

ランダム媒質における路の数え上げと 最短経路に関する話題

福島 竜輝（京都大学）

IMI-RIMS 共共拠点研究会
2015 年 12 月 8 日

路の数え上げ

$\mathbb{Z}$ 上で右か左に一歩ずつ動けるとする. n 歩目までの歩き方 (= 路) を考えたとき

1. 総数は 2^n 通り,
2. k に到達するのは $\binom{n}{(n+k)/2}$ 通り.

これは自明だが ...

路の数え上げ

$\mathbb{Z}$ 上で右か左に一步ずつ動けるとする. n 歩目までの歩き方 (= 路) を考えたとき

1. 総数は 2^n 通り,
2. k に到達するのは $\binom{n}{(n+k)/2}$ 通り.

これは自明だが ...

路を一様にランダムに選ぶ $\longleftrightarrow$ 単純ランダムウォーク.

Stirling の公式

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n}$$

を援用すれば, 中心極限定理, Cramér 型の大偏差原理などが直ちに分かる.

自己回避路—Self avoiding walk

条件を付けると難しくなる．最も有名なのは自己回避．

1. $N_n^{SA} = \mathbb{Z}^d$ 上で同じ点を二度訪れない長さ n の路の数
 $= \mu^{n+o(n)}$.
($N_{m+n}^{SA} \leq N_m^{SA} \cdot N_n^{SA}$ と Fekete の補題)
2. n 歩で点 $x \in \mathbb{Z}^d$ に到達する路の数 $N_n^{SA}(x) \dots ?$

自己回避路—Self avoiding walk

条件を付けると難しくなる．最も有名なのは自己回避．

1. $N_n^{SA} = \mathbb{Z}^d$ 上で同じ点を二度訪れない長さ n の路の数
 $= \mu^{n+o(n)}.$

($N_{m+n}^{SA} \leq N_m^{SA} \cdot N_n^{SA}$ と Fekete の補題)

2. n 歩で点 $x \in \mathbb{Z}^d$ に到達する路の数 $N_n^{SA}(x) \cdots ?$

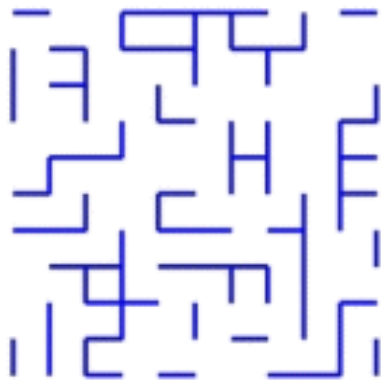
長さ n の自己回避路 γ を一様にランダムに選ぶとき

$$\langle |\gamma(n)|^2 \rangle^{1/2} \approx \begin{cases} n, & d = 1 \text{ (trivial),} \\ n^{3/4}, & d = 2 \text{ (open),} \\ n^{0.59}, & d = 3 \text{ (open),} \\ n^{1/2}, & d = 4 \text{ (open?),} \\ n^{1/2}, & d \geq 5 \text{ (Hara-Slade).} \end{cases}$$

► $n^{2/3d} \lesssim \langle |\gamma(n)|^2 \rangle^{1/2} \ll n$ (Madras, Duminil-Copin–Hammond)

ランダム媒質の場合：part 1

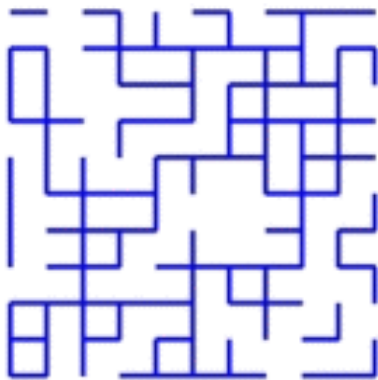
$\mathbb{Z}^d$ から独立に確率 p で辺を取り除いた格子の上の路の数.



