

Anderson 模型に関連する話題

福島 竜輝

(Ryoki Fukushima)

京都大学数理解析研究所

(Research Institute of Mathematical Sciences, Kyoto University)

1 導入

Anderson 模型とはランダムなポテンシャル $(V_\omega, \mathbb{P})$ を伴う Schrödinger 作用素

$$H_\omega = -\kappa\Delta + V_\omega \quad (1)$$

のことである．これは欠陥や不純物を含む結晶中での電子の振る舞いを記述するモデルであるため $\mathbb{Z}^d$ や $\mathbb{R}^d$ 上で考えることが多く本講演でもその場合を主に述べるが，他の空間の上でもよい．ただし $\mathbb{Z}^d$ や $\mathbb{R}^d$ 上で考えるときは， V_ω は平行移動不変かつエルゴード的なものを考える．このモデルは物理学者の Anderson [2] によって導入され，不純物の影響が大きいときには周期ポテンシャルの時とは対照的に電子が局在する場合があることが議論されている．

この講演では Anderson の物理的直観にもとづく議論の数学的定式化や，その周辺で発展した理論の一部について解説する．講演者の興味により，かなり放物型の問題に偏った紹介になっていることをはじめにお断りしておく¹．

2 Anderson 局在の数学的定式化

Anderson 局在の数学的定式化は以下のように述べられる．

Definition. (1) $\sigma(H_\omega)$ の下端付近が固有値のみからなり，対応する固有関数が遠方で指数減衰するとき spectral localization が起こるという．

(2) $p > 0$ に対して $\sigma(H_\omega)$ の下端に十分近いの区間 I をとれば，任意の台コンパクトな ϕ に対して

$$\mathbb{E} \left[\sup_t \int |x|^p |e^{-itH_\omega} 1_I(H_\omega) \phi(x)|^2 dx \right] < \infty \quad (2)$$

となるとき，dynamical localization が起こるという．

Remark. より一般に $-\kappa\Delta + V_{\text{per}} + V_\omega$ と周期ポテンシャルも加えると一般にはスペクトルは band 構造を持ち，下端以外の band edge でも上記のような局在が起こることはある．

この (1) は低エネルギーに対応する状態が局在していること，(2) はその局在状態から出発すると時間発展しても粒子は有界に留まることを意味しており，いずれも自然な定義と言える．上の定義の (1) と (2) は論理的には独立である．実は (2) から (1) は固有関数の指数減衰を除けば従うことが知られているが，(1) $\Rightarrow$ (2) が成り立たないことは Del Rio, Jitomirskaya, Last, Simon [5] にポテンシャルがランダムでない場合の例が述べられている．しかしランダムポテンシャルの場合にこれらの局在を示す二つの主要な方法である Fröhlich-Spencer [6] に始まる multi scale analysis

¹放物型 Anderson 模型に関しては，少し古いが入門的な解説記事 Gärtner-König [8] がある．また最新の survey König-Wolff [17] が準備中である．

と Aizenman-Molchanov [1] に始まる fractional moment method のいずれかが機能するときは、実際には (2) も成り立つ．詳細は [21, 13] などを参照されたい．また入門的解説としては [14] が非常に良いと思う．上の方法はいずれも box 型の領域 $\Lambda \uparrow \mathbb{R}^d$ (or $\mathbb{Z}^d$) に制限したレゾナント $(H_\omega - E)|_\Lambda^{-1}$ の指数減衰を示す方法であるが、いずれにしても当初は各点での $V_\omega(x)$ の分布がある程度 regularity を持つことを仮定していたため、基本的な対象の一つであるベルヌーイ分布に適用できないという問題があった．しかし multi scale analysis は 2005 年に Bourgain-Kenig [4] によってベルヌーイ分布に適用する方法が発見された（但し原論文は難解なので、もう少し詳しく書いてある Germinet-Klein [12] などで勉強した方が良さそうである．）これにより $\mathbb{Z}^d$ 上で独立同分布の V_ω に対する Anderson 局在の証明は一段落した感があるが、一方で高さではなく配置がランダムな random displacement model などではまだ未解決の問題もある．また、3 次元以上で κ が大きいときには絶対連続スペクトルが存在することも予想されているが、これも長年にわたって未解決である．

3 放物型の問題

Anderson 模型に対して放物型の問題

$$\partial_t u(t, x) = -H_\omega u(t, x) = \kappa \Delta u(t, x) - V_\omega(x) u(t, x) \quad (3)$$

