Geometry of the random walk range conditioned on survival among Bernoulli obstacles

福島 竜輝 (京都大学)

確率論シンポジウム
2018 年 12 月 18 日

Jian Ding, Rongfeng Sun and Changji Xu との共同研究.
Preprint は arXiv:1806.08319 に公開

問題の設定

- $(S := (S_n)_{n\geq 0}, \mathbf{P}_x)$: $\mathbb{Z}^d$ の SRW で $x \in \mathbb{Z}^d$ を出発するもの;
- $(\omega = (\omega_x)_{x\in\mathbb{Z}^d}, \mathbb{P})$: 独立同分布，Bernoulli(p).

ランダムウォークは $\mathcal{O} = \{x \in \mathbb{Z}^d : \omega_x = 0\}$ に到達すると死んでしまう:

$$\tau_{\mathcal{O}} := \inf\{n \geq 0 : S_n \in \mathcal{O}\}.$$

問題は S（と $\mathcal{O}$）が $\{\tau_{\mathcal{O}} > N\}$ に条件付けた以下の測度のもとでどのように振る舞うか：

$$\mu_N((S, \mathcal{O}) \in \cdot) := \mathbb{P} \otimes \mathbf{P}((S, \mathcal{O}) \in \cdot \mid \tau_{\mathcal{O}} > N).$$

媒質の法則についても平均を取っていることに注意.
Annealed law と呼ばれる.

問題の設定

今回はとくにランダムウォークの軌跡

$$S_{[0,N]} := \{S_i : 0 \le i \le N\}$$

の $\mu_N = \mathbb{P} \otimes \mathbf{P}(\cdot \mid \tau_{\mathcal{O}} > N)$ のもとでの挙動を調べる.

軌跡は μ_N に関して“自然”な対象である．実際,

$$\mathbb{P}(\tau_{\mathcal{O}} > N) = \mathbb{P}(S_{[0,N]} \cap \mathcal{O} = \emptyset) = p^{|S_{[0,N]}|},$$

に注意すると $\mathcal{O}$ に関する平均を先に取ることができて,

$$\mu_N(S \in \cdot) = \frac{\mathbf{E}\left[p^{|S_{[0,N]}|} : S \in \cdot\right]}{\mathbf{E}\left[p^{|S_{[0,N]}|}\right]}.$$

これは *self-attractive polymer* のモデルと見なせる.

先行研究 1：分配関数（生存確率）の挙動

まず Donsker–Varadhan (1979) の古典的な結果を述べる：

Theorem

$d \geq 2$ のとき,

$$\mathbb{P} \otimes \mathbf{P}(\tau_{\mathcal{O}} > N) = \exp\Big\{-c(d,p)N^{\frac{d}{d+2}}(1+o(1))\Big\},$$

$$\text{ただし } c(d,p) = \inf_U \{|U| \log(1/p) + \lambda(U)\},$$

ここで $\lambda(U)$ は $-\frac{1}{2d}\Delta$ の U における Dirichlet 最小固有値.

Remark

Faber–Krahn の不等式により上の下限は $B(0;\varrho_1)$ で達成される.

先行研究１：分配関数（生存確率）の挙動

証明の概略は以下の通り：

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\otimes\mathbf{P}(\tau_{\mathcal{O}}>N)&=\sum_U \mathbb{P}(\mathcal{O}\cap U=\emptyset)\mathbf{P}(S_{[0,N]}=U)\\&\approx \max_U p^{|U|}\exp\{-N\lambda(U)\}\\&=\exp\left\{-N^{\frac{d}{d+2}}\inf_U\{|U|\log(1/p)+\lambda(U)\}\right\}.\end{aligned}$$

二行目の $\approx$ は本質的に Laplace 原理である.

- Donsker–Varadhan (1979) は大偏差原理を用いて証明した.
- Antal (1995) は Sznitman の“障害物の拡大”と呼ばれる方法による別証明を与えた.

この議論は「半径 $\varrho_N=\varrho_1 N^{\frac{1}{d+2}}$ の球に時刻 N まで留まる」という最適戦略が生存確率のほとんどを担っていることを示唆している.