$p = 0.4$: 劣臨界

ランダム媒質の場合：part 1

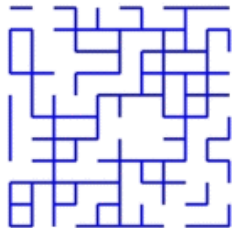
$\mathbb{Z}^d$ から独立に確率 p で辺を取り除いた格子の上の路の数.



$p = 0.6$: 優臨界

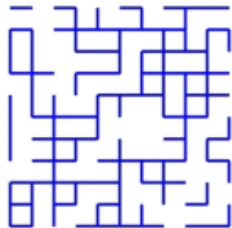
ランダム媒質の場合：part 1

- ▶ 長さ n の制限無しの路の数に関する結果は見当たらない …



ランダム媒質の場合：part 1

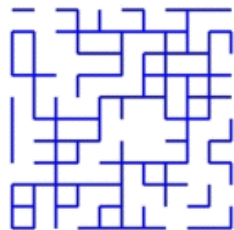
- ▶ 長さ n の制限無しの路の数に関する結果は見当たらない...
- ▶ 少し異なる「各ステップを一様を選ぶ」場合には優臨界では通常のランダムウォークと本質的に同じ.
(Sidoravicius–Sznitman, Berger–Biskup, Mathieu–Piatnitski...)



ランダム媒質の場合：part 1

- ▶ 長さ n の制限無しの路の数に関する結果は見当たらない...
- ▶ 少し異なる「各ステップを一様を選ぶ」場合には優臨界では通常のランダムウォークと本質的に同じ。

(Sidoravicius–Sznitman, Berger–Biskup, Mathieu–Piatnitski...)

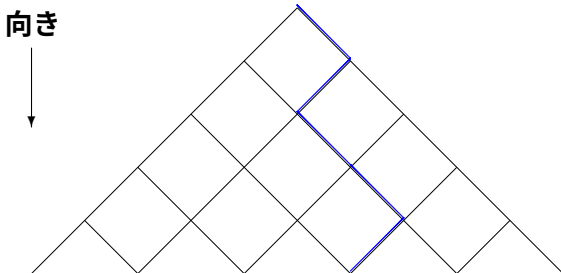


- ▶ 自己回避の路については Lacoïn による “disorder relevance” の研究がある：

$$N_n^{\text{SA}} \ll \langle N_n^{\text{SA}} \rangle \text{ for } \begin{cases} \forall p > p_c, & d = 2, \\ p \sim p_c, & d \gg 1. \end{cases}$$

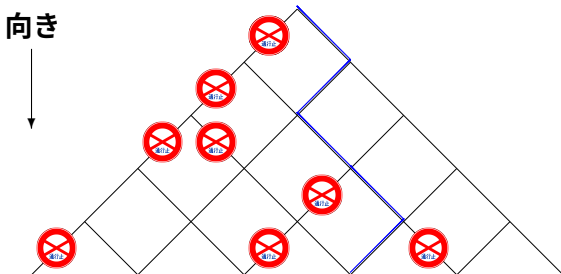
ランダム媒質の場合：part 2

$\mathbb{Z}$ 上の路の数は以下のような向き付けられた格子での路の数.



ランダム媒質の場合：part 2

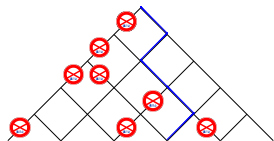
確率 p で独立に辺を取り除いたときに、(優臨界は仮定して)



- ▶ 深さ n まで到達する路の数 N_n ?
- ▶ (n, x) に到達する路の数 $N_n(x)$?

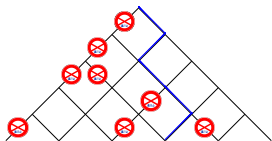
一般に $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d$ で路の総数 N_n について
 $\langle N_n \rangle = (2dp)^n \cdot p >$ 酔歩の再帰確率,
 の条件の下では

- ▶ $N_n \asymp \langle N_n \rangle$, (Yoshida).



