

Anderson 模型に関連する話題

福島 竜輝

京都大学 数理解析研究所

確率論シンポジウム
2012 年 12 月 18 日

P.W. Anderson (1958)

“ランダムポテンシャル中の電子は局在する”

P.W. Anderson (1958)

“ランダムポテンシャル中の電子は局在する”



拡散粒子

(Gärtner–Molchanov 1990)

Introduction

Static

Dynamic

$$H_\omega = -\kappa\Delta + V_\omega \longrightarrow e^{itH_\omega} \text{ or } e^{-tH_\omega}$$

$\mathbb{R}^d$ または $\mathbb{Z}^d$ 上で考え, V_ω は random, stationary, ergodic とする.

Introduction

Static

Dynamic

$$H_\omega = -\kappa\Delta + V_\omega \longrightarrow e^{itH_\omega} \text{ or } e^{-tH_\omega}$$

$\mathbb{R}^d$ または $\mathbb{Z}^d$ 上で考え, V_ω は random, stationary, ergodic とする.

典型的な V_ω の選び方としては合金型と呼ばれる

$$V_\omega(x) = \sum_{q \in \mathbb{Z}^d} \omega_q v(x - q),$$

や random displacement model と呼ばれる

$$V_\omega(x) = \sum_{q \in \mathbb{Z}^d} v(x - q - \omega_q),$$

が挙げられる .

Anderson 局在の一つの数学的定式化は

「 $\inf(H_\omega)$ 付近のスペクトルは固有値からなり、
対応する固有関数は遠方で指数減衰する .」

- ▶ Quantum: 低エネルギー状態は局在している .
- ▶ Diffusion: $e^{-tH_\omega} f = \sum_i e^{-t\lambda_i} \langle \phi_i, f \rangle \phi_i + \text{small order}.$

不純物が有限個の場合の観察

$\mathbb{Z}^d$ 上で原点にのみポテンシャルを持つ Schrödinger 作用素の固有値問題

$$(-\kappa\Delta + \xi 1_{\{0\}})u = Eu$$

を考えると, Fourier 変換をもちいて容易に

- ▶ $d = 1, 2$ ではいつでも遠方で指数減衰する固有関数が存在,
- ▶ $d \geq 3$ では $|\xi|$ が大きいときに遠方で指数減衰する固有関数が存在.

不純物が有限個の場合の観察

$\mathbb{Z}^d$ 上で原点にのみポテンシャルを持つ Schrödinger 作用素の固有値問題

$$(-\kappa\Delta + \xi 1_{\{0\}})u = Eu$$

を考えると, Fourier 変換をもちいて容易に

- ▶ $d = 1, 2$ ではいつでも遠方で指数減衰する固有関数が存在,
- ▶ $d \geq 3$ では $|\xi|$ が大きいときに遠方で指数減衰する固有関数が存在.

次に $\mathbb{Z}^d$ 上で二点にのみポテンシャルを持つ Schrödinger 作用素の固有値問題

$$(-\kappa\Delta + \xi_1 1_{\{x_1\}} + \xi_2 1_{\{x_2\}})u = Eu$$

を考えると, $|\xi_1|, |\xi_2|$ が十分大きいときには再び Fourier 変換により指数減衰する固有関数の存在が分かるが...

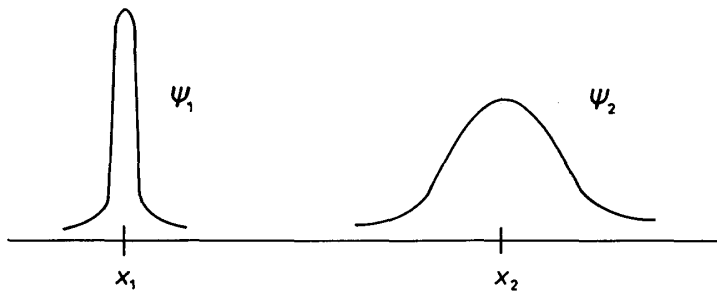


Fig. 3a. 'One-well' eigenfunctions.

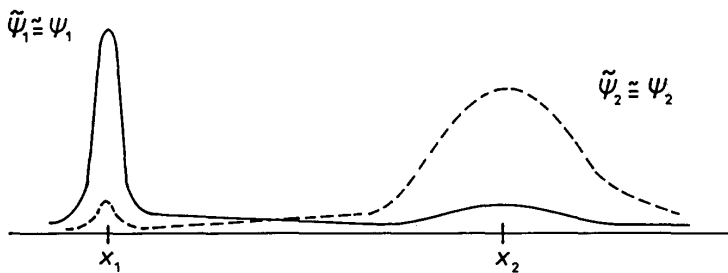


Fig. 3b. Absence of resonance $|\xi_1 - \xi_2| \gg \exp(-\gamma |E_1 - E_2|)$.

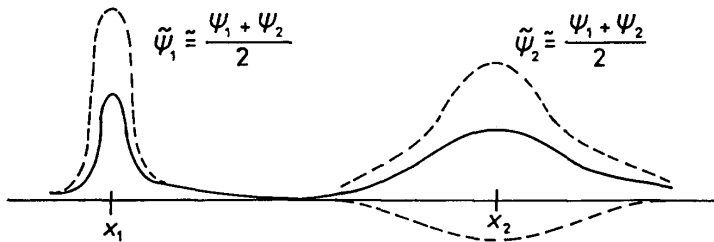


Fig. 3c. Resonance $|\xi_1 - \xi_2| \ll \exp(\gamma |E_1 - E_2|)$.

