大偏差原理について

福島竜輝*

東京工業大学理工学研究科，日付

1 はじめに

本稿の目的は大偏差原理について，最も簡単な例を通じてその目指すところを解説することである．大偏差原理とは一言で言えば確率測度が集中する—確率論の言葉で言えば大数の法則のようなものが成り立つ—ときに，集中する点から外れたところの測度の減衰の速さを記述するものであり，とくに指数的に減衰する状況を問題にする．

個人的なことを言うと，初めて上のような説明を目にしたときにはあまり面白そうだとは思わなかった．確率論の流れとしてまず平均値への収束を主張する大数の法則があって，次に収束先の周りでの揺らぎを見る中心極限定理があって，その残りをやっている，と感じてしまったし，もしそういう流れだとすれば指数減衰だけにこだわる理由はないはずだとも思っていた．またそういう視点で見ると大偏差原理の定式化には不自然なところがあったということもある．

筆者が初めて大偏差原理を面白いと思ったのは，研究の関係で Donsker-Varadhan の一連の論文 [3, 4] を読んだときである．これは近代的な大偏差原理の定式化を導入した原典とも言える論文で，Kac のある予想に大偏差原理を使った証明が与えられていたのだが，基本的なアイデアは「Brown 運動の軌跡の空間で Laplace 原理の類似を示す」というものであった．（Laplace 原理については第 2 節で述べる．）この視点に立つと指数減衰にこだわる理由や，不自然だと思っていた定義などにも明快に意味がついて，非常に生き生きとした面白い理論に見えてきた．

このような若干個人的な背景と，大偏差原理の基礎的な文献（例えば [1, 2] など）において動機の説明が不十分なきらいがあるという事情から，ここでは大偏差原理の「無限次元空間における Laplace 原理」を導くという側面について簡単な例を使って解説を試みる．

2 Laplace 原理

Laplace 原理とは「大きなパラメータを持つ指数関数の積分の漸近挙動は被積分関数の最大値付近からの寄与だけで決まる」という経験則である．自明な例を挙げると，有界閉区間 $[a, b]$ 上の連続関数 $f, g > 0$ が与えられたときに

$$\int_a^b e^{nf(x)} g(x) \mathrm{d}x \approx \exp\left\{ n \sup_{x \in [a,b]} f(x) \right\}, \quad n \to \infty$$

が成り立つ．ここで本稿を通じて $\approx$ は両辺の対数の比が 1 に収束するという意味とする．上の形ではあまりに適用範囲が狭いようにも思われるが，より一般に（例えば無限区間で）定式化しようとすると様々な技術的条件が必要になってしまう．一方で具体的な問題に対しては一般論が適用できなくとも結果としては正し

*ryoki@math.titech.ac.jp

いことも多い．このことが「Laplace の定理」ではなく「原理」と呼ばれている所以であろう．ここでは後で使うためにも無限区間での例として Stirling の公式を弱い形で示すことにする．問題にするのは

$$n! = \int_0^\infty x^n e^{-x} \mathrm{d}x \tag{2.1}$$

の $n \to \infty$ での漸近挙動である．上の積分は変数変換によって

$$n^n \int_0^\infty y^n e^{-ny} \mathrm{d}y = n^n \int_0^\infty n e^{n(\log y - y)} \mathrm{d}y \tag{2.2}$$

と書き直すことができて，$\max_{y \in [0,\infty)}[\log y - y] = -1$ と $\log y - y$ の $y \to 0, \infty$ での挙動を考慮すれば，積分への寄与は最大値付近だけからきていること，すなわち

$$n! \approx n^n e^{-n}, \quad n \to \infty \tag{2.3}$$

が分かる．これが大きな数の階乗の漸近挙動に関する Stirling の公式である．

ところで上の積分は，$e^{n \log y}$ という関数を確率測度 $\mu_n(\mathrm{d}x) = ne^{-nx}\mathrm{d}x$ について積分したと見ることもできることに注意しておこう．こう書き直しておくと次節の大偏差原理の定義との対応が見やすい．

3 大偏差原理の定義と Varadhan の補題

X を可分完備距離空間とし，同時にある σ-field $\mathcal{F}$ を伴って可測空間でもあるとする．一般に $\mathcal{F}$ は Borel 集合体を含んでいることを仮定するが，一致するとは限らない．

定義 3.1. **$(X, \mathcal{F})$ 上の確率測度の族 $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が大偏差原理を満たすとは，ある下半連続関数 $I : X \to [0, \infty)$ が存在して任意の $\Gamma \in \mathcal{F}$ に対して**

$$-\inf_{x \in \Gamma^\circ} I(x) \le \liminf_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \mu_n(\Gamma) \le \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \mu_n(\Gamma) \le -\inf_{x \in \bar{\Gamma}} I(x)$$