を考えることもできる．初期値としては $u_0(\cdot) \equiv 1$ または $u_0(\cdot) = \delta_0(\cdot)$ を取ることが多い．この方程式は $\kappa \Delta$ による正則化の効果と V_ω による非正則化の効果の競合がある形になっており、結果的に解 $u(t, \cdot)$ がどのような形状になるかはそれ自体興味深いし、後で述べるように放物型の問題の解析からスペクトルに関する情報を引き出すこともできる．このような問題を初めて考察したのは Gärtner-Molchanov [10] であり、そこでは Anderson 局在を仮定するとある λ_c 以下のスペクトルは固有値だから

$$u(t, x) = \sum_{\lambda_i < \lambda_c} e^{-t\lambda_i} \langle \phi_i, u_0 \rangle \phi_i(x) + \int_{\lambda_c}^{\infty} e^{-t\lambda} dE_\lambda u_0 \quad (4)$$

と展開できて、右辺第二項は無視できるから解は鋭いピークを重ね合わせたような形状になるという直観が説明されている．もちろん厳密には右辺第一項の和に限っても $\langle \phi_i, u_0 \rangle$ の符号が不明である（一方で解自身は非負である）ことなどから、上の表現から多くを読み取ることはできない．しかし [10] をはじめ多くの論文でこの描像の傍証は示されており、現在まで解の形状を記述する研究が行われてきた．

放物型の問題が確率論の研究者の興味を引く一つの理由は、その解が Feynman-Kac 表現

$$u(t, x) = E_x \left[u_0(X_t) \exp \left\{ - \int_0^t V_\omega(X_s) ds \right\} \right] \quad (5)$$

を持つことにある．ここで $((X_s)_{s \geq 0}, P_x)$ は x を出発点とする $\kappa \Delta$ -ランダムウォークである．これにより以下に述べるように大偏差原理を用いた解析が可能になるほか、例えば初期値が恒等的に 1 のとき

$$u(t, 0) = \sum_x E_0 \left[\exp \left\{ - \int_0^t V_\omega(X_s) ds \right\} : X_t = x \right] \quad (6)$$

であることに注意すると、Feynman-Kac 公式において主要な貢献をする random walk の路の挙動を調べることにより $u(t, \cdot)$ がどのように分布しているかを理解することができる．

本節では $u(t, \cdot)$ の分布を調べる出発点となる $u(t, 0)$ の漸近挙動に関するこれまでの研究を概観する．なお以下では簡単のため、とくに断らなければ空間は $\mathbb{Z}^d$ の場合を考えるものとする²．

²連続空間の場合にはランダムポテンシャルの標準的な選択が異なるために、色々と違った状況が現れる．

3.1 モーメントの漸近挙動

さて, $u(t, 0)$ の挙動を知るためにまずモーメントを調べることは自然であろう. いま $\{V_\omega(x)\}_{x \in \mathbb{Z}^d}$ が独立同分布の場合に $H(t) = \log \mathbb{E}[e^{-tV_\omega(0)}]$ とおくとランダムウォークの経験分布を $L_t(x) = \frac{1}{t} \int_0^t 1_{\{x\}}(X_s) ds$ として

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[u(t, 0)] &= \mathbb{E} \otimes E_0 \left[\exp \left\{ - \int_0^t V_\omega(X_s) ds \right\} \right] \\ &= \mathbb{E} \otimes E_0 [\exp \{-t \langle L_t, V_\omega \rangle\}] \\ &= E_0 \left[\exp \left\{ \sum_x H(tL_t(x)) \right\} \right] \end{aligned} \quad (7)$$

と書き直せる. ここで H が凸関数であることに注意すると Jensen の不等式を使って右辺 $\leq \exp\{H(t)\}$ が分かるが, 一方で左辺において平均を $\{X_s = 0, 0 \leq s \leq t\}$ に制限することにより $\geq \exp\{H(t) - 2d\kappa t\}$ である. いま例えば $V_\omega(0)$ の分布が下に有界でないとすると $H(t) \gg t$ ($t \rightarrow \infty$) であるから, $\mathbb{E}[u(t, 0)]$ の漸近挙動の主要項は $\exp\{H(t)\}$ であることが分かる. これは $u(t, 0)$ の主要項が V_ω が非常に大きい値をとっている点を訪れたランダムウォークだけによって決まっていることを示している. しかし主要項だけを見ると $x \neq y$ であっても上と同じ議論で

$$\mathbb{E}[u(t, x)u(t, y)] = \exp\{2H(t)(1 + o(1))\}, \quad t \rightarrow \infty \quad (8)$$

