\xi}+\lambda)^{-1}(x_m,x_m)&\le\int_0^\infty e^{-t(H_{D_\epsilon,0}+\lambda-\zeta(\tau))}(x_m,x_m)\mathrm{d}t\\&=(H_{D_\epsilon,0}+\lambda-\zeta(\tau))^{-1}(x_m,x_m).\end{aligned}$$

Proof of the replacement (finding τ)

$\mathbb{E}[I_{\tau,z}] = \mathbb{E}[\int_0^\tau e^{-sH_{D_\epsilon,0}}\xi_-(z)ds] \le \tau \max_y \mathbb{E}[\xi_-(y)]$. は $\tau \downarrow 0$ でいくらでも小さくできる．一方で

$$
\begin{aligned}
|I_{\tau,z}(\xi) - I_{\tau,z}(\eta)| &\le \int_0^\tau \|e^{-s\Delta^{(\epsilon)}}(z,\cdot)\|_2 \|\xi - \eta\|_2 ds \\
&= \|\xi - \eta\|_2 \int_0^\tau e^{-2s\Delta^{(\epsilon)}}(z,z)^{1/2} ds \\
&\lesssim \|\xi - \eta\|_2 \begin{cases} \tau^{1-d/4}\epsilon^{d/2}, & d \le 3, \\ \epsilon^2 \log(\tau\epsilon^{-2}), & d = 4, \\ \epsilon^2, & d \ge 5, \end{cases}
\end{aligned}
$$

に注意すると，Talagrand の不等式により $I_{\tau,z}(\xi)$ は（小さい）平均値の周りに“ 集中 ”している．

Proof of the replacement (finding τ)

$\mathbb{E}[I_{\tau,z}] = \mathbb{E}[\int_0^\tau e^{-sH_{D_\epsilon,0}}\xi_-(z)ds] \le \tau \max_y \mathbb{E}[\xi_-(y)]$. は $\tau \downarrow 0$ でいくらでも小さくできる．一方で

$$
\begin{aligned}
|I_{\tau,z}(\xi) - I_{\tau,z}(\eta)| &\le \int_0^\tau \|e^{-s\Delta^{(\epsilon)}}(z,\cdot)\|_2 \|\xi - \eta\|_2 ds \\
&= \|\xi - \eta\|_2 \int_0^\tau e^{-2s\Delta^{(\epsilon)}}(z,z)^{1/2} ds \\
&\lesssim \|\xi - \eta\|_2 \begin{cases} \tau^{1-d/4}\epsilon^{d/2}, & d \le 3, \\ \epsilon^2 \log(\tau\epsilon^{-2}), & d = 4, \\ \epsilon^2, & d \ge 5, \end{cases}
\end{aligned}
$$

に注意すると，Talagrand の不等式により $I_{\tau,z}(\xi)$ は（小さい）平均値の周りに“ 集中 ”している．
さらに上の評価から，$I_{\tau,z}(\xi)$ は一点で ξ_m の値を変えてもほとんど影響を受けない（dummy variable が消せた！）．

Thank you!

Proof of the homogenization

We focus on the first eigenvalue and drop the superscript $^{(1)}$.

Rayleigh-Ritz formula

$$\lambda_{D_\epsilon,\xi} = \inf_{g\in\ell_0^2(D_\epsilon),\|g\|_2=1} \left\{ \|\nabla^{(\epsilon)} g\|_2^2 + \langle \xi, g^2\rangle \right\},$$

$$\lambda_D = \inf_{\psi\in H_0^1(D),\|\psi\|_2=1} \left\{ \|\nabla \psi\|_2^2 + \langle U, \psi^2\rangle \right\}.$$

$\to$ $g_{D_\epsilon,\xi}$ and φ_D are minimizers.

- $\lambda_{D_\epsilon,\xi} \lesssim \lambda_D$ by substituting φ_D to the first formula;
- $\lambda_{D_\epsilon,\xi} \gtrsim \lambda_D$ by substituting $g_{D_\epsilon,\xi}$ to the second formula.

Proof of the homogenization 2

The first step

$$\begin{aligned}\lambda_{D_\epsilon,\xi} &\le \|\nabla^{(\epsilon)}\varphi_D\|_2^2 + \langle \xi, \varphi_D^2\rangle \\ &\xrightarrow{\epsilon\downarrow 0} \|\nabla\varphi_D\|_2^2 + \langle U, \varphi_D^2\rangle = \lambda_D\end{aligned}$$

is nothing but the weak law of large numbers.