実際に興味があるのは例えば $-\kappa\Delta + \sum_x \xi_x 1_{\{x\}}$ の形の作用素であるが, $\xi_x \approx \xi_y$ なる x, y があまりたくさんあるとそれらが“共鳴する”ことにより ℓ^2 の固有関数は存在しないということも起こりえる.

従って Anderson 局在を示すためには少なくとも

- ▶ $|\xi_x|$ が (周りに比べて) 大きい x が存在し,
- ▶ $\xi_x \approx \xi_y$ なる y は十分遠くにしか存在しない,

といった条件を確かめることが必要であると想像される.

数学的には（技術的な困難にも関わらず）多くの結果が知られており，

- ▶ 1次元合金型ポテンシャルで ω_q が独立の場合，ほぼ一般にスペクトルは固有値のみからなり，対応する固有関数は指数減衰．

数学的には（技術的な困難に関わらず）多くの結果が知られており，

- ▶ 1次元合金型ポテンシャルで ω_q が独立の場合，ほぼ一般にスペクトルは固有値のみからなり，対応する固有関数は指数減衰．
- ▶ Fröhlich-Spencer に始まる “multi scale analysis” により，合金型ポテンシャルで ω_q が独立のときは，2次元以上でも $\inf \sigma(H_\omega)$ 付近で同じ結果．

数学的には（技術的な困難にも関わらず）多くの結果が知られており，

- ▶ 1次元合金型ポテンシャルで ω_q が独立の場合，ほぼ一般にスペクトルは固有値のみからなり，対応する固有関数は指数減衰．
- ▶ Fröhlich-Spencer に始まる “multi scale analysis” により，合金型ポテンシャルで ω_q が独立のときは，2次元以上でも $\inf \sigma(H_\omega)$ 付近で同じ結果．
 - ▶ もともと ω_q の分布の regularity が必要だったが，Bourgain-Kenig によって最近 Bernoulli 分布にも拡張された．

数学的には（技術的な困難に関わらず）多くの結果が知られており，

- ▶ 1次元合金型ポテンシャルで ω_q が独立の場合，ほぼ一般にスペクトルは固有値のみからなり，対応する固有関数は指数減衰．
- ▶ Fröhlich-Spencer に始まる “multi scale analysis” により，合金型ポテンシャルで ω_q が独立のときは，2次元以上でも $\inf \sigma(H_\omega)$ 付近で同じ結果．
 - ▶ もともと ω_q の分布の regularity が必要だったが，Bourgain-Kenig によって最近 Bernoulli 分布にも拡張された．
 - ▶ ω_q に関する単調性も本質的だったが，これも最近になって Klopp-Nakamura 等により一般化が試みられている．

数学的には（技術的な困難に関わらず）多くの結果が知られており，

- ▶ 1次元合金型ポテンシャルで ω_q が独立の場合，ほぼ一般にスペクトルは固有値のみからなり，対応する固有関数は指数減衰．
- ▶ Fröhlich-Spencer に始まる “multi scale analysis” により，合金型ポテンシャルで ω_q が独立のときは，2次元以上でも $\inf \sigma(H_\omega)$ 付近で同じ結果．
 - ▶ もともと ω_q の分布の regularity が必要だったが，Bourgain-Kenig によって最近 Bernoulli 分布にも拡張された．
 - ▶ ω_q に関する単調性も本質的だったが，これも最近になって Klopp-Nakamura 等により一般化が試みられている．
- ▶ Aizenman-Molchanov に始まる “fractional moment method” と呼ばれる別の方法による証明もある．これは独立性は要求しないが，一方で ω_q の分布が q 以外を条件づけたときに regularity を持つことを要求する．

数学的には（技術的な困難に関わらず）多くの結果が知られており，

- ▶ 1次元合金型ポテンシャルで ω_q が独立の場合，ほぼ一般にスペクトルは固有値のみからなり，対応する固有関数は指数減衰．
- ▶ Fröhlich-Spencer に始まる “multi scale analysis” により，合金型ポテンシャルで ω_q が独立のときは，2次元以上でも $\inf \sigma(H_\omega)$ 付近で同じ結果．
 - ▶ もともと ω_q の分布の regularity が必要だったが，Bourgain-Kenig によって最近 Bernoulli 分布にも拡張された．
 - ▶ ω_q に関する単調性も本質的だったが，これも最近になって Klopp-Nakamura 等により一般化が試みられている．
- ▶ Aizenman-Molchanov に始まる “fractional moment method” と呼ばれる別の方法による証明もある．これは独立性は要求しないが，一方で ω_q の分布が q 以外を条件づけたときに regularity を持つことを要求する．
 - ▶ もともと離散空間でしか機能しない方法だったが，最近 Aizenman-Elgart-Naboko-Schenker-Stolz により連続空間でも使えるように拡張された．

一方で以下のような問題は未解決である：

1. 2次元では全てのスペクトルが固有値，
2. 3次元以上では，不純物の影響が小さいときには絶対連続スペクトルが存在，
3. 離散 Laplacian に Bernoulli 媒質を加えたときの Anderson 局在の証明（Bourgain-Kenig の結果は連続 Laplacian の場合に限られる）

放物型 Anderson 模型

$$\partial_t u(t, x) = \kappa \Delta u(t, x) - V_\omega(x) u(t, x)$$

は $\kappa \Delta$ による拡散の効果と, V_ω による空間的な非一様化という競合する効果を含んでいる.