となってしまうことから分かるように, $u(t, \cdot)$ の“形状”を知るためにはより高次の漸近挙動を見る必要がある. そこで $\log \mathbb{P}(V_\omega(0) \leq r)$ の $r \rightarrow -\infty$ における regularity の仮定として, $H(t)$ が $t \rightarrow \infty$ においてある $\gamma \geq 0$, 正則変動関数 $\eta(t) = t^{\gamma+o(1)}$, および $\hat{H}$ によって $H(ty) - yH(t) \sim \eta(t)\hat{H}(y)$ と表せるとすると

$$\begin{aligned} \sum_x H(tL_t(x)) &= \sum_x L_t(x)H(t) + [H(tL_t(x)) - L_t(x)H(t)] \\ &\sim H(t) + \sum_x \eta(t)\hat{H}(L_t(x)) \end{aligned} \quad (9)$$

と書き直せる. これと Donsker-Varadhan の大偏差原理

$$P_0(L_t(\cdot) \approx \phi(\cdot)^2) = \exp\{-\kappa t \|\nabla \phi\|_2^2(1 + o(1))\}, \quad t \rightarrow \infty \quad (10)$$

をあわせて, いわゆる Laplace 原理 (大偏差原理の文脈では Varadhan の補題と呼ばれる) が成り立つとすると

$$\mathbb{E}[u(t, 0)] = \exp \left\{ H(t) - \inf_{\phi \in \ell^2(\mathbb{Z}^d), \|\phi\|_2=1} \left\{ \sum_x \kappa t |\nabla \phi(x)|^2 - \eta(t)\hat{H}(\phi^2(x)) \right\} (1 + o(1)) \right\} \quad (11)$$

となる³. さて, 実は正則変動関数の一般論から $\hat{H}$ の形は $\rho > 0$ を定数として

$$\hat{H}(y) = \rho \begin{cases} \frac{y-y^\gamma}{1-\gamma} & \text{if } \gamma \neq 1, \\ y \log y & \text{if } \gamma = 1 \end{cases} \quad (12)$$

これについては部分的には 2009 年秋の数学会講演の予稿に書いたので興味があれば参照されたい. 原稿は <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~ryoki> から入手できる.

³(10) から (11) にかけてのここでの記述は厳密に言えば記法にも議論にもいろいろと問題がある. 技術的な問題点などに関しては, 例えば [22] の introduction を参照されたい.

に限られることが知られている．この形と適当なスケーリングにより，一般に上の第二項は時間 t の関数と時間に依存しない変分問題の積に書き直すことができる．それが $\gamma > 1, < 1, = 1$ に応じてどのような形になるかを，簡単のためにまず $\eta(t) = t^\gamma$ の場合に観察しよう．

$\gamma > 1$ の場合: これは $\log \mathbb{P}(V_\omega(0) \leq -r)$ が $r \rightarrow \infty$ で漸近的に多項式である状況であり，例えば Gauss 分布はこのクラスである．このとき (11) の変分問題は（各項が非負となるように書けば）

$$\inf_{\phi \in \ell^2(\mathbb{Z}^d), \|\phi\|_2=1} \left\{ \sum_x \kappa t |\nabla \phi(x)|^2 + \rho t^\gamma \frac{\phi^2(x) - \phi^{2\gamma}(x)}{\gamma - 1} \right\} \quad (13)$$

となるが， $t^\gamma \gg t$ などに注意すると容易に $\phi = 1_{\{0\}}$ の時に最小が実現されてその値は $2d\kappa t$ であることが分かる．即ち Feynman-Kac 表現に主要な貢献をするランダムウォークは原点に留まるものであり，従って $u(t, \cdot)$ は一点に集中していると考えられる．

$\gamma < 1$ の場合: これは $V_\omega(0)$ が下に有界，例えば非負である場合に対応し，とくに $\gamma > 0$ となるのは $\text{essinf } V_\omega(0)$ の近くに値をとる確率が指数的に小さい場合である．このとき (11) の変分問題は

$$\inf_{\phi \in \ell^2(\mathbb{Z}^d), \|\phi\|_2=1} \left\{ \sum_x \kappa t |\nabla \phi(x)|^2 + \rho t^\gamma \frac{\phi^{2\gamma}(x) - \phi^2(x)}{1 - \gamma} \right\} \quad (14)$$

と書き直せて， $t \gg t^\gamma$ であるから勾配の小さい平坦な ϕ が最小化に関わる．とくにこのとき ϕ^2 の項は無視できる．そこで $\phi(\cdot) \rightarrow r^{d/2} \phi(r\cdot)$ とスケーリングを行うと最適なスケールは $r = t^{\frac{1-\gamma}{d+2-\gamma}}$ であることが分かり，上の変分問題は漸近的に

$$t^{\frac{d+\gamma}{d+2-\gamma}} \inf_{\phi \in L^2(\mathbb{R}^d), \|\phi\|_2=1} \left\{ \int \kappa |\nabla \phi(x)|^2 + \frac{\rho}{1-\gamma} \phi^{2\gamma}(x) dx \right\} \quad (15)$$