が成り立つことをいう．I を rate function という．更に任意の $l \ge 0$ に対して level set $\{x \in X : I(x) \le l\}$ がコンパクトであるとき，I は good rate function であるという．

注意 3.2. 上の定義で $\Gamma = X$ とすれば $\inf_{x \in X} I(x) = 0$ が分かる．さらに I が good rate function のときはこれから $I(x) = 0$ となる点が存在することも従う．

例 3.3. 前節末の μ_n は $X = [0, \infty)$ 上で $I(x) = x$ を good rate function として大偏差原理を満たす．実際任意の $x \in \Gamma^\circ$ に対して $[x, x+\epsilon) \subset \Gamma$ とできて，

$$\mu_n(\Gamma) \ge \mu_n([x, x+\epsilon)) \ge \epsilon n e^{-n(x+\epsilon)}. \tag{3.1}$$

両辺の $\liminf \frac{1}{n} \log$ をとって $\epsilon \downarrow 0$ とすれば下からの評価が出る．また明らかに

$$\mu_n(\Gamma) \le n \int_{\inf \Gamma}^\infty e^{-nx} \mathrm{d}x \le \exp\{-n \inf \Gamma\} \tag{3.2}$$

であり，$\limsup \frac{1}{n} \log$ をとれば上からの評価が従う． □

粗っぽく言えば大偏差原理が成り立つということは $\mu_n(\mathrm{d}x)$ が $e^{-nI(x)}$ “$\mathrm{d}x$” に近いということである．実際十分小さい $\epsilon > 0$ に対して，$\mu_n(B(x,\epsilon))$ が $e^{-nI(x)}$ に近いことは従う．しかし上の定義は依然として分かりやすいとは言えないだろう．第一，測度の漸近挙動について述べているのになぜ定義に位相の言葉が入っているのだろう？と思うのは自然な疑問である．

序文に述べたように，この定義に意味を与えるのが次の Varadhan による「一般化された Laplace 原理」である．証明は一応与えるが本質的に自明であり，ほとんど「そう定義すれば当然そうなる」という議論しかしていないことが分かるはずである．また，とくに位相を考慮した定義をしていることが本質的であることが見てとれる．

定理 3.4 (Varadhan の補題). $(X, \mathcal{F})$ **上の確率測度の族** $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ **が** I **を** good rate function **として大偏差原理を満たすとする．このとき** X **上の有界連続関数** f **に対して**

$$\int e^{nf(x)}\mu_n(\mathrm{d}x) \approx \exp\left\{n\sup_{x\in X}[f(x)-I(x)]\right\}, \quad n\to\infty.$$

注意 3.5. 下からの評価には f の下半連続性だけで十分であり，上からの評価には f の上半連続性と上への有界性だけで十分である．証明は実際にこの二つに分けて行う．

証明. 下からの評価

任意に取った $\epsilon > 0$ に対して $x_\epsilon \in X$ を

$$f(x_\epsilon) - I(x_\epsilon) \geq \sup_{x\in X}[f(x)-I(x)] - \frac{\epsilon}{3} \tag{3.3}$$

を満たすようにとり，さらに $\delta > 0$ を十分小さくとって $\inf_{x\in B(x_\epsilon,\delta)} f(x) \geq f(x_\epsilon) - \epsilon/3$ となるようにする．後者では f の（下半）連続性を使っている．このとき

$$\int e^{nf(x)}\mu_n(\mathrm{d}x) \geq \int_{B(x_\epsilon,\delta)} e^{nf(x)}\mu_n(\mathrm{d}x) \geq \exp\left\{n\inf_{B(x_\epsilon,\delta)} f(x)\right\}\mu_n(B(x_\epsilon,\delta)) \tag{3.4}$$

であり，ここで大偏差原理の定義から n を十分大きくとれば

$$\mu_n(B(x_\epsilon,\delta)) \geq \exp\left\{-n\left(\inf_{B(x_\epsilon,\delta)} I(x) + \frac{\epsilon}{3}\right)\right\} \geq \exp\left\{-n\left(I(x_\epsilon)+\frac{\epsilon}{3}\right)\right\} \tag{3.5}$$

となることに注意すれば

$$\int e^{nf(x)}\mu_n(\mathrm{d}x) \geq \exp\left\{-n\left(\sup_{x\in X}[f(x)-I(x)] - \epsilon\right)\right\}. \tag{3.6}$$