放物型 Anderson 模型

$$\partial_t u(t, x) = \kappa \Delta u(t, x) - V_\omega(x) u(t, x)$$

は $\kappa \Delta$ による拡散の効果と, V_ω による空間的な非一様化という競合する効果を含んでいる.

Feynman-Kac 表現:

$$u^\omega(t, 0) = E_0 \left[u_0(X_t) \exp \left\{ - \int_0^t V_\omega(X_s) ds \right\} \right]$$

放物型 Anderson 模型

$$\partial_t u(t, x) = \kappa \Delta u(t, x) - V_\omega(x) u(t, x)$$

は $\kappa \Delta$ による拡散の効果と, V_ω による空間的な非一様化という競合する効果を含んでいる.

Feynman-Kac 表現:

$$u^\omega(t, 0) = E_0 \left[u_0(X_t) \exp \left\{ - \int_0^t V_\omega(X_s) ds \right\} \right]$$

例えば初期値が恒等的に 1 の解を $u^\omega(t, \cdot)$ とおくと

$$\begin{aligned} u^\omega(t, 0) &= \sum_x E_0 \left[\exp \left\{ - \int_0^t V_\omega(X_s) ds \right\} : X_t = x \right] \\ &= \sum_x p_t^\omega(0, x) \end{aligned}$$

random walk の分布 $\leftrightarrow p_t^\omega(0, \cdot)$ の分布 .

モーメントの漸近挙動

$\{V_\omega(x)\}_{x \in \mathbb{Z}^d}$ が独立同分布の場合に $H(t) = \log \mathbb{E}[e^{-tV_\omega(0)}]$ とおくとランダムウォークの経験分布を $L_t(x) = \frac{1}{t} \int_0^t 1_{\{x\}}(X_s) ds$ として

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[u^\omega(t, 0)] &= \mathbb{E} \otimes E_0 \left[\exp \left\{ - \int_0^t V_\omega(X_s) ds \right\} \right] \\ &= \mathbb{E} \otimes E_0 \left[\exp \left\{ - \sum_x t L_t(x) V_\omega(x) \right\} \right] \\ &= E_0 \left[\exp \left\{ \sum_x H(t L_t(x)) \right\} \right]\end{aligned}$$

と書き直せる .

モーメントの漸近挙動

$\{V_\omega(x)\}_{x \in \mathbb{Z}^d}$ が独立同分布の場合に $H(t) = \log \mathbb{E}[e^{-tV_\omega(0)}]$ とおくとランダムウォークの経験分布を $L_t(x) = \frac{1}{t} \int_0^t 1_{\{x\}}(X_s) ds$ として

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[u^\omega(t, 0)] &= \mathbb{E} \otimes E_0 \left[\exp \left\{ - \int_0^t V_\omega(X_s) ds \right\} \right] \\ &= \mathbb{E} \otimes E_0 \left[\exp \left\{ - \sum_x t L_t(x) V_\omega(x) \right\} \right] \\ &= E_0 \left[\exp \left\{ \sum_x H(t L_t(x)) \right\} \right]\end{aligned}$$

と書き直せる .

ここで H が凸関数であることに注意して Jensen の不等式を使うと $\leq \exp\{H(t)\}$ が分かるが , 一方で平均を $\{X_s = 0, 0 \leq s \leq t\}$ に制限することにより $\geq \exp\{H(t) - 2d\kappa t\}$ である .

いま例えば $V_\omega(0)$ の分布が下に有界でないとすると $H(t) \gg t$ ($t \rightarrow \infty$) であるから, $\mathbb{E}[u^\omega(t, 0)]$ の漸近挙動の主要項は $\exp\{H(t)\}$ であることが分かる. これは $u^\omega(t, 0)$ の主要項が V_ω が非常に小さな値をとっている点を訪れたランダムウォークだけによって決まっていることを示している.

いま例えば $V_\omega(0)$ の分布が下に有界でないとすると $H(t) \gg t$ ($t \rightarrow \infty$) であるから, $\mathbb{E}[u^\omega(t, 0)]$ の漸近挙動の主要項は $\exp\{H(t)\}$ であることが分かる. これは $u^\omega(t, 0)$ の主要項が V_ω が非常に小さな値をとっている点を訪れたランダムウォークだけによって決まっていることを示している. しかし主要項だけを見ると, 例えば $|x| = O(t)$ であれば上と同じ議論で

$$\mathbb{E}[p_t^\omega(0, x)] = \exp\{H(t)(1 + o(1))\}, \quad t \rightarrow \infty$$

となってしまう, $p_t^\omega(0, \cdot)$ の“形状”を知るためにはより高次の漸近挙動を見る必要があることが分かる.