と同値になる．スケーリングにより連続空間での変分問題に置き換わっていることに注意．これにより下限を実現する ϕ が回転対称で，平行移動を除いて一意であることなども分かっている．従ってこの場合， $u(t, \cdot)$ は $t^{\frac{1-\gamma}{d+2-\gamma}}$ くらいの幅に広がった分布をしていると考えられる．このオーダーは $o(t^{1/2})$ であるから，依然として熱方程式よりはずっと拡散が遅い．

$\gamma = 1$ の場合: これは $\mathbb{P}(V_\omega(0) \leq r) = \exp\{-\exp\{-r\}\}$ に相当し，この場合 (11) の変分問題は

$$t \inf_{\phi \in \ell^2(\mathbb{Z}^d), \|\phi\|_2=1} \left\{ \sum_x \kappa |\nabla \phi(x)|^2 + \rho \phi^2(x) \log \phi^2(x) \right\} \quad (16)$$

となり，これは $1_{\{0\}}$ とは異なる ϕ を解に持つ．従ってこの場合は $u(t, \cdot)$ は $O(1)$ の広がりを持っており，その意味で臨界的であると言える．しかし上の変分問題の解の一意性については ρ が十分大きいときに示されているのみで，一般には不明である．以下に述べるが空間が連続ならばこの変分問題は明示的な一意解を持つことが知られており，離散であることに特有の難しさがあるのである．

最後にここまでは $\eta(t) = t^\gamma$ に限ったが，一般にはある緩変動関数 $L(t)$ があって $\eta(t) = t^\gamma L(t)$ という形になる． $\gamma \neq 1$ のときにはこのことはほとんど上の議論に影響を及ぼさないが， $\gamma = 1$ のときは変分問題の第一項と第二項のオーダーが変わるため状況が変わる．結果的には $L(t) \rightarrow \infty$ のときは $\gamma > 1$ と同様に一点に集中することになり， $L(t) \rightarrow 0$ のときは $\gamma < 1$ と似ているがスケーリングが緩増加になり，変分問題としては

$$\inf_{\phi \in L^2(\mathbb{R}^d), \|\phi\|_2=1} \left\{ \int \kappa |\nabla \phi(x)|^2 + \rho \phi^2(x) \log \phi^2(x) dx \right\} \quad (17)$$

が現れる．これについては ϕ がある Gauss 分布の密度関数の定数倍のときに（平行移動を除いて）一意的に最小を達成することが知られている．以上で $\{V_\omega(x)\}_{x \in \mathbb{Z}^d}$ が独立同分布で分布関数の末尾に適当な regularity を仮定したときには，4 種類の状況しか現れないことが分かったわけで van der Hofstad-König-Mörters [22] はこれらを universality classes と呼んでいる．それぞれのクラスは $\phi = 1_{\{0\}}$ が変分問題の下限を与えるときに single peak, $\gamma < 1$ のときに bounded, (16) が現れるときに double exponential, (17) が現れるときに almost bounded と呼ばれている．以上の漸近挙動の導出は，double exponential よりも heavy tail の場合は Grüter-Molchanov [11], bounded の場合は Biskup-König [3], almost bounded の場合は van der Hofstad-König-Mörters [22] による．

3.2 Lifshitz tail

前小節で議論したモーメントの漸近挙動は H_ω を大きな領域に制限したときのスペクトル分布と密接な関連がある．実際 $\lambda_i^\omega(B(0, N))$ を H_ω の半径 N の球での i 番目に小さい Dirichlet 固有値とすると

$$N(\lambda) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{|B(0, N)|} \mathbb{E}[\#\{\lambda_i^\omega(B(0, N)) \leq \lambda\}]$$

で定義される integrated density of states と呼ばれる量⁴の $\inf \sigma(H_\omega)$ 付近での漸近挙動を導くことができる．このためには (3) の基本解を $p_t^\omega(x, y)$ として $\mathbb{E}[u(t, 0)] \approx \mathbb{E}[p_t^\omega(0, 0)]$ であるという事実を用いる．これは $u(t, \cdot)$ が局在していると信じるならば自然なことである．すると $(V_\omega, \mathbb{P})$ のエルゴード性から

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[p_t^\omega(0, 0)] &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{|B(0, N)|} \sum_{x \in B(0, N)} p_t^\omega(x, x) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{|B(0, N)|} \sum_{x \in B(0, N)} \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\lambda_i^\omega(B(0, N))t} |\phi_i^\omega(x)|^2 dx \\ &= (\mathcal{L}N)(t) \end{aligned}$$