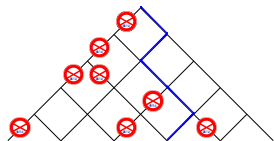
一般に $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d$ で路の総数 N_n について
 $\langle N_n \rangle = (2dp)^n$. $p >$ 酔歩の再帰確率,
の条件の下では

- ▶ $N_n \asymp \langle N_n \rangle$, (Yoshida).
- ▶ $N_n(x)/N_n \sim \frac{1}{(2\pi n)^{d/2}} e^{-|x|^2/n}$, (Nakashima).



一般に $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d$ で路の総数 N_n について
 $\langle N_n \rangle = (2dp)^n$. $p >$ 酔歩の再帰確率,
の条件の下では

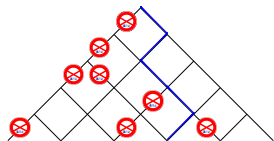
- ▶ $N_n \asymp \langle N_n \rangle$, (Yoshida).
- ▶ $N_n(x)/N_n \sim \frac{1}{(2\pi n)^{d/2}} e^{-|x|^2/n}$, (Nakashima).



一方で Yoshida $d = 1$, Bertin $d = 2$, Lacoïn $d \gg 1$, $p \sim p_c$ により

一般に $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d$ で路の総数 N_n について
 $\langle N_n \rangle = (2dp)^n$. $p >$ 酔歩の再帰確率,
 の条件の下では

- ▶ $N_n \asymp \langle N_n \rangle$, (Yoshida).
- ▶ $N_n(x)/N_n \sim \frac{1}{(2\pi n)^{d/2}} e^{-|x|^2/n}$, (Nakashima).



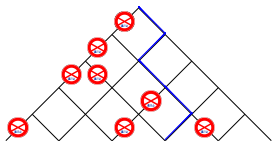
一方で Yoshida $d = 1$, Bertin $d = 2$, Lacoïn $d \gg 1$, $p \sim p_c$ により

- ▶ $N_n \leq e^{-cn} \langle N_n \rangle$.

一般に $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d$ で路の総数 N_n について
 $\langle N_n \rangle = (2dp)^n$. $p >$ 酔歩の再帰確率,
 の条件の下では

▶ $N_n \asymp \langle N_n \rangle$, (Yoshida).

▶ $N_n(x)/N_n \sim \frac{1}{(2\pi n)^{d/2}} e^{-|x|^2/n}$, (Nakashima).



一方で Yoshida $d = 1$, Bertin $d = 2$, Lacoïn $d \gg 1$, $p \sim p_c$ により

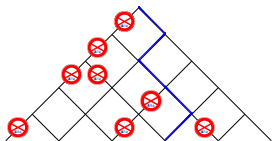
▶ $N_n \leq e^{-cn} \langle N_n \rangle$.

▶ さらにこのとき $N_n(x)/N_n$ は局在する (atom を持つ) .

一般に $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d$ で路の総数 N_n について
 $\langle N_n \rangle = (2dp)^n$. $p >$ 酔歩の再帰確率,
 の条件の下では

▶ $N_n \asymp \langle N_n \rangle$, (Yoshida).

▶ $N_n(x)/N_n \sim \frac{1}{(2\pi n)^{d/2}} e^{-|x|^2/n}$, (Nakashima).



一方で Yoshida $d = 1$, Bertin $d = 2$, Lacoïn $d \gg 1$, $p \sim p_c$ により

▶ $N_n \leq e^{-cn} \langle N_n \rangle$.

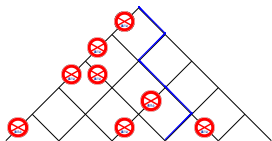
▶ さらにこのとき $N_n(x)/N_n$ は局在する (atom を持つ) .

この状況では路の数に関する結果もごく最近のもののみ。

一般に $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d$ で路の総数 N_n について
 $\langle N_n \rangle = (2dp)^n$. $p >$ 酔歩の再帰確率,
 の条件の下では

▶ $N_n \asymp \langle N_n \rangle$, (Yoshida).