上からの評価

$l = \sup_{x\in X} f(x) - \sup_{x\in X}[f(x)-I(x)] + 1 (<\infty)$ とする．f の上半連続性と I の下半連続性より任意の $\epsilon > 0$ と $y \in X$ に対し，y を中心とする開球 U_y^ϵ を

$$x \in \bar{U}_y^\epsilon \Rightarrow f(x) \leq f(y) + \epsilon/3 \ \& \ I(x) \geq I(y) - \epsilon/3 \tag{3.7}$$

を満たすように取れる．いま I が good rate function との仮定から $L_l := \{x \in X : I(x) \leq l\}$ はコンパクトであるから L_l の有限被覆 $\{U_{y_1}^\epsilon, \ldots, U_{y_N}^\epsilon\}$ が抜き出せる．すると

$$\int e^{nf(x)}\mu_n(\mathrm{d}x) \leq \sum_{k=1}^N \int_{\bar{U}_{y_k}^\epsilon} e^{nf(x)}\mu_n(\mathrm{d}x) + \int_{X\setminus\bigcup_{k=1}^N U_{y_k}^\epsilon} e^{nf(x)}\mu_n(\mathrm{d}x) \tag{3.8}$$

であり，大偏差原理の上からの評価を用いると十分大きな n に対しては

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^N \int_{\bar{U}_{y_k}^\epsilon} e^{nf(x)}\mu_n(\mathrm{d}x) + \int_{X\setminus\bigcup_{k=1}^N U_{y_k}^\epsilon} e^{nf(x)}\mu_n(\mathrm{d}x) \\
&\leq \sum_{k=1}^N \exp\left\{n\left(\sup_{x\in\bar{U}_{y_k}^\epsilon} f(x) - \inf_{x\in\bar{U}_{y_k}^\epsilon} I(x) + \frac{\epsilon}{3}\right)\right\} + \exp\left\{n\left(\sup_{x\in X}[f(x)-I(x)] - \frac{1}{2}\right)\right\} \\
&\leq N\max_{1\leq k\leq N}\exp\{n(f(y_k) - I(y_k) + \epsilon)\} + \exp\left\{n\left(\sup_{x\in X}[f(x)-I(x)] - \frac{1}{2}\right)\right\}
\end{aligned} \tag{3.9}$$

となることが分かる．右辺第二項は定理 3.2 の右辺に比べて無視できる量である．一方で第一項が（近似 $\approx$ の意味で）定理 3.2 の右辺で押さえられることは明らかであろう． □

注意 3.6. 注意深い読者は上の Varadhan の補題が，第 2 節で行った Stirling の公式を求める計算の根拠を与えてくれないことに気付いたかもしれない．これについては第 6 節でコメントする．

4 統計物理からの動機

大偏差原理が無限次元を含む一般の空間の上で Laplace 原理を定式化するのに適した枠組みであることは分かったとして，一般化を考えるには動機が必要である．Donsker と Varadhan には Kac の予想に答えるために「軌跡の空間」を考えるという動機があったわけだが，ここではより初等的な統計物理からの動機を述べる．ただし本節の議論は形式的な部分が多いので，概要だけをつかんで欲しい．

統計物理の Gibbs による定式化には巨大な空間の上での指数関数の積分が自然に現れる．実際抽象的に書けば，相空間 X^N の点 $(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ がエネルギー $U(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ を持つという系の逆温度 β における Canonical 分布は

$$\mu_{N,\beta}(\mathrm{d}x) = \frac{1}{Z_{N,\beta}} \exp\left\{-\beta U(x_1, \ldots, x_N)\right\} \mu_N(\mathrm{d}x) \tag{4.1}$$

で与えられることになっている．ただし $Z_{N,\beta}$ は規格化因子であり μ_N は一様測度である．従って物理量 f の平均値（しばしば観測値と同一視される）は

$$\mu_{N,\beta}(f) = \frac{1}{Z_{N,\beta}} \int_{X^N} f(x_1, \ldots, x_N) \exp\left\{-\beta U(x_1, \ldots, x_N)\right\} \mu_N(\mathrm{d}x) \tag{4.2}$$

と表されるが，一般に統計物理では N が非常に大きい状況に興味があるので，これは確かに巨大な空間の上での積分になっている．さらに数学的には空間は動かない方が扱いやすいので，初めから $(X^{\mathbb{N}}, \mu_{\mathbb{N}})$ を考えて (X^N, μ_N) はその最初の N 個の座標への射影ととらえることが多い．そうすると自然に無限次元の問題へと導かれるというわけである．

さて，現実的な状況においては $U(x_1, \ldots, x_N)$ は多数の粒子の相互作用の和を表しており，従って一般にその絶対値は大きな量になる．とくにこれが系の総内部エネルギーであることを考慮すれば，一粒子辺りの内部エネルギーが有限の値になるという自然な状況では N に比例する発散をしそうに見える．(馴染みのない読者は先に次節で扱う例を見るとよい．）ここでは簡単のためさらに強く極限

$$u(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} U(x_1, \ldots, x_N) \tag{4.3}$$