先行研究２：confinement property

前述の“示唆”は Sznitman (1991), Bolthausen (1994) and Povel (1999) によってより強い形で厳密に証明された：

Theorem (Confinement property)

$d \geq 2$ のとき，ある $\epsilon_1 \in (0,1)$ と $x_N = x_N(\mathcal{O}) \in B(0;\varrho_N)$ が存在して以下を満たす：

$$\lim_{N\to\infty} \mu_N\big(S_{[0,N]} \subset B(x_N;\varrho_N + \varrho_N^{\epsilon_1})\big) = 1.$$

先行研究2：confinement property

前述の“示唆”は Sznitman (1991), Bolthausen (1994) and Povel (1999) によってより強い形で厳密に証明された：

Theorem (Confinement property)

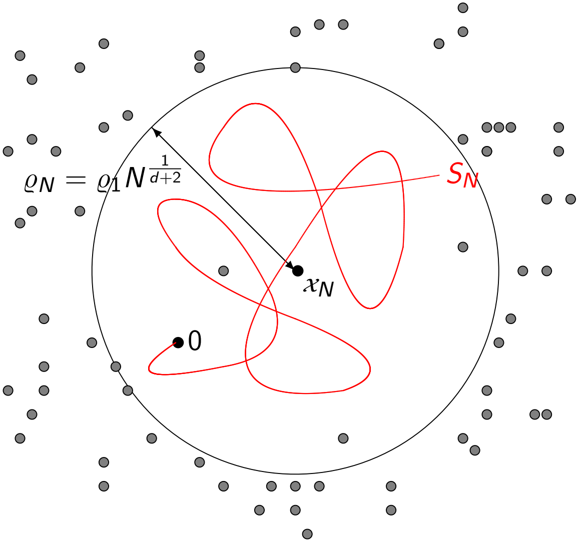
$d \geq 2$ のとき，ある $\epsilon_1 \in (0,1)$ と $x_N = x_N(\mathcal{O}) \in B(0;\varrho_N)$ が存在して以下を満たす：

$$\lim_{N\to\infty} \mu_N\big(S_{[0,N]} \subset B(x_N;\varrho_N + \varrho_N^{\epsilon_1})\big) = 1.$$

Remark

これは Donsker–Varadhan の結果が示唆する内容よりも強い主張である．大偏差原理はランダムウォークがほとんどの時間を $B(x;\varrho_N)$ で過ごすことしか示唆しない．

先行研究2：confinement property



この図にはやや誤解を招く点がある．実際には球の内部のほとんどの点は $N/N^{\frac{d}{d+2}} = N^{\frac{2}{d+2}}$ 回くらい訪問されている．

先行研究 2.5：clearing/covering ball

2 次元に限っては少し詳しいことが知られていた：

Proposition (Ball clearing: Sznitman (1991))
$d = 2$ のとき任意の $\epsilon \in (0,1)$ に対し

$$\lim_{N\to\infty} \mu_N(\mathcal{O} \cap B(x_N; (1-\epsilon)\varrho_N) = \emptyset) = 1.$$

Proposition (Ball covering: Bolthausen (1994))
$d = 2$ のとき任意の $\epsilon \in (0,1)$ に対し

$$\lim_{N\to\infty} \mu_N\big(B(x_N; (1-\epsilon)\varrho_N) \subset S_{[0,N]}\big) = 1.$$

Bolthausen はこの結果をを confinement property の証明において本質的に使い，$d \geq 3$ でも同じことが成り立つことを予想として残した.

主結果 1：ball covering in $d \geq 3$

Theorem (Ball covering: Ding, F., Sun, Xu (2018))

$d \geq 2$ とし ϱ_N と x_N は confinement property のものとする．このときある $\epsilon_2 \in (0, 1)$ に対し

$$\lim_{N\to\infty} \mu_N\big(B(x_N; \varrho_N - \varrho_N^{\epsilon_2}) \subset S_{[0,N]}\big) = 1.$$

Remark

これは Bolthausen の 1994 年の予想が正しいことを示す．ただし我々の証明は confinement を仮定しており，Bolthausen の証明を $d \geq 3$ に拡張することにはなっていない．最近 Berestycki と Cerf は上の結果を confinement を仮定せずに示すことに成功したようである (arXiv:1811.04700).