▶ $N_n(x)/N_n \sim \frac{1}{(2\pi n)^{d/2}} e^{-|x|^2/n}$, (Nakashima).



一方で Yoshida $d = 1$, Bertin $d = 2$, Lacoïn $d \gg 1$, $p \sim p_c$ により

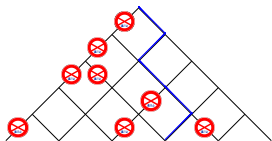
▶ $N_n \leq e^{-cn} \langle N_n \rangle$.

▶ さらにこのとき $N_n(x)/N_n$ は局在する (atom を持つ) .

この状況では路の数に関する結果もごく最近のもののみ.

▶ $N_n \geq e^{cn}$, (F.-Yoshida).

一般に $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d$ で路の総数 N_n について
 $\langle N_n \rangle = (2dp)^n$. $p >$ 酔歩の再帰確率,
 の条件の下では



- ▶ $N_n \asymp \langle N_n \rangle$, (Yoshida).
- ▶ $N_n(x)/N_n \sim \frac{1}{(2\pi n)^{d/2}} e^{-|x|^2/n}$, (Nakashima).

一方で Yoshida $d = 1$, Bertin $d = 2$, Lacoïn $d \gg 1$, $p \sim p_c$ により

- ▶ $N_n \leq e^{-cn} \langle N_n \rangle$.
- ▶ さらにこのとき $N_n(x)/N_n$ は局在する (atom を持つ) .

この状況では路の数に関する結果もごく最近のもののみ.

- ▶ $N_n \geq e^{cn}$, (F.-Yoshida).
- ▶ $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log N_n$, (Garet-Gou    -Marchand)

Directed polymer in random environment

通行止めにする代わりにペナルティを課すことにする.

$$Z_n^\beta = \sum_{\gamma} \exp \left\{ -\beta \sum_{j=1}^n 1_{\otimes}(j, \gamma_j) \right\}$$

この場合 $Z_n^\beta = e^{n\varphi(\beta)+o(n)}$ は簡単.

Proof.

$$Z_{m+n}^\beta \gtrsim Z_m^\beta \cdot Z_n^\beta \implies \log Z_{m+n}^\beta \gtrsim \log Z_m^\beta + \log Z_n^\beta.$$

劣加法エルゴード定理 (確率論的 Fekete の補題) により

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log Z_n^\beta.$$



Directed polymer in random environment

通行止めにする代わりにペナルティを課すことにする.

$$Z_n^\beta = \sum_{\gamma} \exp \left\{ -\beta \sum_{j=1}^n 1_{\otimes}(j, \gamma_j) \right\}$$

この場合 $Z_n^\beta = e^{n\varphi(\beta)+o(n)}$ は簡単.

Proof.

$$Z_{m+n}^\beta \gtrsim Z_m^\beta \cdot Z_n^\beta \implies \log Z_{m+n}^\beta \gtrsim \log Z_m^\beta + \log Z_n^\beta.$$

劣加法エルゴード定理 (確率論的 Fekete の補題) により
 $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log Z_n^\beta$. (但しエルゴード定理には $\langle |\log Z_n^\beta| \rangle < \infty$
が必要. N_n は正の確率で 0 になるのでこれは不可能.) □

Directed polymer in random environment

通行止めにする代わりにペナルティを課すことにする.

$$Z_n^\beta = \sum_{\gamma} \exp \left\{ -\beta \sum_{j=1}^n 1_{\otimes}(j, \gamma_j) \right\}$$

この場合 $Z_n^\beta = e^{n\varphi(\beta)+o(n)}$ は簡単. $\beta = \infty$ とすると $Z_n^\infty = N_n$.
単調性から $\exists \lim_{\beta \rightarrow \infty} \varphi(\beta)$. また Garet–Gou    –Marchand により $\varphi(\infty)$ の存在も既知.

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \varphi(\beta) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log Z_n^\beta = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log Z_n^\beta = \varphi(\infty) ?$$

(Directed polymer の自由エネルギーは零温度極限で連続?)