が全ての $x \in X^{\mathbb{N}}$ に対して存在すると仮定しよう．このとき $Z_{N,\beta}$ は一般に N を大きくするとき指数的に発散したり 0 に収束することになり，$\mu_{N,\beta}(f)$ を調べることは不定形の極限を調べることになっている．こういう時はまず分母にあたる $Z_{N,\beta}$ の漸近挙動を決定して，それから分子にあたる $f\exp\{-\beta U\}$ の積分と比較するのが自然であろう．ここで仮に μ_N に対して I を rate function とする大偏差原理が成り立つとして，形式的に Varadhan の補題を使うと

$$\begin{aligned} Z_{N,\beta} &= \int \exp\left\{-\beta U(x_1, \ldots, x_N)\right\} \mu_N(\mathrm{d}x) \\ &\approx \exp\left\{-\beta N \sup_x \left[u(x) + \frac{1}{\beta} I(x)\right]\right\} \end{aligned} \tag{4.4}$$

となって，$Z_{N,\beta}$ の漸近挙動の決定は u と I に関する最大値問題に帰着される．つまり大偏差原理とそれに続く無限次元での Laplace 原理は（正当化できれば）確かに統計物理のモデルを解析する最初の一歩を与えてくれるのである．

ちなみに統計物理の言葉を借りると $\log Z_{N,\beta}/\beta N$ （またはその極限）は Helmholtz の自由エネルギーと呼ばれているものであり，β が逆温度であったことを思い出すと上の式は

$$\text{Helmholtz の自由エネルギー} = \text{内部エネルギー} + \text{温度} \times I \tag{4.5}$$

となっている．これと熱力学の関係式 $F = U - TS$ を見比べると rate function I が（符号の差を除いて）ちょうどエントロピーの役割を担っていることが見てとれる．このことから I のことをエントロピー関数と呼ぶこともある．

5 Curie-Weiss 模型

抽象論ばかりでは面白くないので一つ簡単な模型を解析してみよう．磁性体のモデルとして以下のようなものを考える：

1. N 個の粒子からなる系であり，
2. 各粒子は $\{-1(=\mathrm{S}\ 極), +1(=\mathrm{N}\ 極)\}$ という二つの向きを持ち，
3. 各粒子は他の粒子の向きの平均と同じ向きを持つ傾向がある．

このようなモデルの一つの例は Canonical 分布が $\{-1,+1\}^N$ 上の測度

$$\mu^{\mathrm{CW}}_{N,\beta}(\mathrm{d}x) = \frac{1}{Z^{\mathrm{CW}}_{N,\beta}} \exp\left\{\beta \sum_{1\le k\le N} x_k \sum_{1\le l\ne k\le N} \frac{x_l}{N}\right\} \prod_{1\le k\le N} \frac{1}{2}(\delta_{-1}+\delta_{+1})(\mathrm{d}x_k) \tag{5.1}$$

で与えられるものであり，Curie-Weiss 模型と呼ばれている．まず $\beta=0$, つまり相互作用がないときを考えてみると各 x_k は ±1 をそれぞれ確率 1/2 で独立にとり，従って全ての $(x_k)_{k=1}^N \in \{-1,+1\}^N$ が 2^{-N} で実現される一様測度になっている．次に $\beta>0$ のときに指数関数の引数を見ると，各 k について x_k が他の粒子の向きの平均と同じ向きを持っている時に正になり，従ってそのような $(x_k)_{1\le k\le N}$ に大きな重みを与えることになっている．

以下では Curie-Weiss 模型の平均磁化 $\frac{1}{N}\sum_{1\le k\le N} x_k$ に関して次のような相転移を示すことを目指す．

定理 5.1. 1. $0\le\beta\le 1/2$ ならば，任意の $\epsilon>0$ に対して

$$\mu^{\mathrm{CW}}_{N,\beta}\left(\frac{1}{N}\sum_{1\le k\le N} x_k \in (-\epsilon,\epsilon)\right) \to 1, \quad N\to\infty. \tag{5.2}$$

2. $\beta>1/2$ ならば，ある $m^*(\beta)>0$ が存在して任意の $\epsilon>0$ に対して

$$\mu^{\mathrm{CW}}_{N,\beta}\left(\frac{1}{N}\sum_{1\le k\le N} x_k \in m^*(\beta)+(-\epsilon,\epsilon)\right) \to \frac{1}{2}, \quad N\to\infty. \tag{5.3}$$

