

4次元トポロジーの世界

丹下基生

所属：筑波大学

ロマンティック数学ナイトプライム@筑波大学

2018/11/3

はじめに

自己紹介

1978 年愛知県名古屋市にて生まれ育つ。
京都にて大学生活を送る。
指導教官は深谷賢治先生 (Master)、上正明先生 (Doctor)。

京都で数年間ポスドクをし、
2012 年より筑波大学幾何分野助教。
専門は 4 次元トポロジー。
結婚し二児 (小学生) の父。

学術的な先祖 (敬称略)

クライン (エルランゲンプログラム、幾何学と変換群)

|

リンデマン (π の超越性)

|

ヒルベルト (ヒルベルト空間)

|

高木貞治 (クロネッカー青春の夢、絶対アーベル拡大)

|

彌永昌吉 (類対論。小平邦彦、伊藤清、佐藤幹夫 etc. の先生)

|

田村一郎 (葉層構造、岩波の「トポロジー」の著者)

|

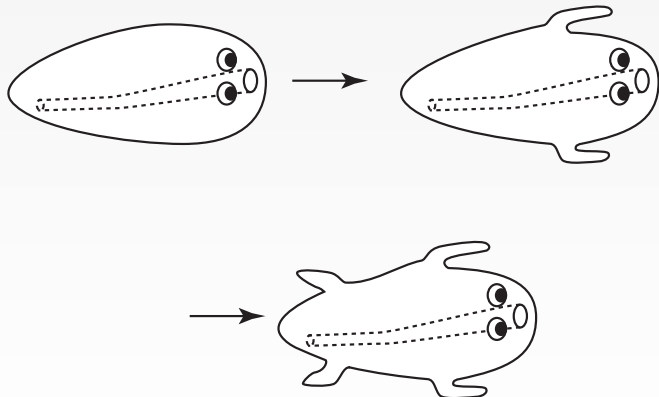
上正明 (楕円曲面の微分同相類やゲージ理論)

|

私 (4次元トポロジー、主に4次元多様体の構成など。)

トポロジーとは？

図形を連続変形¹しても (同相という) 同じものとして考える学問のこと

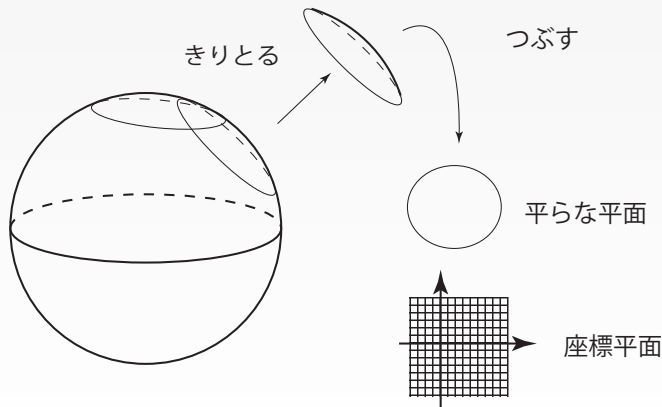


¹集合同土を粘土のように伸ばしたり縮めたりしてできる変形のこと

多様体を考える

局所的に、平らなものをつなぎ合わせたもの。
大域的には平らではなくてよい。

(例：球面)



n -次元球面

$$S^n = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \mid x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$$

$$S^{-1}$$

$\emptyset$ 空集合

$$0 = 1$$

$$S^0$$

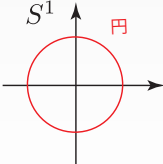
2 点



$$x_0^2 = 1$$

$$S^1$$

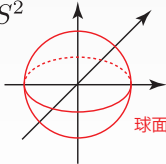
円



$$x_0^2 + x_1^2 = 1$$

$$S^2$$

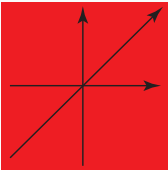
球面



$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 1$$

$$S^3$$

3 次元空間と 1 点



$\cup \{\infty\}$

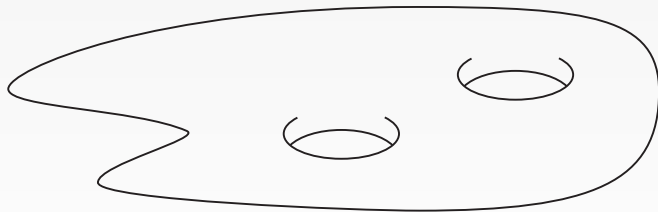
$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$$