問題の設定

- ▶ $(\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}, P)$: $\mathbb{Z}^d$ 上のランダムウォークで遷移確率が

$$P(X_{n+1} = x | X_n = y) = c_1 \exp\{-c_2 |x - y|_1^\alpha\};$$

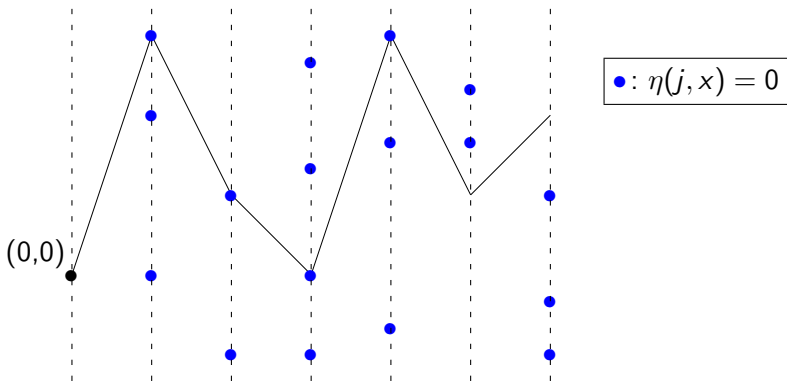
- ▶ $(\{\eta(j, x)\}_{(j, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d}, Q)$: 独立同分布な $\text{Ber}(p)$ 確率変数;

これらを用いて次の“分配関数”を定義する：

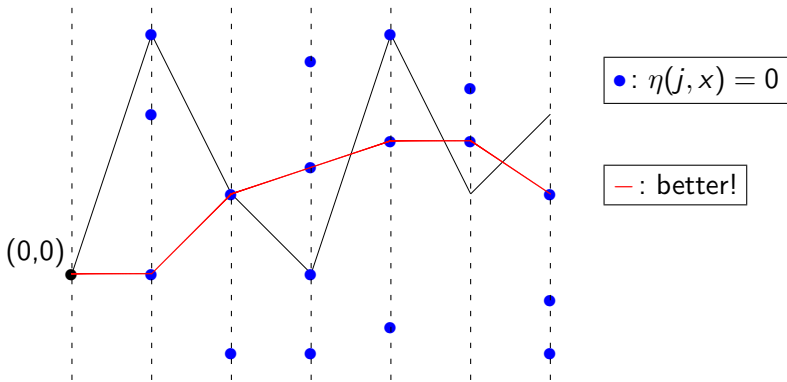
$$Z_n^{\eta, \beta} = P \left[\exp \left\{ -\beta \sum_{j=1}^n \eta(j, X_j) \right\} \right],$$

$$Z_n^{\eta, \infty} = P \left(\sum_{j=1}^n \eta(j, X_j) = 0 \right).$$

$$Z_n^{\eta, \beta} = \sum_{X: \text{path}} c_1 \exp \left\{ \sum_{j=1}^n \left[-\beta \eta(j, X_j) - c_2 |X_{j-1} - X_j|_1^\alpha \right] \right\}.$$



$$Z_n^{\eta, \beta} = \sum_{X: \text{ path}} c_1 \exp \left\{ \sum_{j=1}^n \left[-\beta \eta(j, X_j) - c_2 |X_{j-1} - X_j|_1^\alpha \right] \right\}.$$



自由エネルギー

自由エネルギーの存在は劣加法エルゴード定理により分かる：

$$\begin{aligned}\varphi(\beta) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log Z_n^{\eta, \beta} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} Q[\log Z_n^{\eta, \beta}], \quad \beta \in (-\infty, \infty]\end{aligned}$$

但し $Q[\log Z_n^{\eta, \infty}]$ の有限性だけは自明ではなく，類似のモデルでは成り立っていない場合もある．

自由エネルギー

自由エネルギーの存在は劣加法エルゴード定理により分かる：

$$\begin{aligned}\varphi(\beta) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log Z_n^{\eta, \beta} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} Q[\log Z_n^{\eta, \beta}], \quad \beta \in (-\infty, \infty]\end{aligned}$$