また系の対称性から明らかなように $-m^*(\beta)+(-\epsilon,\epsilon)$ に対しても同じ結論が成り立つ．

この定理は Curie-Weiss 模型の平均磁化が（物理的に自然な）$N\to\infty$ の極限において，高温では 0 に収束し低温では 0 でない値に収束することを示している．後者の状況は帯磁した状態が安定であり，従って永久磁石が存在し得るということを意味する．ちなみに実験的には鉄は 700 ℃付近でこの相転移を起こすことが知られている．

注意 5.2. Curie-Weiss 模型ではどんなに離れた二つの粒子も同じ強さで相互作用する．これは物理的には不自然であり，相空間を $\{-1,+1\}^{\mathbb{Z}^d}$ にして隣り合う粒子の向きだけが揃う傾向のあるモデルを考えた方が現実的である．このモデルは Ising 模型と呼ばれ，その平均磁化は $d=1$ では相転移を示さないが $d\ge2$ では相転移を示すことが知られている．

定理の証明の準備として Curie-Weiss 模型を少し書き直しておこう．簡単な計算で

$$\sum_{1\le k\le N} x_k \sum_{1\le l\ne k\le N} \frac{x_l}{N} = N\left(\sum_{1\le k\le N}\frac{x_k}{N}\right)^2 - 1 \tag{5.4}$$

が分かるので，エネルギーは平均磁化だけの関数になっている．これと一様測度のもとでの平均磁化の分布

$$\nu_N(\mathrm{d}x) = \mu_N\left(\frac{1}{N}\sum_{1\le k\le N} x_k \in \mathrm{d}x\right) \tag{5.5}$$

を用いると

$$\mu_{N,\beta}^{\mathrm{CW}}\left(\frac{1}{N}\sum_{1\le k\le N}x_k\in \mathrm{d}x\right)=\frac{1}{\tilde{Z}_{N,\beta}^{\mathrm{CW}}}\exp\{\beta N x^2\}\nu_N(\mathrm{d}x), \tag{5.6}$$

$$\tilde{Z}_{N,\beta}^{\mathrm{CW}}=\int \exp\{\beta N x^2\}\nu_N(\mathrm{d}x) \tag{5.7}$$

と一つの変数で全てが書ける.（一体問題化という.）

5.1 コイン投げの平均値に対する大偏差原理

前節末で見た通り，Curie-Weiss 模型の平均磁化の分布に関しては

$$\nu_N(A)=\mu_N\left(\frac{1}{N}\sum_{1\le k\le N}x_k\in A\right) \tag{5.8}$$

に関する積分で全てが表せる．従ってこの測度に対する大偏差原理が必要である．このような標本平均に対しては Cramer の定理という一般的な処方箋もあるのだが，ここでは Stirling の公式を使って直接導いてみよう．$X=[-1,1]$ とし簡単のため N は偶数とする．ν_N は N 個の点 $\{-1,\frac{-N+2}{N},\frac{-N+4}{N},\dots,1\}$ に集中しているので，まず各点の測度を調べてみると，$\frac{1}{N}\sum_{1\le k\le N}x_k=\frac{2K}{N}$ になるのは $x_k=1$ となる k がちょうど $\frac{N}{2}+K$ 個の時であるから

$$\begin{aligned}
\nu_N\left(\left\{\frac{2K}{N}\right\}\right)&=\binom{N}{\frac{N}{2}+K}\frac{1}{2^N}\\
&\approx\frac{N^Ne^{-N}}{(\frac{N}{2}+K)^{\frac{N}{2}+K}e^{-\frac{N}{2}-K}(\frac{N}{2}-K)^{\frac{N}{2}-K}e^{-\frac{N}{2}+K}}\frac{1}{2^N}\\
&=\exp\left\{-N\left[\left(\frac{1+\frac{2K}{N}}{2}\right)\log\left(1+\frac{2K}{N}\right)+\left(\frac{1-\frac{2K}{N}}{2}\right)\log\left(1-\frac{2K}{N}\right)\right]\right\}
\end{aligned} \tag{5.9}$$

である．このことからすぐに ν_N が

$$I(x)=\frac{1+x}{2}\log(1+x)+\frac{1-x}{2}\log(1-x) \tag{5.10}$$

を good rate function として大偏差原理を満たすことが分かる.（点の数 N が対数をとって N で割れば 0 に収束する量であることを使えば定義を直接チェックできる.）

5.2 自発磁化の相転移の証明

前節の大偏差原理を用いていよいよ Curie-Weiss 模型の相転移を示そう．自発磁化の分布は

$$\nu_{N,\beta}^{\mathrm{CW}}(\mathrm{d}x):=\mu_{N,\beta}^{\mathrm{CW}}\left(\frac{1}{N}\sum_{1\le k\le N}x_k\in \mathrm{d}x\right)=\frac{1}{\tilde{Z}_{N,\beta}^{\mathrm{CW}}}\exp\{\beta N x^2\}\nu_N(\mathrm{d}x) \tag{5.11}$$