仮定: ある $\gamma \geq 0$, 正則変動関数 $\eta(t) = t^{\gamma+o(1)}$, および $\hat{H}$ があって

$$H(ty) - yH(t) \sim \eta(t)\hat{H}(y), \quad t \rightarrow \infty.$$

このとき

$$\begin{aligned} \sum_x H(tL_t(x)) &= \sum_x L_t(x)H(t) + [H(tL_t(x)) - L_t(x)H(t)] \\ &\sim H(t) + \sum_x \eta(t)\hat{H}(L_t(x)). \end{aligned}$$

これと Donsker-Varadhan の大偏差原理

$$P_0(L_t(\cdot) \approx \phi(\cdot)^2) = \exp\{-\kappa t \|\nabla \phi\|_2^2(1 + o(1))\}, \quad t \rightarrow \infty$$

をあわせて, いわゆる Laplace 原理が成り立つとすると ...

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[u^\omega(t, 0)] &= \mathbb{E} \otimes E_0 \left[\exp \left\{ - \sum_x t L_t(x) V_\omega(x) \right\} \right] \\
&= E_0 \left[\exp \left\{ \sum_x H(t L_t(x)) \right\} \right] \\
&\approx E_0 \left[\exp \left\{ H(t) + \sum_x \eta(t) \hat{H}(L_t(x)) \right\} \right] \\
&\approx e^{H(t)} \sup_{\|\phi\|_2=1} P_0(L_t \approx \phi^2) \exp \left\{ \sum_x \eta(t) \hat{H}(\phi(x)^2) \right\} \\
&\approx \exp \left\{ H(t) - \inf_{\|\phi\|_2=1} \left\{ \sum_x \kappa t |\nabla \phi(x)|^2 - \eta(t) \hat{H}(\phi^2(x)) \right\} \right\}
\end{aligned}$$

となる (ただし ϕ は $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ からとる)

さて，実は正則変動関数の一般論から $\hat{H}$ の形は $\rho > 0$ を定数として

$$\hat{H}(y) = \rho \begin{cases} \frac{y-y^\gamma}{1-\gamma} & \text{if } \gamma \neq 1, \\ y \log y & \text{if } \gamma = 1 \end{cases}$$

に限られることが知られている．この形と適当なスケーリングにより，一般に上の第二項は時間 t の関数と時間に依存しない変分問題の積に書き直すことができる．

ここでは簡単のためにまず $\eta(t) = t^\gamma$ の場合にどのような状況が現れるか観察しよう．

$\gamma > 1$ の場合: これは $\log \mathbb{P}(V_\omega(0) \leq r)$ が $r \rightarrow \infty$ で漸近的に多項式である状況であり, 例えば Gauss 分布はこのクラスである. このとき変分問題は (各項が非負となるように書けば)

$$\inf_{\phi \in \ell^2(\mathbb{Z}^d), \|\phi\|_2=1} \left\{ \sum_x \kappa t |\nabla \phi(x)|^2 + \rho t^\gamma \frac{\phi^2(x) - \phi^{2\gamma}(x)}{\gamma - 1} \right\}$$

となるが, $t^\gamma \gg t$ などに注意すると $\phi = 1_{\{0\}}$ の時に最小が実現されてその値は $2d\kappa t$ であることが分かる.

即ち Feynman-Kac 表現に主要な貢献をするランダムウォークは原点に留まるものであり, 従って $p_t^\omega(0, \cdot)$ は一点に集中していると考えられる.

$\gamma < 1$ の場合: これは $V_\omega(0)$ が下に有界, 例えば非負である場合に対応する. このとき変分問題は

$$\inf_{\phi \in \ell^2(\mathbb{Z}^d), \|\phi\|_2=1} \left\{ \sum_x \kappa t |\nabla \phi(x)|^2 + \rho t^\gamma \frac{\phi^{2\gamma}(x) - \phi^2(x)}{1 - \gamma} \right\}$$

と書き直せて, $t \gg t^\gamma$ であるから勾配の小さい平坦な ϕ が最小化に関わる. とくにこのとき ϕ^2 の項は無視できる.

$\gamma < 1$ の場合: これは $V_\omega(0)$ が下に有界, 例えば非負である場合に対応する. このとき変分問題は

$$\inf_{\phi \in \ell^2(\mathbb{Z}^d), \|\phi\|_2=1} \left\{ \sum_x \kappa t |\nabla \phi(x)|^2 + \rho t^\gamma \frac{\phi^{2\gamma}(x) - \phi^2(x)}{1 - \gamma} \right\}$$

と書き直せて, $t \gg t^\gamma$ であるから勾配の小さい平坦な ϕ が最小化に関わる. とくにこのとき ϕ^2 の項は無視できる.