但し $Q[\log Z_n^{\eta, \infty}]$ の有限性だけは自明ではなく，類似のモデルでは成り立っていない場合もある．

問題 1： $\varphi(\beta)$ の $\beta \rightarrow \infty$ での連続性？

問題 2： $\beta = \infty$ において劣加法エルゴード定理が使えないときに， $\beta \rightarrow \infty$ の極限をとることで $\varphi(\infty)$ の存在が示せないか？

自由エネルギーの連続性

Theorem (Comets–F.–Nakajima–Yoshida)

$\alpha \in (0, d)$ とすると, $\varphi(\infty) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \varphi(\beta)$.

Remark

証明では $\forall \epsilon > 0$ に対して $\exists \beta > 0$,

$$Z_n^{\eta, \infty} \leq Z_n^{\eta, \beta} \leq e^{\epsilon n} Z_n^{\eta, \infty}$$

を示している．これにより劣加法エルゴード定理を回避して $\varphi(\infty)$ の存在を示すこともできている．

自由エネルギーの連続性

Theorem (Comets–F.–Nakajima–Yoshida)

$\alpha \in (0, d)$ とすると, $\varphi(\infty) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \varphi(\beta)$.

Remark

証明では $\forall \epsilon > 0$ に対して $\exists \beta > 0$,

$$Z_n^{\eta, \infty} \leq Z_n^{\eta, \beta} \leq e^{\epsilon n} Z_n^{\eta, \infty}$$

を示している．これにより劣加法エルゴード定理を回避して $\varphi(\infty)$ の存在を示すこともできている．

Theorem (Nakajima)

任意の $\alpha \in (0, \infty)$ に対し, $\varphi(\infty) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \varphi(\beta)$.

最短経路 : first passage percolation

分配関数

$$Z_n^{\eta, \beta} = \sum_{X: \text{path}} c_1 \exp \left\{ \sum_{j=1}^n \left[-\beta \eta(j, X_j) - c_2 |X_{j-1} - X_j|_1^\alpha \right] \right\}$$

の $\beta = \infty$ での ground state は以下の minimizer.

$$T_n(\eta) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^n |X_{j-1} - X_j|_1^\alpha : X \text{ は } \eta = 1 \text{ を通らない路} \right\}.$$

最短経路 : first passage percolation

分配関数

$$Z_n^{\eta, \beta} = \sum_{X: \text{path}} c_1 \exp \left\{ \sum_{j=1}^n \left[-\beta \eta(j, X_j) - c_2 |X_{j-1} - X_j|_1^\alpha \right] \right\}$$

の $\beta = \infty$ での ground state は以下の minimizer.

$$T_n(\eta) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^n |X_{j-1} - X_j|_1^\alpha : X \text{ は } \eta = 1 \text{ を通らない路} \right\}.$$

この種の問題は first passage percolation と呼ばれている。

最短経路：first passage percolation

- ▶ **最も標準的な設定は $\{\omega(x)\}_{x \in \mathbb{Z}^d}$ を正の独立同分布確率変数として**

$$T_n(\omega) = \min \left\{ \sum_{k=1}^n \omega(\gamma_k) : 0 \xrightarrow{\gamma} n\mathbf{e}_1 \text{ は lattice path} \right\}.$$

(Hammersley–Welsh, Cox, Durrett, Kesten...)

最短経路 : first passage percolation

- ▶ **最も標準的な設定は $\{\omega(x)\}_{x \in \mathbb{Z}^d}$ を正の独立同分布確率変数として**

$$T_n(\omega) = \min \left\{ \sum_{k=1}^n \omega(\gamma_k) : 0 \xleftrightarrow{\gamma} ne_1 \text{ は lattice path} \right\}.$$

(Hammersley–Welsh, Cox, Durrett, Kesten...)