と書けるのであった．こういう測度の解析は $\tilde{Z}_{N,\beta}^{\mathrm{CW}}$ を調べることから始めるべきであることは既に述べた．さて，いま $X=[-1,1]$ であるから βx^2 は有界連続関数になっていることに注意すると Varadhan の補題が使えてすぐに

$$\tilde{Z}_{N,\beta}^{\mathrm{CW}}=\int\exp\{\beta N x^2\}\nu_N(\mathrm{d}x)\approx\exp\left\{N\sup_{x\in[-1,1]}\left[\beta x^2-I(x)\right]\right\} \tag{5.12}$$

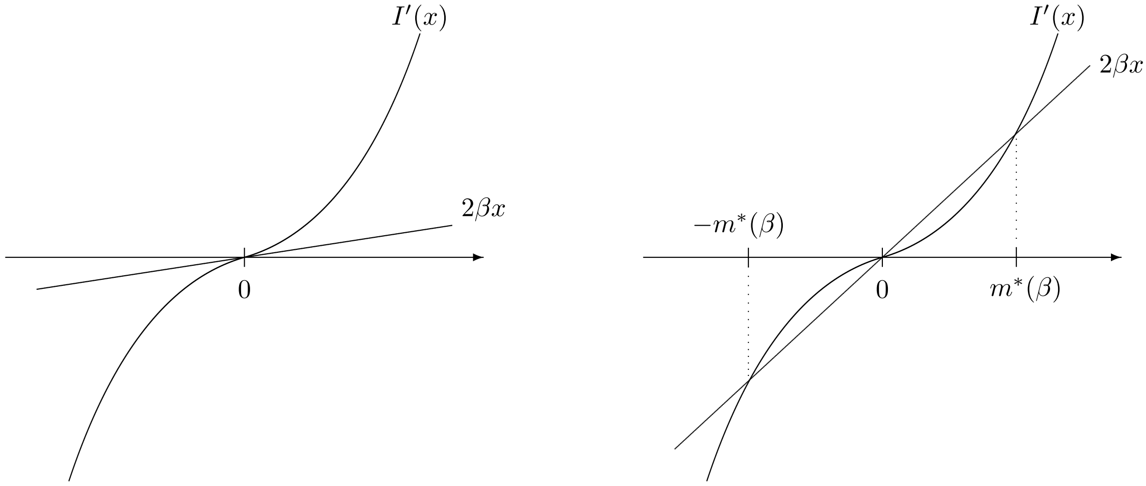
が従う．ここで I は $(-1,1)$ 上で何回でも微分可能であり，導関数 I' は以下の性質を持つことが分かる：

1. $(-1,0)$ で上に凸, $(0,1)$ で下に凸,

2. $I'(0)=0, I''(0)=1$,

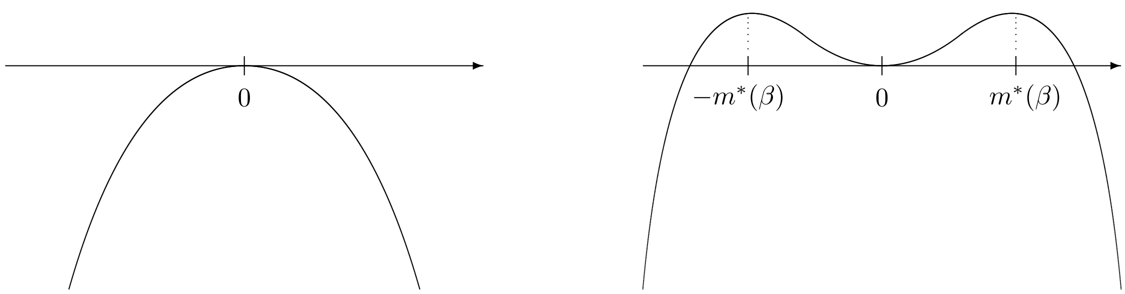
3. $\lim_{x\downarrow -1} I'(x)=-\infty$, $\lim_{x\uparrow 1} I'(x)=\infty$.