そこで $\phi(\cdot) \rightarrow r^{d/2} \phi(r \cdot)$ とスケーリングを行うと最適なスケールは $r = t^{\frac{1-\gamma}{d+2-\gamma}}$ であることが分かり, 上の変分問題は漸近的に

$$t^{\frac{d+\gamma}{d+2-\gamma}} \inf_{\phi \in L^2(\mathbb{R}^d), \|\phi\|_2=1} \left\{ \int \kappa |\nabla \phi(x)|^2 + \frac{\rho}{1-\gamma} \phi^{2\gamma}(x) dx \right\}$$

と同値になる. 従ってこの場合, $p_t^\omega(0, \cdot)$ は $t^{\frac{1-\gamma}{d+2-\gamma}}$ くらいの幅に広がった分布をしていると考えられる. このオーダーは $o(t^{1/2})$ であるから, 依然として熱方程式よりはずっと拡散が遅い.

$\gamma = 1$ の場合: これは $\mathbb{P}(V_\omega(0) \leq r) = \exp\{-\exp\{-r/\rho\}\}$ に相当し, この場合の変分問題は

$$t \inf_{\phi \in \ell^2(\mathbb{Z}^d), \|\phi\|_2=1} \left\{ \sum_x \kappa |\nabla \phi(x)|^2 + \rho \phi^2(x) \log \phi^2(x) \right\}$$

となり, これは $1_{\{0\}}$ とは異なる ϕ を解に持つ. 従ってこの場合は $\rho_t^\omega(0, \cdot)$ は $O(1)$ の広がりを持っており, その意味で臨界的であると言える.

最後にここまでは $\eta(t) = t^\gamma$ に限ったが，一般にはある緩変動関数 $L(t)$ があって $\eta(t) = t^\gamma L(t)$ という形になる．

最後にここまでは $\eta(t) = t^\gamma$ に限ったが，一般にはある緩変動関数 $L(t)$ があって $\eta(t) = t^\gamma L(t)$ という形になる．

$\gamma \neq 1 \Rightarrow$ ほとんど同じ結論．

$\gamma = 1$ のときは …

- ▶ $L(t) \rightarrow \infty$ のときは $\gamma > 1$ と同様に一点に集中し，
- ▶ $L(t) \rightarrow 0$ のときは $\gamma < 1$ と似ているがスケーリングが緩増加になり，変分問題としては

$$\inf_{\phi \in L^2(\mathbb{R}^d), \|\phi\|_2=1} \left\{ \int \kappa |\nabla \phi(x)|^2 + \rho \phi^2(x) \log \phi^2(x) dx \right\}$$

が現れる．これについては ϕ がある Gauss 分布の密度関数の定数倍のときに（平行移動を除いて）一意的に最小を達成することが知られている．

以上で $\{V_\omega(x)\}_{x \in \mathbb{Z}^d}$ が独立同分布で分布関数の末尾に適当な regularity を仮定したときには，4 種類の状況しか現れないことが分かったわけで，これらは universality class と呼ばれている．それぞれのクラスは

- ▶ $\phi = 1_{\{0\}}$ が変分問題の下限を与えるときが single peak,
- ▶ $\gamma < 1$ のときが bounded,
- ▶ $\eta(t) \asymp t$ のときが double exponential,
- ▶ $\eta(t) = t^{1-o(1)}$ のときが almost bounded

と呼ばれている．

$\sigma(H_\omega)$ を調べる道具としての放物型問題

Integrated density of states:

$$N(\lambda) = \lim_{R \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\frac{1}{|\Lambda_R|} \# \{ \lambda_k(H_\omega|_{\Lambda_R}^D) \leq \lambda \} \right], \Lambda_R = (-R, R)^d.$$

- ▶ (Weyl) $V_\omega = 0 \implies N(\lambda) \sim c_W \lambda^{d/2}$ as $\lambda \downarrow 0$.
- ▶ (Lifshitz) V_ω : Bernoulli $\implies N(\lambda) \stackrel{\log}{\sim} \exp \{ -c_L \lambda^{-d/2} \}$ as $\lambda \downarrow 0$.

Remark.

Lifshitz の予想した漸近挙動は Anderson 局在の証明において重要な役割を果たす .

$$\begin{aligned}
N(\lambda) &\sim \mathbb{E} \left[\frac{1}{|\Lambda_R|} \sum_k \delta_{\lambda_k}([0, \lambda]) \right] \\
&\xrightarrow{\mathcal{L}} \mathbb{E} \left[\frac{1}{|\Lambda_R|} \sum_k e^{-t\lambda_k} \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\frac{1}{|\Lambda_R|} \sum_k e^{-t\lambda_k} \int_{\Lambda_R} \phi(x)_k^2 dx \right] \\
&\sim \mathbb{E} \left[\frac{1}{|\Lambda_R|} \int_{\Lambda_R} p_t^\omega(x, x) dx \right] \\
&= \mathbb{E}[p_t^\omega(0, 0)].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N(\lambda) &\sim \mathbb{E} \left[\frac{1}{|\Lambda_R|} \sum_k \delta_{\lambda_k}([0, \lambda]) \right] \\
&\xrightarrow{\mathcal{L}} \mathbb{E} \left[\frac{1}{|\Lambda_R|} \sum_k e^{-t\lambda_k} \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\frac{1}{|\Lambda_R|} \sum_k e^{-t\lambda_k} \int_{\Lambda_R} \phi(x)_k^2 dx \right] \\
&\sim \mathbb{E} \left[\frac{1}{|\Lambda_R|} \int_{\Lambda_R} p_t^\omega(x, x) dx \right] \\
&= \mathbb{E}[p_t^\omega(0, 0)].
\end{aligned}$$

Tauberian theorem: $\mathcal{L}N(t) \mathcal{O} t \rightarrow \infty \Rightarrow N(\lambda) \mathcal{O} \lambda \downarrow \inf \sigma(H_\omega)$.