- ▶ **今回のモデルと似ているのは ω を Poisson 点過程として**

$$T_n(\omega) = \min \left\{ \sum_{k=1}^n |\gamma_{k-1} - \gamma_k|^\alpha : 0 \xleftrightarrow{\gamma \subset \omega} ne_1 \right\}.$$

(Howard–Newman). **但しこの場合 $\alpha \leq 1$ は trivial.**

最短経路 : first passage percolation

- ▶ **最も標準的な設定は $\{\omega(x)\}_{x \in \mathbb{Z}^d}$ を正の独立同分布確率変数として**

$$T_n(\omega) = \min \left\{ \sum_{k=1}^n \omega(\gamma_k) : 0 \xleftrightarrow{\gamma} n\mathbf{e}_1 \text{ は lattice path} \right\}.$$

(Hammersley–Welsh, Cox, Durrett, Kesten...)

- ▶ **今回のモデルと似ているのは ω を Poisson 点過程として**

$$T_n(\omega) = \min \left\{ \sum_{k=1}^n |\gamma_{k-1} - \gamma_k|^\alpha : 0 \xleftrightarrow{\gamma \subset \omega} n\mathbf{e}_1 \right\}.$$

(Howard–Newman). **但しこの場合 $\alpha \leq 1$ は trivial.**

- ▶ **いずれの場合にも $\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} T_n$ の存在は劣加法エルゴード定理で分かる $\rightarrow$ time constant という.**

Time constant の連続性

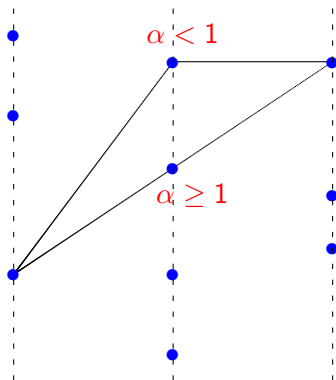
- ▶ Lattice path **の場合は ω の分布の収束から time constant の収束が従う.** (Cox–Kesten)
- ▶ Poisson **点過程上の路の場合に対応する結果はない.** 点過程の分布収束に関しては連続ではなさそう. 密度を変えるだけならおそらく連続.
- ▶ 今回のモデルに関しては特異極限も分かって

Theorem (Comets–F.–Nakajima–Yoshida)

適当なスケーリングのもとで $\exists \mu_1 = \lim_{p \uparrow 1} \mu_p$.

最短経路の性質

一般に最短経路の性質を調べるのは難しいが、今回のモデルではパラメータ α に依って面白い挙動が見られる。



上のように局所的な最適戦略が異なることから、 $\alpha \geq 1$ ではジャンプが小さくなりやすく、 $\alpha < 1$ では大きくなりやすい。

最短経路の性質

Theorem (Nakajima)

$\alpha > 1$ において T_n を最小化する路は n の冪の大きさのジャンプを持たない.

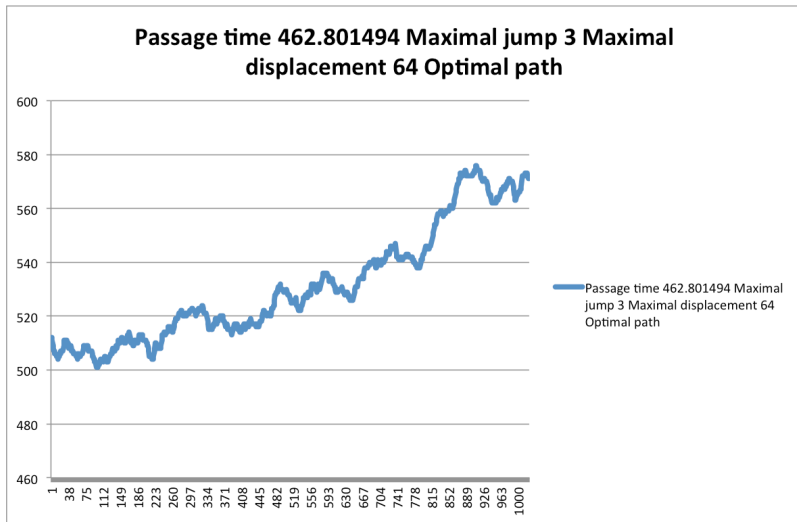
最短経路の性質

Theorem (Nakajima)