主結果2：boundary size

Confinement property と ball covering を組み合わせると

$$\partial S_{[0,N]} \subset B(x_N; \varrho_N + \varrho_N^{\epsilon_1}) \setminus B(x_N; \varrho_N - \varrho_N^{\epsilon_2}).$$

以下の定理は境界の揺らぎを調べる最初のステップである：

Theorem (Boundary size: Ding, F., Sun, Xu (2018))

$d \geq 2$ とし ϱ_N は confinement property のものとする．このときある $\epsilon_3 > 0$ に対して

$$\lim_{N\to\infty} \mu_N\Big(|\partial S_{[0,N]}| \leq \varrho_N^{d-1}(\log \varrho_N)^{\epsilon_3}\Big) = 1.$$

分配関数の漸近挙動への応用

Lubensky (1984) は “a field theoretic computation” により，以下を予想した：

$$\mathbb{P} \otimes \mathbf{P}(\tau_{\mathcal{O}} > N) = \exp\Big\{-c(d,p)N^{\frac{d}{d+2}} - a_1 N^{\frac{d-1}{d+2}} + o(N^{\frac{d-1}{d+2}})\Big\}.$$

数学的には： $-c_1 N^{\frac{d-1}{d+2}} \leq \text{2nd term} \leq c_2 N^{\frac{d-\kappa}{d+2}}$ $(\exists \kappa \in (0,1))$.

分配関数の漸近挙動への応用

Lubensky (1984) は “a field theoretic computation” により，以下を予想した：

$$\mathbb{P} \otimes \mathbf{P}(\tau_{\mathcal{O}} > N) = \exp\Big\{-c(d,p)N^{\frac{d}{d+2}} - a_1 N^{\frac{d-1}{d+2}} + o(N^{\frac{d-1}{d+2}})\Big\}.$$

数学的には： $-c_1 N^{\frac{d-1}{d+2}} \le \text{2nd term} \le c_2 N^{\frac{d-\kappa}{d+2}}$ $(\exists \kappa \in (0,1))$.

$\partial S_{[0,N]}$ の評価により

$$\mathbb{P} \otimes \mathbf{P}(\tau_{\mathcal{O}} > N) = \sum_U \mathbb{P}(\mathcal{O} \cap U = \emptyset)\mathbf{P}(S_{[0,N]} = U).$$

に現れる U を制限でき，その結果として分配関数の漸近挙動を少し改良することができる：

$$\mathbb{P} \otimes \mathbf{P}(\tau_{\mathcal{O}} > N) \le \exp\Big\{-c(d,p)N^{\frac{d}{d+2}} + cN^{\frac{d-1}{d+2}}(\log N)^{\epsilon_3+1}\Big\}.$$

Ball Coveringの証明のアイデア

Clearing ⇒ covering

主結果の証明には異なる事象の確率を比較する議論を頻繁に使う．以下の Lemma は単純だが分かりやすい例である．

Lemma (clearing implies covering)

$\mu_N(\mathcal{O} \cap B(x_N; (1-\epsilon)\varrho_N) = \emptyset) = 1 - o(\varrho_N^{-d})$ を仮定すると，

$\lim_{N\to\infty} \mu_N\big(B(x_N; (1-\epsilon)\varrho_N) \subset S_{[0,N]}\big) = 1$ が従う．

Proof.

Clearing $\Rightarrow$ covering

主結果の証明には異なる事象の確率を比較する議論を頻繁に使う．以下の Lemma は単純だが分かりやすい例である．

Lemma (clearing implies covering)

$\mu_N(\mathcal{O} \cap B(x_N; (1-\epsilon)\varrho_N) = \emptyset) = 1 - o(\varrho_N^{-d})$ を仮定すると，
$\lim_{N\to\infty} \mu_N\big(B(x_N; (1-\epsilon)\varrho_N) \subset S_{[0,N]}\big) = 1$ が従う．

Proof.

$\mu_N(\exists x \in B(x_N; (1-\epsilon)\varrho_N) \setminus S_{[0,N]}) \geq c > 0$ を仮定する．このときある x に対して

$$\mu_N(x \in B(x_N; (1-\epsilon)\varrho_N) \setminus S_{[0,N]}) \geq c\varrho_N^{-d}.$$

Clearing $\Rightarrow$ covering

主結果の証明には異なる事象の確率を比較する議論を頻繁に使う．以下の Lemma は単純だが分かりやすい例である．

Lemma (clearing implies covering)

$\mu_N(\mathcal{O} \cap B(x_N; (1-\epsilon)\varrho_N) = \emptyset) = 1 - o(\varrho_N^{-d})$ を仮定すると，

$\lim_{N \to \infty} \mu_N\big(B(x_N; (1-\epsilon)\varrho_N) \subset S_{[0,N]}\big) = 1$ が従う．

Proof.