Proof of the homogenization 2

The first step

$$\lambda_{D_\epsilon,\xi} \leq \|\nabla^{(\epsilon)}\varphi_D\|_2^2 + \langle \xi, \varphi_D^2 \rangle$$
$$\xrightarrow{\epsilon\downarrow 0} \|\nabla\varphi_D\|_2^2 + \langle U, \varphi_D^2 \rangle = \lambda_D$$

is nothing but the weak law of large numbers.

The second step

$$\underbrace{\|\nabla g_{D_\epsilon,\xi}\|_2^2 + \langle U, g_{D_\epsilon,\xi}^2 \rangle}_{\text{need an interpolation}} \sim \|\nabla^{(\epsilon)} g_{D_\epsilon,\xi}\|_2^2 + \underbrace{\langle \xi, g_{D_\epsilon,\xi}^2 \rangle}_{\text{randomly weighted sum}}$$

is more problematic.

Proof of the homogenization 3

We use the following two tools:

Finite element method

$\exists$ piecewise affine interpolation $\widetilde{g_{D_\epsilon,\xi}}$ such that $\|\nabla^{(\epsilon)} g_{D_\epsilon,\xi}\|_2 = \|\nabla \widetilde{g_{D_\epsilon,\xi}}\|_2$.

Elliptic regularity

$\|\nabla^{(\epsilon)} g_{D_\epsilon,\xi}\|_2^2$ is bounded (with high probability).

Proof of the homogenization 3

We use the following two tools:

Finite element method

$\exists$ piecewise affine interpolation $\widetilde{g_{D_\epsilon,\xi}}$ such that $\|\nabla^{(\epsilon)} g_{D_\epsilon,\xi}\|_2 = \|\nabla \widetilde{g_{D_\epsilon,\xi}}\|_2$.

Elliptic regularity

$\|\nabla^{(\epsilon)} g_{D_\epsilon,\xi}\|_2^2$ is bounded (with high probability).

H^1-boundedness & Poincaré inequality

$$\Downarrow$$

$g_{D_\epsilon,\xi}$ can be well-aproximated by a step function with large plateaus.

For a step function, we can use weak LLN (with a tail bound) step-wise. $\square$

Moser's iteration

Let $\lambda := \lambda_{D_\epsilon,\xi}$, $g := g_{D_\epsilon,\xi}$ and $s \geq 1$.

$$\begin{aligned}
\|\nabla g^s\|_2^2 &= \langle s g^{s-1} \nabla g, s g^{s-1} \nabla g \rangle \\
&= s^2 \langle g^{2s-2} \nabla g, \nabla g \rangle \\
&= c(s) \langle \nabla g^{2s-1}, \nabla g \rangle \\
&= c(s) \langle g^{2s-1}, -\Delta g \rangle \\
&= c(s) \langle g^{2s-1}, (\lambda - \xi) g \rangle \\
&\leq c(s) \|\lambda_+ - \xi\|_r \|g\|_{2sr'}^{2s}.
\end{aligned}$$

We know λ_+ is bounded (with high probablity) and $\|\xi\|_r$ as well if $r < K$. By our moment assumption, we may take $r > d/2$ and hence $r' < d/(d-2)$.

Moser's iteration 2

We get for $g := g_{D_\epsilon,\xi}$ and $s \geq 1$,

$$\|\nabla g^s\|_2^2 \leq c(s)\|g\|_{2sr'}^{2s}.$$

Moser's iteration 2

We get for $g := g_{D_\epsilon,\xi}$ and $s \geq 1$,

$$\|\nabla g^s\|_2^2 \leq c(s)\|g\|_{2sr'}^{2s}.$$

Sobolev's inequality tells us

$$\|\nabla g^s\|_2^2 \geq c(D,q)\|g^s\|_q^2, \quad (2 \leq q < 2d/(d-2)).$$

We thus infer a recursion relation

$$\|g\|_{sq}^{2s} \leq c(D,q,s)\|g\|_{2sr'}^{2s}$$

which bounds a stronger L^p-norm by a weaker one when $q > 2r'$.

- Iteration $\Rightarrow \forall p \geq 1$, $\|g\|_p$ is bounded, and $\|\nabla g\|_2$ as well.