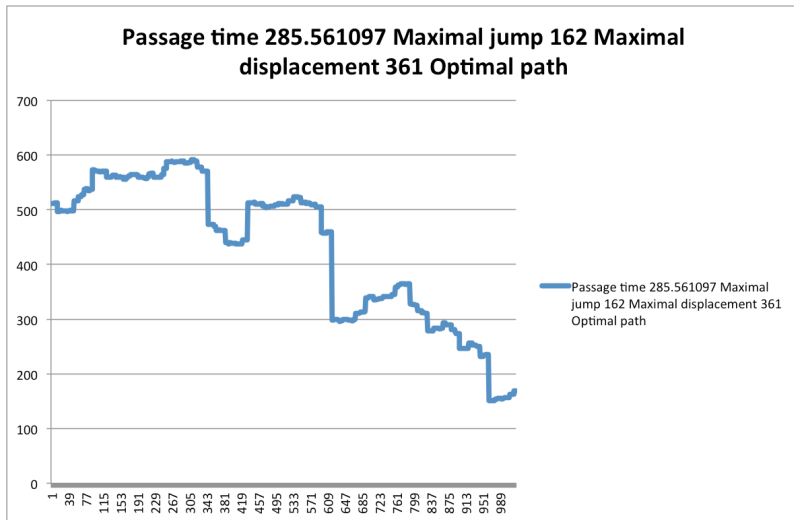
$\alpha > 1$ において T_n を最小化する路は n の冪の大きさのジャンプを持たない.

$\alpha < 1$ のときは数値実験によると (十分小さければ) 大きなジャンプがありそう ...

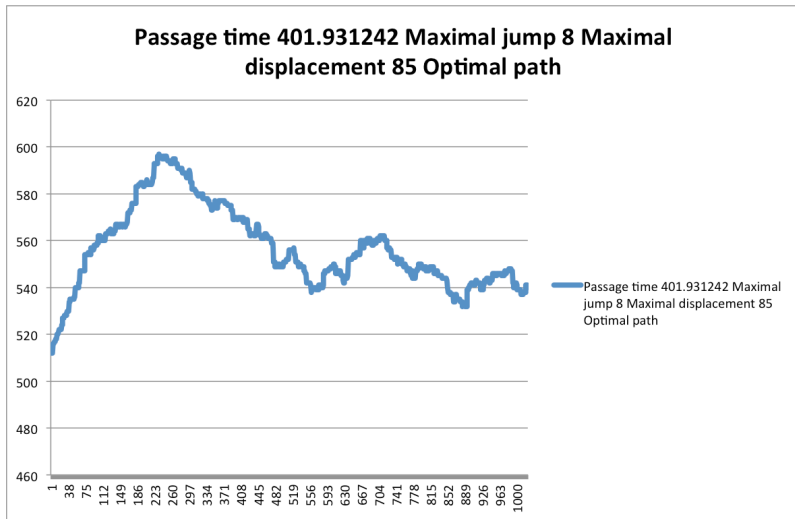
1 + 1 次元, $p = 1/2$, 1024 ステップ, $\alpha = 1.2$



1 + 1 次元, $p = 1/2$, 1024 ステップ, $\alpha = 0.4$



1 + 1 次元, $p = 1/2$, 1024 ステップ, $\alpha = 0.8$



1 + 1 次元, $p = 1/2$, $\alpha = 0.8$ の場合

ステップ数	1024	2048	4096	8192	16384	32768
最大ジャンプ	8.99	11.17	11.55	12.75	10	15
サンプル数	80	40	40	20	1	1
標準偏差	4.41	4.04	2.67	2.45	-	-