$\mu_N(\exists x \in B(x_N; (1-\epsilon)\varrho_N) \setminus S_{[0,N]}) \geq c > 0$ を仮定する．このときある x に対して

$$\mu_N(x \in B(x_N; (1-\epsilon)\varrho_N) \setminus S_{[0,N]}) \geq c\varrho_N^{-d}.$$

しかしこの左辺は

$$\frac{1}{1-p}\mu_N(x \in B(x_N; (1-\epsilon)\varrho_N) \setminus S_{[0,N]} \text{ and } x \in \mathcal{O})$$

で押さえられるので矛盾． $\square$

Ball clearing の証明のアイデア

<u>示すべきこと</u>: $\lim_{N\to\infty} \mu_N(\mathcal{O} \cap B(x_N; (1-\epsilon)\varrho_N) = \emptyset) = 1.$

$x \in \mathcal{O} \cap B(x_N; (1-\epsilon)\varrho_N)$ を仮定する．以下の二つの状況に分けて考える：

1. $\mathcal{O} \cap B(x; \epsilon\varrho_N/2)$ は高密度,
2. $\mathcal{O} \cap B(x; \epsilon\varrho_N/2)$ は低密度.

Ball clearing の証明のアイデア

示すべきこと: $\lim_{N\to\infty} \mu_N(\mathcal{O} \cap B(x_N; (1-\epsilon)\varrho_N) = \emptyset) = 1.$

$x \in \mathcal{O} \cap B(x_N; (1-\epsilon)\varrho_N)$ を仮定する．以下の二つの状況に分けて考える：

1. $\mathcal{O} \cap B(x; \epsilon\varrho_N/2)$ は高密度，
2. $\mathcal{O} \cap B(x; \epsilon\varrho_N/2)$ は低密度．

- 1 の場合はランダムウォークの生存が困難になるため，起きないことが容易にわかる．
- 2 はさらに二通りに分ける...
    - 2.1 ランダムウォークは x の近傍に頻繁に戻ってくる．
    - 2.2 ランダムウォークは x の近傍にはあまり戻ってこない．

この 2.1, 2.2 をそれぞれ他の事象との比較によって処理する．

Ball clearing の証明のアイデア

Case 2.1: $\mathcal{O} \cap B(x; \epsilon\varrho_N/2)$ は低密度であり，ランダムウォークは x の近傍に頻繁に戻ってくる．

このとき $B(x; \epsilon\varrho_N/2)$ にある obstacle をすべて除去する．この操作は

- $\mathbb{P}$-probability を小さくするが（cost），
- $\mathbf{P}$-probability を大きくする（gain）．

結果的には gain が cost よりはるかに大きいことがわかり，

$$\mathbb{P} \otimes \mathbf{P}(\text{Case } 2.1) \ll \mathbb{P} \otimes \mathbf{P}(\tau_{\mathcal{O}} > N, \mathcal{O} \cap B(x; \epsilon\varrho_N/2) = \emptyset).$$

Ball clearing の証明のアイデア

Case 2.1: $\mathcal{O} \cap B(x; \epsilon\varrho_N/2)$ は低密度であり，ランダムウォークは x の近傍に頻繁に戻ってくる.

このとき $B(x; \epsilon\varrho_N/2)$ にある obstacle をすべて除去する．この操作は

- $\mathbb{P}$-probability を小さくするが（cost),
- $\mathbf{P}$-probability を大きくする（gain).

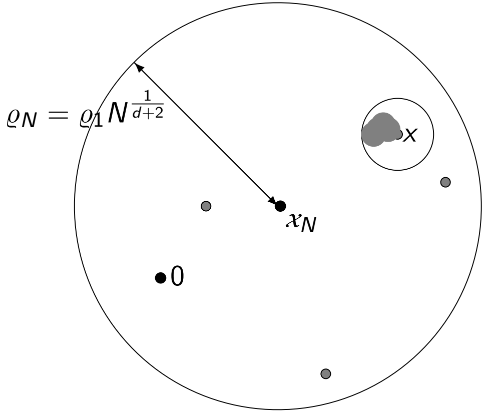
結果的には gain が cost よりはるかに大きいことがわかり,

$$\mathbb{P} \otimes \mathbf{P}(\text{Case } 2.1) \ll \mathbb{P} \otimes \mathbf{P}(\tau_{\mathcal{O}} > N, \mathcal{O} \cap B(x; \epsilon\varrho_N/2) = \emptyset).$$