これと $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\beta x^2 = 2\beta x$ のグラフを比べてみると以下のようになっている：



(1) $\beta \le 1/2$ の場合　　(2) $\beta > 1/2$ の場合

従って $\beta x^2 - I(x)$ のグラフは次のようになる：



(1) $\beta \le 1/2$ の場合　　(2) $\beta > 1/2$ の場合

$\beta \le 1/2$ のときも $m^*(\beta)=0$ と定めることにすれば，いずれの場合にも

$$\tilde{Z}^{\mathrm{CW}}_{N,\beta} \approx \exp\left\{N\left(\beta m^*(\beta)^2 - I(m^*(\beta))\right)\right\}. \tag{5.13}$$

さて，定理 5.1 を証明するためには $\pm m^*(\beta)$ から離れたところ

$$\mathcal{N}_\epsilon(m^*(\beta)) = \{x \in [0,1] : |x - m^*(\beta)| \ge \epsilon, |x + m^*(\beta)| \ge \epsilon\} \tag{5.14}$$

の測度

$$\nu^{\mathrm{CW}}_{N,\beta}(\mathcal{N}_\epsilon(m^*(\beta))) = \frac{1}{\tilde{Z}^{\mathrm{CW}}_{N,\beta}} \int_{\mathcal{N}_\epsilon(m^*(\beta))} \exp\{\beta N x^2\}\nu_N(\mathrm{d}x) \tag{5.15}$$

が 0 に収束することを示せばよいわけだが，上で $\tilde{Z}^{\mathrm{CW}}_{N,\beta}$ の挙動が分かっているので，後ろの積分の挙動を調べて比較しよう．やや人工的だが無理矢理

$$1_{\mathcal{N}_\epsilon(m^*(\beta))}(x) = \exp\left\{-\infty \cdot 1_{\mathcal{N}_\epsilon(m^*(\beta))^c}(x)\right\} \tag{5.16}$$

と書き直すと，この指数関数の引数は上半連続になっているので Varadhan の補題の上からの評価が適用できて

$$\int_{\mathcal{N}_\epsilon(m^*(\beta))} \exp\{\beta N x^2\}\nu_N(\mathrm{d}x) \approx \exp\left\{N \sup_{x\in\mathcal{N}_\epsilon(m^*(\beta))} \left[\beta x^2 - I(x)\right]\right\} \tag{5.17}$$

となっている．いま $\pm m^*(\beta)$ が $\beta x^2 - I(x)$ の孤立した最大点であることは何回か微分してみればすぐに分かるので

$$\sup_{x\in\mathcal{N}_\epsilon(m^*(\beta))} \left[\beta x^2 - I(x)\right] < \beta m^*(\beta)^2 - I(m^*(\beta)), \tag{5.18}$$

従って

$$\nu_{N,\beta}^{\mathrm{CW}}(\mathcal{N}_\epsilon(m^*(\beta))) \approx \exp\left\{N\left(\sup_{x\in\mathcal{N}_\epsilon(m^*(\beta))} \left[\beta x^2 - I(x)\right] - \left[\beta m^*(\beta)^2 - I(m^*(\beta))\right]\right)\right\} \tag{5.19}$$

は（指数的に速く）0 に収束することが示された．$\beta > 1/2$ のときに $-m^*(\beta)$ と $+m^*(\beta)$ の近傍に半分ずつ集中することは系の対称性から分かる． □

6 おわりに

最後に題材の選択に関するコメント（弁解）や，今後の読書案内を述べる．

まず Curie-Weiss 模型を題材にしたのは，微積分以上の知識を仮定しない「誰にでも分かる導入」にしたかったからである．このモデルは大偏差原理の適用例としてはあまりに矮小化されたものと言うべきかも知れない．実際，最初の段階で一体問題化してしまっているので一次元の問題になっており，空間 X を一般化した意味がない.（つまり無限次元の Laplace 原理は使っていない.）また大偏差原理の証明自体も各点の測度を求めることで行っており，そんなことができる状況では一般論など無くても後に続く解析はできる．しかしこのモデルが一般論の一部として扱えているということは依然として強調に値する．上で「解析はできる」と言ったものの第 2 節に述べた古典的な Laplace 原理の範疇には収まっていない（ν_N は密度を持たない）ので，それは「各論的にはできる」という意味に過ぎない．密度の有無などに関わらず統一的に Laplace 原理ができる枠組みというだけでも大偏差原理には意味がある．

もちろん，より一般の統計物理のモデルにおいては “向き”（スピンと呼ばれることも多い）の平均値だけで相互作用をすべて記述するようなことはできないので，密度の有無などをはるかに超えた一般化を必要とする．もう少し正確に言うと Curie-Weiss 模型では写像

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k : \{-1,+1\}^{\mathbb{N}} \to [-1,1] \tag{6.1}$$