$$S^4$$

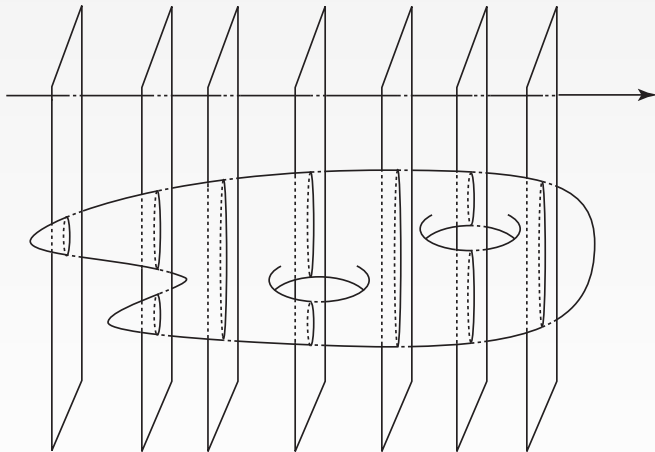
.....

多様体を見る

例えば、こんな多様体をどのように見ればよいか？



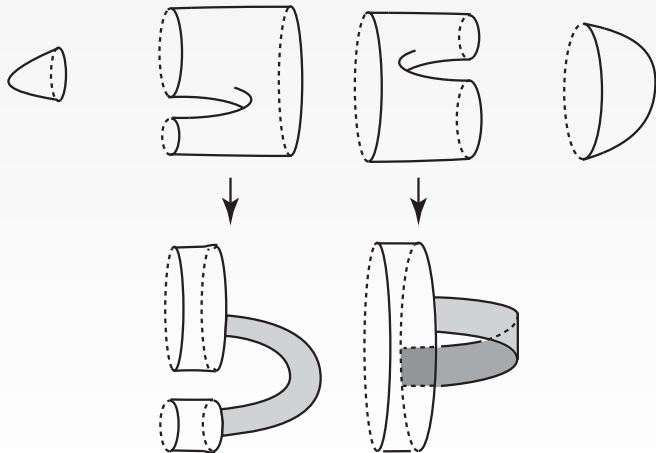
輪切りにしよう

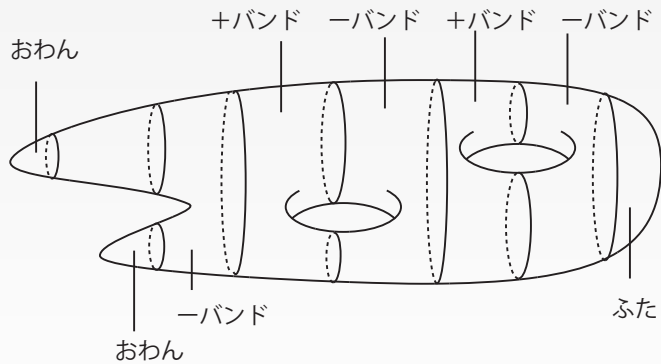


切り口も多様体であり、複雑な多様体もいくつかの単純なピースの組み合わせになっている。

3種類の基本ピース

下の4つのピースを順々に貼り合わせて得られている。
詳しくみると実際は3種類。(＋バンドと－バンド)





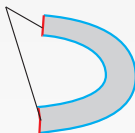
基本ピースの復習

S^{-1}



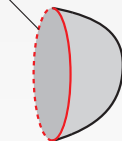
おわん

S^0



バンド

S^1



ふた

接着球面 (貼り付いている部分のコア) :

$\emptyset$	:	S^0	:	S^1
0	:	1	:	2

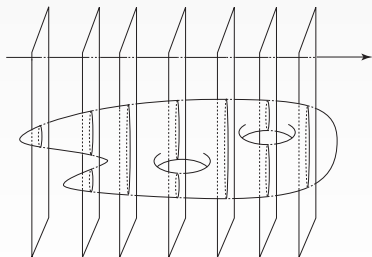
n -ハンドル² という。

² 把手のこと。

多様体をいかに理解するか？

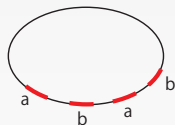
手順

- 基本ピースになるまで輪切りにする。
- 基本ピース (ハンドル) が各ハンドルに分ける。
- ハンドルの接着位置をつきとめる。
- 接着位置の絵を描く。(その絵が多様体を表す。)