となるから N の Laplace 変換の遠方での漸近挙動が分かっていることになる．したがって粗っぽく言えば Tauber 型定理により， $N(\lambda)$ の λ が小さいときの漸近挙動が分かるわけである⁵．とくに一般に Lifshitz tail effect と呼ばれる，状態密度が基底状態付近で指数的に希薄になっている現象が観察され，このことは Anderson 局在を示す multi scale analysis における一つのステップとして使われる（状態密度のオーダーは，例えば $V_\omega(0)$ が $[0, 1]$ 上の一様分布の場合 $\exp\{-c\lambda^{-d/2}\}$, $\lambda \downarrow 0$ である．）

さらに integrated density of states の定義から直ちに従う

$$\mathbb{P}(\lambda_1^\omega(B(0, N)) \leq \lambda) \lesssim |B(0, N)|N(\lambda) \quad (18)$$

は次の小節で見るとように $u(t, 0)$ の ω 毎の漸近挙動の解析においても重要な役割を果たす．

3.3 ω 毎の漸近挙動

ω を固定するごとの $u(t, 0)$ の漸近挙動は本質的にそのモーメントの漸近挙動から決定される．その議論の概略をここでは紹介する．

⁴実は平均をとらずに極限をとっても同じ値に収束する．

⁵ここで λ が小さいというのは $\inf \sigma(H_\omega)$ に近いという意味である．

まず $B_t = B(0, t(\log t)^2)$ とする．これぐらい大きくとっておけば(多くの V_ω に対して) Feynman-Kac 表現において B_t を脱出するランダムウォークの貢献は無視できることが分かる．従って

$$u(t, 0) \sim E_0 \left[\exp \left\{ - \int_0^t V_\omega(X_s) ds \right\} : X_{[0,t]} \subset B_t \right] \quad (19)$$

であるが, この右辺は B_t の外に Dirichlet 条件を課した放物型問題の解であるから固有関数展開により

$$u(t, 0) \approx \exp \{ -t\lambda_1^\omega(B_t) \} \quad (20)$$

となる．つまり $\lambda_1^\omega(B_t)$ の漸近挙動を調べればよいことになった訳だが, 下からの評価は (18) から簡単に得られる．実際そこで $N = t(\log t)^2$ ととって λ_t を (18) の右辺が $t_k = 2^k$ で総和可能な程度にとれば Borel-Cantelli の第一補題により十分大きい t_k に対しては $\lambda_1^\omega(B_{t_k}) \geq \lambda_{t_k}$ が従う．この λ_t は $N(\lambda_t) \approx t^{-d}$ を満たすものであり, 多くの場合 $\log t$ の小さいべきくらいの緩変動関数になるので, t_k と t_{k+1} の間は自動的に埋まる．従って $\mathbb{P}$ -a.e. ω に対して

$$u(t, 0) \leq \exp \{ -t\lambda_t(1 + o(1)) \} \quad (21)$$

となる．(例えば $V_\omega(0)$ が $[0, 1]$ 上の一様分布の場合 $\lambda_t \approx c'(\log t)^{-2/d}$, $t \rightarrow \infty$ とでき, よって $u(t, 0) \lesssim \exp \{ -c't/(\log t)^{2/d} \}$ となる)． $u(t, 0)$ の ω 毎の上からの評価は, モーメントの漸近挙動を調べたのと同じ論文でそれぞれの universality class について示されているが, そこでの手法はかなり込み入っている．ここで述べたように Lifshiz tail を経由すれば簡単になるという観察は [7] による．

次に $\lambda_1^\omega(B_t)$ の上からの評価を述べよう．こちらの方が描像が分かり易く自然なのであるが, 技術的にはいろいろと面倒な部分が多いので, アイデアだけ説明する(それぞれの universality class に関する正確な議論はモーメントの漸近挙動と同じ論文を参照．Lifshiz tail から粗い評価を出す方法は [7] にも書いてある)．なお以下の議論は少なくとも V_ω に強い混合性を要求するので, 簡単のため $\mathbb{Z}^d$ 上独立とする．上の (20) を $\mathbb{P}$ で積分すると $\mathbb{E}[u(t, 0)] \approx \mathbb{E}[\exp \{ -t\lambda_1^\omega(B_t) \}]$ となるから, モーメントの漸近挙動は $\lambda_1^\omega(B_t)$ の Laplace 変換のそれに対応している．従ってここから $\mathbb{P}(\lambda_1^\omega(B(0, R_t)) \leq \lambda_t)$ という形の大偏差の確率が下から評価できると思うのはそう不自然なことではなく, 結果的には (18) を反転したものになる⁶．ただし R_t は V_ω の法則に依って決めるもので, 高々 $\log t$ の冪くらいに取ることができる．従って上で使ったのと同じ λ_t に対して