ただし技術的にはここにはかなりの困難がある．原因は

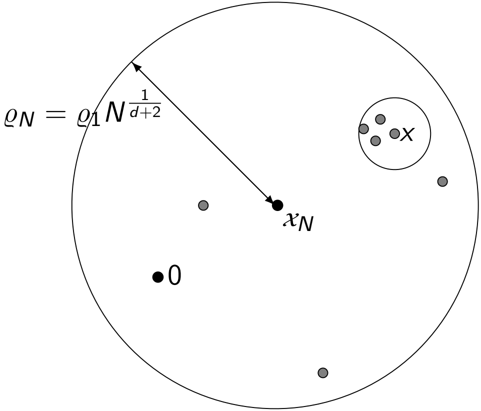
- cost は $|\mathcal{O} \cap B(x; \epsilon\varrho_N/2)|$ に比例して増大するが,
- gain は $|\mathcal{O} \cap B(x; \epsilon\varrho_N/2)|$ に比例して増大はしない.

Ball clearing の証明のアイデア：skeletal approximation



$\mathcal{O}$ が x の近傍でクラスターをなしているとき，ランダムウォークの生存確率に影響するのはその境界にある obstacle だけである.

Ball clearing の証明のアイデア：skeletal approximation



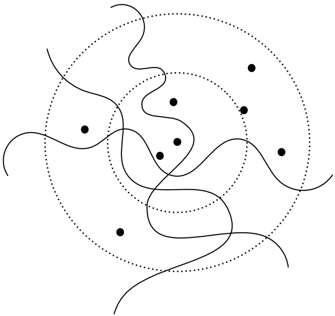
クラスターから互いに離れた点をできるだけたくさん抜き出して，それだけを使って生存確率への影響を評価する．

Proof idea for ball clearing

Case 2.2: $\mathcal{O} \cap B(x; \epsilon\varrho_N/2)$ は低密度であり，ランダムウォークは x の近傍にはあまり戻ってこない.

このときまず $B(x; \epsilon\varrho_N/2) \setminus B(x; \epsilon\varrho_N/4)$ にある obstacle をすべて除去し，ランダムウォークは $B(x; \epsilon\varrho_N/4)$ を避けるようにする.
それから $B(x; \epsilon\varrho_N/4)$ の中の obstacle の配置を自由に変える.

- $\mathbf{P}$-probability を小さくするが（cost),
- $\mathbb{P}$-probability を大きくする（gain).



Proof idea for ball clearing

Case 2.2: $\mathcal{O} \cap B(x; \epsilon \varrho_N/2)$ は低密度であり，ランダムウォークは x の近傍にはあまり戻ってこない．

このときまず $B(x; \epsilon\varrho_N/2) \setminus B(x; \epsilon\varrho_N/4)$ にある obstacle をすべて除去し，ランダムウォークは $B(x; \epsilon\varrho_N/4)$ を避けるようにする．それから $B(x; \epsilon\varrho_N/4)$ の中の obstacle の配置を自由に変える．

- $\mathbf{P}$-probability を小さくするが（cost），
- $\mathbb{P}$-probability を大きくする（gain）．

結果的には gain が cost よりはるかに大きいことがわかり，

$$\mathbb{P} \otimes \mathbf{P}(\text{Case } 2.2) \\ \ll \mathbb{P} \otimes \mathbf{P}(\tau_{\mathcal{O} \cup B(x;\epsilon\varrho_N/4)} > N, \mathcal{O} \cap B(x; \epsilon\varrho_N/4) \text{ is typical}).$$

Remark

この議論は非常に無駄が多いように見える．実際右辺の確率は Case 1 にあたるので，それ自身が $o(\mathbb{P} \otimes \mathbf{P}(\tau_{\mathcal{O}} > N))$ であることを既に知っている．しかし $\exp\{-c(d,p)N^{\frac{d}{d+2}} + o(N^{\frac{d}{d+2}})\}$ と比較するよりは良いと思う．

Boundary sizeの証明のアイデア

"Truly"-open site

重要なアイデアはランダムウォークの軌跡 $S_{[0,N]}$ を，$\mathcal{O}$ から定まる *"truly"-open sites* $\mathcal{T}$ で近似することである．