とくに V_ω が Bernoulli のときは Donsker-Varadhan (1975), Nakao (1977) により

$$\mathbb{E}[p_t^\omega(0,0)] = \exp \left\{ -c_{DV} t^{\frac{d}{d+2}} (1 + o(1)) \right\}$$

が示され, Lifshitz の予想 $N(\lambda) \stackrel{\log}{\sim} \exp \{ -c_L \lambda^{-d/2} \}$ as $\lambda \downarrow 0$ が正しいことが示された.

とくに V_ω が Bernoulli のときは Donsker-Varadhan (1975), Nakao (1977) により

$$\mathbb{E}[p_t^\omega(0,0)] = \exp \left\{ -c_{DV} t^{\frac{d}{d+2}} (1 + o(1)) \right\}$$

が示され, Lifshitz の予想 $N(\lambda) \stackrel{\log}{\sim} \exp \{ -c_L \lambda^{-d/2} \}$ as $\lambda \downarrow 0$ が正しいことが示された.

ここで例えば一次元で $[-n, n]$ にある最長の $V_\omega = 0$ となる区間の長さは $O(\log n)$ であり, そこに制限した $-\Delta$ の最小固有値は $O((\log n)^{-2})$ である. これが λ を下回るには $n \approx e^{\lambda^{-1/2}}$ が必要であり,

$$N(\lambda) \approx \frac{1}{|[-e^{\lambda^{-1/2}}, e^{\lambda^{-1/2}}]|} \times 1$$

だから「スペクトルは V_ω の谷から来ている」という描像の傍証になっている.

ω 毎の漸近挙動

実は同様にかなり一般に $N(\lambda) \approx \frac{1}{|\Lambda|} \mathbb{P}(\lambda_1^\omega(\Lambda) \leq \lambda)$ であることが分かる．これを Borel-Cantelli と適切に組み合わせることで

$$u^\omega(t, 0) = \exp \{ -t \lambda_1^\omega(\Lambda_t) (1 + o(1)) \}$$

や $p_t^\omega(0, 0)$ の a.e. ω に対する $t \rightarrow \infty$ での漸近挙動を決定することができる．

ω 毎の漸近挙動

実は同様にかなり一般に $N(\lambda) \approx \frac{1}{|\Lambda|} \mathbb{P}(\lambda_1^\omega(\Lambda) \leq \lambda)$ であることが分かる．これを Borel-Cantelli と適切に組み合わせることで

$$u^\omega(t, 0) = \exp \{ -t \lambda_1^\omega(\Lambda_t)(1 + o(1)) \}$$

や $p_t^\omega(0, 0)$ の a.e. ω に対する $t \rightarrow \infty$ での漸近挙動を決定することができる．

具体的には Λ_t を十分大きい box (サイズ $\approx t$) として, λ_t を

$$N(\lambda_t) = \frac{1}{|\Lambda_t|}$$

の解とすると, $\mathbb{P}(\lambda_1^\omega(\Lambda_t) \approx \lambda_t) \sim 1$ となって

$$u^\omega(t, 0) = \exp \{ -t \lambda_t(1 + o(1)) \}.$$

スペクトルや局在中心の配置

Lifshitz tail やそれをもとに示される Anderson 局在は，ランダム作用素のスペクトルや固有関数が V_ω が特異な値をとる狭い領域に支配されていることを暗示している．これをより明示的に定式化する一つの方法として「点過程としてのスケール極限」を見るということがある．

スペクトルや局在中心の配置

Lifshitz tail やそれをもとに示される Anderson 局在は，ランダム作用素のスペクトルや固有関数が V_ω が特異な値をとる狭い領域に支配されていることを暗示している．これをより明示的に定式化する一つの方法として「点過程としてのスケール極限」を見るということがある．

$E \in \sigma(H_\omega)$ を固定して，有限体積に制限した作用素 $H_\omega|_\Lambda^D$ の固有値のうち E に近いものを考える．もし E が integrated density of states N の増加する点であるとする，その近傍には $|\Lambda|$ 個くらいの固有値が含まれると考えられる．

そこで E を中心にスケールした固有値の経験分布

$$\sum_i \delta_{|\Lambda|}(\lambda_i^\omega - E)$$

を考えると, E が Anderson 局在が成り立つ領域から選ばれたときには Poisson 点過程に弱収束することが示されている.

(Molchanov, Minami, Combes-Germinet-Klein, etc.)

そこで E を中心にスケールした固有値の経験分布

$$\sum_i \delta_{|\Lambda|}(\lambda_i^\omega - E)$$

を考えると, E が Anderson 局在が成り立つ領域から選ばれたときには Poisson 点過程に弱収束することが示されている.

(Molchanov, Minami, Combes-Germinet-Klein, etc.)