$$\mathbb{P}(\lambda_1^\omega(B(0, R_t)) \leq \lambda_t) = t^{-d+o(1)}$$

となる．いま独立性を仮定したから, λ_t を少しだけ大きい λ'_t に取り替えて上の $o(1)$ を適当にコントロールし, B_t を一辺が R_t の box に分割して Borel-Cantelli の第二補題を使えば, 少なくとも一つの box で $\lambda_1^\omega(B(x, R_t)) \leq \lambda'_t$ となることが分かる． $\lambda_1^\omega(B_t) \leq \lambda_1^\omega(B(x, R_t))$ に注意すれば, これが上からの評価を与える．

この後半の議論は, 粗っぽく言えば空間を多数の box に分割してそれぞれの box の中の ω を独立なサンプルと見なすことで固定した ω とその標本平均 $\mathbb{E}$ を関連づけているわけで, 自然なものである． R_t が比較的小さくとれるということは, 空間内にごく稀に存在する V_ω が非常に小さな値をとる小さな領域が大きな貢献をしていることを反映している．ただし実際には V_ω が小さいというより, λ_1^ω が小さい領域が重要であり, そこでモーメントの漸近挙動との関連が明確になるわけである．標語的に言えば, モーメントの漸近挙動を調べるときには ω の標本空間の中で λ_1^ω が

⁶もちろん Laplace 変換と呼んでいるところで B_t の半径とパラメータ t が特殊な関係になってしまっているので直接は言えないし, 仮にパラメータが自由にとれたとしても一般に Laplace 変換と大偏差確率の下からの評価の関係はデリケートである．

小さい所を探すのに対し、 ω 毎の漸近挙動を調べるときは $\mathbb{Z}^d$ の中で λ_1^ω が小さい所を探すことになっている。なお、この描像を信じるなら $\mathbb{E}[u(t, 0)]$ に主要な貢献をする V_ω と $u(t, 0)$ の挙動を支配する (λ_1^ω が小さい) box 内の V_ω はスケールの違いを除いて類似の形状を持つことが想像されるがそれは実際に正しく、とくに V_ω が独立同分布の時はその形状は

- single peak $\Rightarrow$ 一点で大きな値をとる、
- double exponential $\Rightarrow$ 有限個の点からなる集合の上で大きな値をとる、
- almost bounded 又は bounded $\Rightarrow t$ について増大する集合の上で大きな値をとる、

となることが分かる。

4 スペクトル順位統計と $u(t, \cdot)$ の局在

最後に比較的最近の話題としてスペクトル順位統計と、部分的にそれと関連する $u(t, \cdot)$ の局在について述べよう。

4.1 スペクトル順位統計

Anderson 模型について integrated density of states の定義におけるように領域 Λ に制限して無限体積極限をとったときに、固定した E の近傍にどれぐらいの数の固有値が含まれ、どのような揺らぎを持つかは古くから興味を持たれており、Molchanov [19], Minami [18] では (それぞれ異なる V_ω の法則に対して) E を Anderson 局在が起こっておりかつ $n(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} N(\lambda)$ が存在する点に取った場合には Λ の体積でスケーリングした点過程

$$\sum_i \delta_{|\Lambda|(\lambda_i^\omega(\Lambda) - E)}(dx) \quad (22)$$

が $n(\lambda)dx$ を強度とする Poisson 点過程に収束することが示されている⁷。ここで Poisson になる理由は非常に大雑把に言うと

- 異なる i に対する $\lambda_i^\omega(\Lambda)$ には異なる点に局在した固有関数に対応しており、従ってそれらはほぼ独立であること、
- 固定した E の近くにある固有値の分布はほぼ一様であること、

の二つの事実による。さらに Nakano [20] 及び関連する論文では同様に取った E に対して、固有値と固有関数の“局在中心”を結合した点過程を考えて、それが $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ 上の Poisson 点過程に収束することまで示されている。従ってとくに十分大きな領域をとると、その中には電子が局在し易い場所が体積オーダーで存在する。この方向の研究は最近急速に進んでおり、例えば数理解析研究所講究録別冊 B27: Spectra of Random Operators and Related Topics にはサーベイを含めて多くの結果が述べられている。