によって $[-1,1]$ に落として像測度の大偏差原理を考えれば十分だったが，一般にはエネルギー関数を記述するのに十分な情報を持った大きさの空間までしか落とせない．例えば隣接するスピン（だけ）と揃う傾向のある Ising 模型を $\{-1,+1\}^{\mathbb{Z}^d}$ 上で考えると，エネルギーを記述するのにスピン配置 $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ の情報をほとんど落とせないことは想像がつくであろう．従って，この場合には元の $\{-1,+1\}^{\mathbb{Z}^d}$ 上で大偏差原理を確立しないといけないわけである．この方面に興味がある読者は Ellis の本 [5] や概説 [6] を見られると良い．とくに後者では Curie-Weiss 模型，Curie-Weiss-Potts 模型，d 次元 Ising 模型（$d \geq 2$）とモデルを変えていくと，必要な大偏差原理の “level” が上がっていくことが述べられていて面白い．

別の方向としては，やはり冒頭に挙げた Donsker-Varadhan の論文は今読んでも面白いと思う．この一連の論文はちょっと変わったストーリーになっていて，I で一般論を展開するのだが，それが目標の（Kac の予想である）Wiener sausage の問題にはそのままでは使えないと言って II で修正して，最後に [4] で解きたかった問題に適用する，という流れになっている．とくに II で行われる修正というのは，本稿の第 4 節でいうところの内部エネルギーにあたる関数が自然な位相では連続になってくれないために，より強い位相を

持った空間にうまく写像してその像測度に対して大偏差原理を証明し直すというものであり，細かいことだがこれが第 3 節の最初に「$\mathcal{F}$ は Borel とは限らない」と述べた理由である．すなわち仮に自然な位相があって σ-field がそれから定まっているとしても，問題毎に適した位相に取り替えなければいけない可能性があるということである．ちなみに大偏差原理を応用する研究の現場では，位相の問題の他にも理論をわずかに修正しながら進まなければいけないことは日常茶飯事であって，そういう意味でも Donsker-Varadhan の最初の仕事は雛形を与えていると言える．なおこの方面については最初にも挙げた [2] が，少し違う視点から捉え直して発展させた標準的文献になっている．

上で述べた "修正" の簡単な例が第 2 節の Stirling の公式の導出に既に現れているのでそれを説明して本稿を終わろう．第 2 節末に導入した $\mu_n(\mathrm{d}x) = ne^{-nx}\mathrm{d}x$ が $X = [0, \infty)$ 上で $I(x) = x$ を good rate function として大偏差原理を満たすことは定義の直後に例として述べた．ところが第 3 節の最後にも注意したが，Varadhan の補題を使って Stirling の公式を導くことは直接にはできない．$f(x) = \log x$ は $[0, \infty)$ 上で連続でも有界でもないからである．これはやや場当たり的に見えるが次のようにして解決できる．区間 $[1/M, M]$ をとってその外での積分値を考えると，簡単な評価で

$$\lim_{M\to\infty} \limsup_{\alpha\to\infty} \frac{1}{\alpha} \log \int_{[1/M,M]^c} e^{\alpha(\log y - y)}\mathrm{d}y = -\infty \tag{6.2}$$

となっていることが分かる．実際これが (2.2) の下で「〜の挙動を考えれば」と述べたことの内容である．いま示したいことは

$$\lim_{\alpha\to\infty} \frac{1}{\alpha} \log \int e^{\alpha(\log y - y)}\mathrm{d}y = -1 \tag{6.3}$$

だったのだから，あらかじめ M を大きくとっておけば $[1/M, M]$ に制限した積分だけを考えればよく，そこでは $f(x) = \log x$ が有界連続だから Varadhan の補題が使えるのである．

注意 6.1. この修正自体は今や大偏差原理の理論の中では標準的なものになっており，(6.2) は exponential tightness と呼ばれる条件になっている.（一般的な定義は [1] または [2] を参照.）しかし筆者はこれを Varadhan の補題の仮定に含めるのは美観を損なうと思うので，修正と見なした方が良いと思っている．

参考文献

[1] A. Dembo and O. Zeitouni. *Large deviations techniques and applications*, volume 38 of *Applications of Mathematics (New York)*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1998.

[2] J.-D. Deuschel and D. W. Stroock. *Large deviations*, volume 137 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press Inc., Boston, MA, 1989.

[3] M. D. Donsker and S. R. S. Varadhan. Asymptotic evaluation of certain Markov process expectations for large time. I. II. *Comm. Pure Appl. Math.*, 28:1–47; ibid. 28 (1975), 279–301, 1975.

[4] M. D. Donsker and S. R. S. Varadhan. Asymptotics for the Wiener sausage. *Comm. Pure Appl. Math.*, 28(4):525–565, 1975.

[5] R. S. Ellis. *Entropy, large deviations, and statistical mechanics*, volume 271 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, New York, 1985.

[6] R. S. Ellis. An overview of the theory of large deviations and applications to statistical mechanics. *Scand. Actuar. J.*, (1):97–142, 1995. Harald Cramér Symposium (Stockholm, 1993).