この背景にある直観は, 次のようなものである:

- ▶ 局在状態である E 付近のスペクトルは, Λ の小さな subbox に制限した作用素の直和のそれでよく近似できる.
- ▶ 各 subbox が E に近い固有値を持つ確率は低く, かつ異なる subbox に制限した作用素の固有値は独立である.

そこで E を中心にスケールした固有値の経験分布

$$\sum_i \delta_{|\Lambda|}(\lambda_i^\omega - E)$$

を考えると, E が Anderson 局在が成り立つ領域から選ばれたときには Poisson 点過程に弱収束することが示されている.

(Molchanov, Minami, Combes-Germinet-Klein, etc.)

この背景にある直観は, 次のようなものである:

- ▶ 局在状態である E 付近のスペクトルは, Λ の小さな subbox に制限した作用素の直和のそれでよく近似できる.
- ▶ 各 subbox が E に近い固有値を持つ確率は低く, かつ異なる subbox に制限した作用素の固有値は独立である.

さらに各固有値に対応する固有関数の局在中心との結合分布を見ても Poisson 点過程に弱収束することも知られている.

(Killip-Nakano, etc.)

拡散粒子の局在

“Goal”

$\mathbb{P}$ -a.s., $\exists \Gamma_{t,\omega}$ s.t. $\#\Gamma_{t,\omega} = t^{o(1)}$,

$$\frac{\sum_{x \in \Gamma} p_t^\omega(0, x)}{\sum_{x \in \mathbb{Z}^d} p_t^\omega(0, x)} \rightarrow 1, \quad t \rightarrow \infty.$$

- ▶ Sznitman (1997): Poisson potential ($\leftrightarrow$ Bernoulli),
- ▶ Gärtner-König-Molchanov (2007): i.i.d.,

$$\mathbb{P}(V_\omega(0) \leq -x) \geq \exp\{-e^x\},$$

- ▶ Lacoïn-König-Mörters-Sidorova (2011): Polynomial lower tail
 $\Rightarrow \#\Gamma = 1$ (in prob.), $\#\Gamma = 2$ (a.s.),
- ▶ Biskup-König (2013?): $\#\Gamma = 1$ (in prob.) for double-exp.

冒頭に述べたような H_ω のスペクトル分解

$$p_t^\omega(0, x) = \sum_i e^{-t\lambda_i} \phi_i(0) \phi_i(x) + \text{small order}$$

が役に立つことはまずない． ϕ_i について

- ▶ x は局在中心に取りたいので，そこからの正確な減衰速度，
- ▶ 原点での符号，

など非常に精密な情報が全ての i について必要になる．

代わりに Feinman-Kac 公式をランダムウォークに関する event で分解する：

$$\begin{aligned}
 u^\omega(t, 0) &= E_0 \left[\exp \left\{ - \int_0^t V_\omega(X_s) ds \right\} \right] \\
 &= E_0 \left[e^{-f} : X \text{ exits a macrobox } \Lambda_t \right] \\
 &\quad + E_0 \left[e^{-f} : X \text{ does not hits } \Gamma_{t,\omega} \text{ and } \subset \Lambda_t \right] \\
 &\quad + E_0 \left[e^{-f} : X \text{ hits } \Gamma_{t,\omega} \text{ and } \subset \Lambda_t \right]
 \end{aligned}$$

ここで $\Gamma_{t,\omega}$ は Λ_t 内で V_ω が “極小に近い値” を取る集合である .

代わりに Feinman-Kac 公式をランダムウォークに関する event で分解する：

$$\begin{aligned} u^\omega(t, 0) &= E_0 \left[\exp \left\{ - \int_0^t V_\omega(X_s) ds \right\} \right] \\ &= E_0 \left[e^{-f} : X \text{ exits a macrobox } \Lambda_t \right] \\ &\quad + E_0 \left[e^{-f} : X \text{ does not hits } \Gamma_{t,\omega} \text{ and } \subset \Lambda_t \right] \\ &\quad + E_0 \left[e^{-f} : X \text{ hits } \Gamma_{t,\omega} \text{ and } \subset \Lambda_t \right] \end{aligned}$$

ここで $\Gamma_{t,\omega}$ は Λ_t 内で V_ω が “極小に近い値” を取る集合である．

→ この第一項，第二項は無視できることが分かる．

$\Gamma_{t,\omega} \wedge$ の concentration

$$\begin{aligned}
 p_t^\omega(0, y) &\sim E_0 \left[e^{-\int} : X \text{ hits } \Gamma_{t,\omega} \text{ and } \subset \Lambda_t \text{ and } X_t = y \right] \\
 &= \sum_{x \in \Gamma_{t,\omega}} E_y \left[e^{-\int} : X \text{ hits } \Gamma_{t,\omega} \text{ at } x \text{ and } \subset \Lambda_t \text{ and } X_t = 0 \right] \\
 &= \sum_{x \in \Gamma_{t,\omega}} E_y \left[e^{-\int_0^{H_\Gamma} v_\omega(X_s) - \lambda_x ds} 1_{\{X_{H_\Gamma} = x\}} \right. \\
 &\quad \left. \times e^{-H_\Gamma \lambda_x} E_x \left[e^{-\int_0^{t-H_\Gamma}} : X_{t-H_\Gamma} = 0 \right] \right] \\
 &\lesssim \sum_{x \in \Gamma_{t,\omega}} v_x(y) p_t^\omega(0, x).
 \end{aligned}$$

ここで λ_x, v_x は $H_\omega|_{\Lambda_t \setminus (\Gamma \setminus \{x\})}^D$ の最小固有値と対応する固有関数 .