⁷正確には [18] では Aizenman-Molchanov の局在の証明に現れる Green 関数の分数冪モーメントの指数減衰を仮定している。

4.2 一つの“谷”への局在

前節まででは δ_0 を初期値とする $u(t, \cdot)$ の total mass の漸近挙動に関する結果を述べたが、前節の始めに述べた通り実際にはその形状まで知ることが目標である．とくに解が少数のピークからなると予想されていることから、ある小さな集合 $\Gamma_{t,\omega} \subset \mathbb{Z}^d$ (V_ω が小さい値を取る“谷”に相当する) があって

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sum_{x \in \Gamma_{t,\omega}} u(t, x)}{\sum_{x \in \mathbb{Z}^d} u(t, x)} = 1, \text{ a.e. } \omega \quad (23)$$

という主張を示すことが理想である．一般には $\Gamma_{t,\omega}$ は複数の連結成分を持つ可能性があって、それぞれの連結成分が universality class に応じたサイズであることを期待している．これは total mass の漸近挙動よりはるかに深い解析を必要とし、 $u(t, \cdot)$ が一点に集中すると予想されている single peak の class でさえ最近までほとんど結果がなかった．

この方面に関する（離散空間での）最初の結果は Gärtner-König-Molchanov[9] によるもので、設定は $\mathbb{Z}^d$ 上の独立同分布な V_ω で、各点では double exponential 分布

$$\mathbb{P}(V_\omega(0) \leq -r) \sim \exp\{-\exp\{r\}\}, \quad r \rightarrow \infty \quad (24)$$

と同じか、より重い tail を持つというものである．このクラスに対しては $\#\Gamma_{t,\omega} = t^{o(1)}$ 程度の個数の V_ω が非常に小さな値をとっている“谷”があって、 $u(t, \cdot)$ はほとんどそれらの谷に集中していることが示されている．彼らの議論は Feynman-Kac 表現を活用しており、符号がコントロールできない固有関数を使う代わりにそれぞれの谷にたどり着くまではランダムウォークによる表現を使って議論し、到着したあとは強 Markov 性で一旦切って局所的な固有値、固有関数の情報を使うというものである．とくに局所的な固有関数が谷の中心から離れるときに指数減衰することが重要であり、いわゆる Anderson 局在よりも定量的な評価が必要になるので、cluster 展開のような手法を用いて込み入った評価を行っている．ここで $t^{o(1)}$ 程度の個数の谷を必要とするのは、それより浅い谷からの寄与が無いことを保証するためであった．

Single peak の場合に期待される一点への集中については、まず $\mathbb{P}(V_\omega(0) \leq -r)$ が $r \rightarrow \infty$ において多項式減衰するという非常に tail が重い場合に Lacoïn-König-Mörters-Sidorova [15] によって示された．この場合は $u(t, 0)$ の期待値が存在しないことはすぐに分かり、そのことからあまり深く研究されていなかった．しかし彼らは ω 毎の漸近挙動は V_ω の extreme value statistics を用いて精密に調べることができることを発見し、とくに十分大きな領域を見たときにその中の V_ω の最も深い谷と二番目に深い谷との間に大きなギャップがあることを用いれば、最も深い谷以外からの寄与は無視できることを示したのである．

さらに最近になって Biskup-König は double exponential より重い tail を仮定すれば、常に一つの谷への局在が起こることを示したと主張しているので、最後に簡単にそれを紹介する．基本となるアイデアは上の結果と同様なのであるが、この場合は universality class の記述でも述べた通り V_ω が小さな値をとる有限個の点からなる領域に局在することが予想されているので V_ω の extreme value を見るだけでは不十分であり、有限個の点からなる谷の“良さ”を測る指標が必要になる．それにはこれまで見た通り固有値を使うのが自然であり、彼らは $B_L := B(0, L)$ 内に制限した H_ω の固有値 $\{\lambda_i^\omega(B_L)\}_{i \in \mathbb{N}}$ と対応する固有関数の“局在中心” $\{X_i^\omega(B_L)\}_{i \in \mathbb{N}}$ からなる点過程

$$\sum_i \delta_{(\lambda_i^\omega(B_L) + \log \log L) \log L, X_i^\omega(B_L)/L)}(du, dx) \quad (25)$$

が $L \rightarrow \infty$ において $\mathbb{R} \times B(0, 1)$ 上の特性測度が $e^u du \otimes dx$ の Poisson 点過程に収束することをまず示した．ここで $-\log \log L$ は B_L 内における V_ω の最小値のオーダーであり、従ってこれはスペクトルの端点付近でのスペクトル順位統計になっている（前小節でのべた順位統計の結果は、今