Definition ("Truly"-open sites)

$x \in \mathbb{Z}^d$ は以下を満たすとき "truly"-open という：

$$\mathbf{P}_x\big(\tau_{\mathcal{O}} > (\log N)^5\big) \geq \exp\big\{-(\log N)^2\big\}.$$

$\mathcal{T}$: $B(x_N; \varrho_N + \varrho_N^{\epsilon_1})$ 内の "truly"-open site の原点を含む連結成分．

Remark

1. "Truly"-open site は稀にある安全な場所である．典型的な点に対しては上の生存確率は $\exp\{-(\log N)^{5+o(1)}\}$.
2. x が "truly"-open かどうかは $B(x; (\log N)^5)$ 内の局所的な情報で決まる．

“Truly”-open site による $S_{[0,N]}$ の近似

以下の二つの事実が $\partial S_{[0,N]}$ を “truly”-open site の境界 $\partial\mathcal{T}$ で近似できることを保証する：

- $\mu_N\big(S_{[0,N]} \subset \mathcal{T}\big) \xrightarrow{N\to\infty} 1$,
- $\mu_N\big(S_{[0,N]} \supset \{x \in \mathcal{T} \colon \mathrm{dist}(x, \partial\mathcal{T}) \geq (\log N)^3\}\big) \xrightarrow{N\to\infty} 1$.

これらから $\mu_N\left(\partial S_{[0,N]} \subset \bigcup_{x\in\partial\mathcal{T}} B(x; (\log N)^3)\right) \xrightarrow{N\to\infty} 1$.

"Truly"-open site による $S_{[0,N]}$ の近似

以下の二つの事実が $\partial S_{[0,N]}$ を "truly"-open site の境界 $\partial \mathcal{T}$ で近似できることを保証する：

- $\mu_N\big(S_{[0,N]} \subset \mathcal{T}\big) \xrightarrow{N\to\infty} 1$,
  - Non-"truly"-open site を訪問すると生存しにくくなる.
- $\mu_N\big(S_{[0,N]} \supset \{x \in \mathcal{T} : \mathrm{dist}(x, \partial\mathcal{T}) \geq (\log N)^3\}\big) \xrightarrow{N\to\infty} 1$.
  - Ball covering theorem の類似.

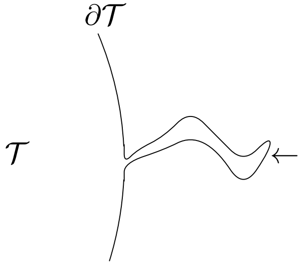
これらから $\mu_N\left(\partial S_{[0,N]} \subset \bigcup_{x\in\partial\mathcal{T}} B(x; (\log N)^3)\right) \xrightarrow{N\to\infty} 1$.

$\partial\mathcal{T}$ が "滑らか" であること

$\partial S_{[0,N]}$ の代わりに $\partial\mathcal{T}$ に対して以下を示せばよい：

$$\mu_N\Big(|\partial\mathcal{T}| \le \varrho_N^{d-1}(\log N)^c\Big) \xrightarrow{N\to\infty} 1.$$

$\partial\mathcal{T}$ は以下の理由により滑らかであることが期待される...



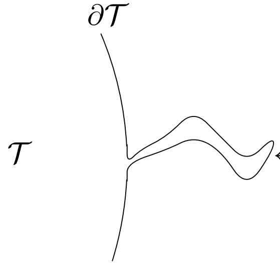
ランダムウォークはこのような細い "枝" には入って行かない.
ランダムウォークが来ないのであれば "truly"-open にしておく必要がない.

$\partial\mathcal{T}$ が“滑らか”であること

$\partial S_{[0,N]}$ の代わりに $\partial\mathcal{T}$ に対して以下を示せばよい：

$$\mu_N\Big(|\partial\mathcal{T}| \le \varrho_N^{d-1}(\log N)^c\Big) \xrightarrow{N\to\infty} 1.$$

$\partial\mathcal{T}$ は以下の理由により滑らかであることが期待される...



ランダムウォークはこのような細い“枝”には入って行かない.

$\leftarrow$ ランダムウォークが来ないのであれば“truly”-open にしておく必要がない.

この議論は内側向きの“枝”の存在を排除しないように見えるが，実際の証明はもっと抽象的に行うので，とくに“枝”の向きのような概念には依存しない.