$\Gamma_{t,\omega} \wedge$ の concentration

$$\begin{aligned} p_t^\omega(0, y) &\sim E_0 \left[e^{-\int} : X \text{ hits } \Gamma_{t,\omega} \text{ and } \subset \Lambda_t \text{ and } X_t = y \right] \\ &= \sum_{x \in \Gamma_{t,\omega}} E_y \left[e^{-\int} : X \text{ hits } \Gamma_{t,\omega} \text{ at } x \text{ and } \subset \Lambda_t \text{ and } X_t = 0 \right] \\ &= \sum_{x \in \Gamma_{t,\omega}} E_y \left[e^{-\int_0^{H_\Gamma} V_\omega(X_s) - \lambda_x ds} 1_{\{X_{H_\Gamma} = x\}} \right. \\ &\quad \left. \times e^{-H_\Gamma \lambda_x} E_x \left[e^{-\int_0^{t-H_\Gamma}} : X_{t-H_\Gamma} = 0 \right] \right] \\ &\lesssim \sum_{x \in \Gamma_{t,\omega}} v_x(y) p_t^\omega(0, x). \end{aligned}$$

ここで λ_x, v_x は $H_\omega|_{\Lambda_t \setminus (\Gamma \setminus \{x\})}^D$ の最小固有値と対応する固有関数 .

→ $\{v_x\}_{x \in \Gamma}$ の指数減衰から y が Γ に近いときだけが残る .

一点への局在

「 $\Gamma_{t,\omega}$ は実際にはいくつかの連結成分 $C_1, C_2, \dots$ からなる .

$$\begin{aligned} u^\omega(t, 0) &\approx \sum_k E_0 \left[e^{-\int} : X \text{ hits } C_k \text{ and stay there.} \right] \\ &\approx \sum_k \sup_{0 \leq s \leq t} P_0(X_s \in C_k) \exp \{ -(t-s) \lambda_1^\omega(C_k) \} \end{aligned}$$

ここで V_ω が下に非有界とすると $\lambda_1^\omega(C_k) \ll -1$ なので, s を小さくとったときに良い近似になる .

一点への局在

「 t, ω は実際にはいくつかの連結成分 $C_1, C_2, \dots$ からなる .

$$\begin{aligned} u^\omega(t, 0) &\approx \sum_k E_0 \left[e^{-\int} : X \text{ hits } C_k \text{ and stay there.} \right] \\ &\approx \sum_k \sup_{0 \leq s \leq t} P_0(X_s \in C_k) \exp \{ -(t-s) \lambda_1^\omega(C_k) \} \end{aligned}$$

ここで V_ω が下に非有界とすると $\lambda_1^\omega(C_k) \ll -1$ なので, s を小さくとったときに良い近似になる .

このような状況では, $z_k \in C_k$ を適当に取って

$$P_0(X_s \in C_k) \stackrel{\log}{\sim} \exp \left\{ -|z_k| \log \frac{|z_k|}{2d\epsilon_k s} \right\}.$$

従って

$$u^\omega(t, 0) \approx \sum_k \sup_{0 \leq s \ll t} \exp \left\{ -|z_k| \log \frac{|z_k|}{2de\kappa s} - (t-s)\lambda_1^\omega(C_k) \right\}.$$

Biskup-König は $(z_k, \lambda_1^\omega(C_k))_{k \geq 1}$ を適切に正規化したものが $\mathbb{R} \times [-1, 1]^d$ 上の Poisson point process に収束することを示し, そのことから上の summand の中で最大のものは二番目のものよりはるかに大きいことを導いた.

従って

$$u^\omega(t, 0) \approx \sum_k \sup_{0 \leq s \ll t} \exp \left\{ -|z_k| \log \frac{|z_k|}{2de\kappa s} - (t-s)\lambda_1^\omega(C_k) \right\}.$$

Biskup-König は $(z_k, \lambda_1^\omega(C_k))_{k \geq 1}$ を適切に正規化したものが $\mathbb{R} \times [-1, 1]^d$ 上の Poisson point process に収束することを示し, そのことから上の summand の中で最大のものは二番目のものよりはるかに大きいことを導いた.

この点過程の収束は Λ_t での最小固有値付近を見た, いわゆる extreme value statistics であり, スペクトルの内部の点を固定して見た Molchanov, Minami の結果とは異なる状況を扱っている.

さらに勉強するために

Anderson 局在に関しては

Werner Kirsch: An invitation to random Schrödinger operators.
In *Random Schrödinger operators*, volume 25 of *Panor. Synthèses*,
pages 1–119. Soc. Math. France, Paris, 2008.

放物型 Anderson 模型については

Jurgen Gärtner and Wolfgang König. The parabolic Anderson
model. In *Interacting stochastic systems*, pages 153–179. Springer,
Berlin, 2005.

が読み易い入門的解説である（最新の内容は含んでいないが）