までのところ次元を除いて端点を扱えていないのでこれ自体が新しい結果である)。なお局在中心まで含めて考察しているのは、実際にはそれぞれの谷まで到達するための努力(またはコスト)が無視できない寄与をするからであるが、そこまで踏み込むと技術的になりすぎるので議論の概要を知りたい方はとりあえず single peak の場合を扱った [16] を参照されたい⁸。ともかくこれによって最小固有値付近では隣接する固有値に $1/\log L$ のギャップがあることが分かり、それを用いて彼らは“最も良い谷”以外からの寄与が無視できることを示すことに成功したのである。

参考文献

- [1] M. Aizenman and S. Molchanov. Localization at large disorder and at extreme energies: an elementary derivation. *Comm. Math. Phys.*, 157(2):245–278, 1993.
- [2] P. W. Anderson. Absence of diffusion in certain random lattices. *Phys. Rev.*, 109:1492–1505, Mar 1958.
- [3] M. Biskup and W. König. Long-time tails in the parabolic Anderson model with bounded potential. *Ann. Probab.*, 29(2):636–682, 2001.
- [4] J. Bourgain and C. E. Kenig. On localization in the continuous Anderson-Bernoulli model in higher dimension. *Invent. Math.*, 161(2):389–426, 2005.
- [5] R. del Rio, S. Jitomirskaya, Y. Last, and B. Simon. Operators with singular continuous spectrum. IV. Hausdorff dimensions, rank one perturbations, and localization. *J. Anal. Math.*, 69:153–200, 1996.
- [6] J. Fröhlich and T. Spencer. Absence of diffusion in the Anderson tight binding model for large disorder or low energy. *Comm. Math. Phys.*, 88(2):151–184, 1983.
- [7] R. Fukushima. From the Lifshitz tail to the quenched survival asymptotics in the trapping problem. *Electron. Commun. Probab.*, 14:435–446, 2009.
- [8] J. Gärtner and W. König. The parabolic Anderson model. In *Interacting stochastic systems*, pages 153–179. Springer, Berlin, 2005.
- [9] J. Gärtner, W. König, and S. Molchanov. Geometric characterization of intermittency in the parabolic Anderson model. *Ann. Probab.*, 35(2):439–499, 2007.
- [10] J. Gärtner and S. A. Molchanov. Parabolic problems for the Anderson model. I. Intermittency and related topics. *Comm. Math. Phys.*, 132(3):613–655, 1990.
- [11] J. Gärtner and S. A. Molchanov. Parabolic problems for the Anderson model. II. Second-order asymptotics and structure of high peaks. *Probab. Theory Related Fields*, 111(1):17–55, 1998.
- [12] F. Germinet and A. Klein. A comprehensive proof of localization for continuous anderson models with singular random potentials. *J. Eur. Math. Soc.*, 15(1):53–143, 2013.

⁸これは [15] の preprint version であるが、議論の本質はこちらの方が見易い。Biskup-König のここで述べた結果に関する論文はまだ準備中である。

- [13] D. Hundertmark. A short introduction to Anderson localization. In *Analysis and stochastics of growth processes and interface models*, pages 194–218. Oxford Univ. Press, Oxford, 2008.
- [14] W. Kirsch. An invitation to random Schrödinger operators. In *Random Schrödinger operators*, volume 25 of *Panor. Synthèses*, pages 1–119. Soc. Math. France, Paris, 2008. With an appendix by Frédéric Klopp.
- [15] W. König, H. Lacoïn, P. Mörters, and N. Sidorova. A two cities theorem for the parabolic Anderson model. *Ann. Probab.*, 37(1):347–392, 2009.
- [16] W. König, P. Mörters, and N. Sidorova. Complete localisation in the parabolic Anderson model with Pareto-distributed potential. *Unpublished*. Available from <http://www.wias-berlin.de/people/koenig/>.
- [17] W. König and T. Wolff. The parabolic Anderson model. *In preparation*. Available from <http://www.math.ucla.edu/~biskup/Prague-school/>.
- [18] N. Minami. Local fluctuation of the spectrum of a multidimensional Anderson tight binding model. *Comm. Math. Phys.*, 177(3):709–725, 1996.
- [19] S. A. Molčanov. The local structure of the spectrum of the one-dimensional Schrödinger operator. *Comm. Math. Phys.*, 78(3):429–446, 1980/81.
- [20] F. Nakano. Distribution of localization centers in some discrete random systems. *Rev. Math. Phys.*, 19(9):941–965, 2007.
- [21] P. Stollmann. *Caught by disorder*, volume 20 of *Progress in Mathematical Physics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2001. Bound states in random media.
- [22] R. van der Hofstad, W. König, and P. Mörters. The universality classes in the parabolic Anderson model. *Comm. Math. Phys.*, 267(2):307–353, 2006.