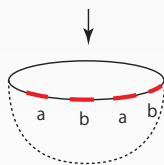


多様体構成のためのレシピ

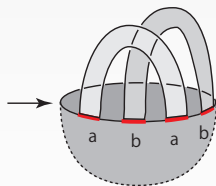
- おわん (0-ハンドル) を用意する。
- おわんの上にハンドルを盛り付ける位置を描く。



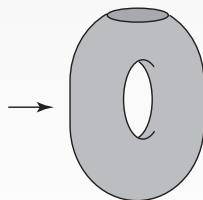
2次元おわんの境界にハンドルを接着するところを
描いた図式



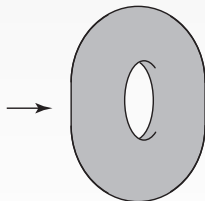
おわんを描くと
こうなっている



ハンドルを
装着してみる



連続変形
形を整えてやる

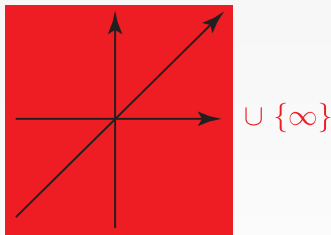


ふたをしてやる
(トーラス)

どんな具材をどのように乗せるかを描いた”図式”そのものはそれが何のどんぶり (多様体) なのかを表している。

4次元どんぶり (多様体) を見よう

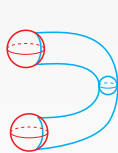
4次元のおわんの境界は S^3 (下の絵と同相。)



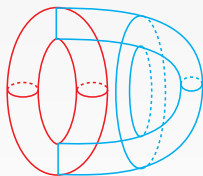
無限遠点 $\{\infty\}$ は以下影響しないので取り除いておく。

4種類の具材がある

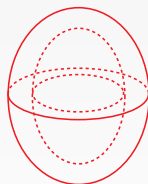
1-ハンドル : 2-ハンドル : 3-ハンドル : 4-ハンドル



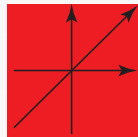
S^0



S^1



S^2



S^3

接着球面のコア

 S^0 

1 ハンドル

 S^1 

2 ハンドル

 S^2 

3 ハンドル

 S^3 

4 ハンドル

まとめ

4次元多様体を描くには、3次元空間に埋め込まれる次の絵を描けばよい。

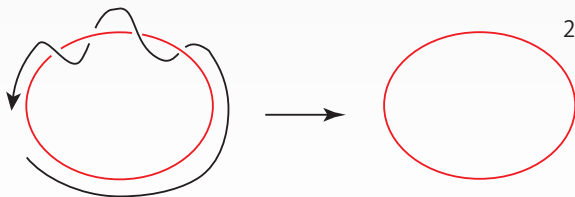
(1 ハンドル) S^0 2つのボール

(2 ハンドル) S^1 結び目

(3 ハンドル) S^2 球面

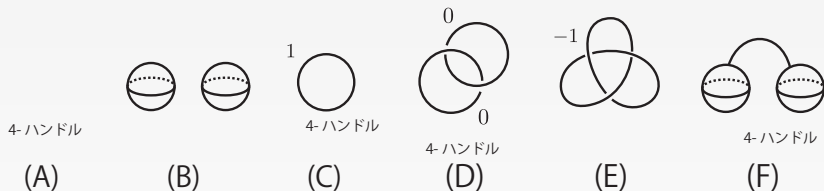
(4 ハンドル) S^3

注：2ハンドル接着面は S^1 の近くでひねりながら置くこともできる(フレイミングという)。ひねった分だけ整数を書いておく。



このように描いた図式をカービー図式という。

カービー図式を描いてみよう



(A) S^4

(B) S^1 を 4 次元に太らせたもの。 $S^1 \times B^3$

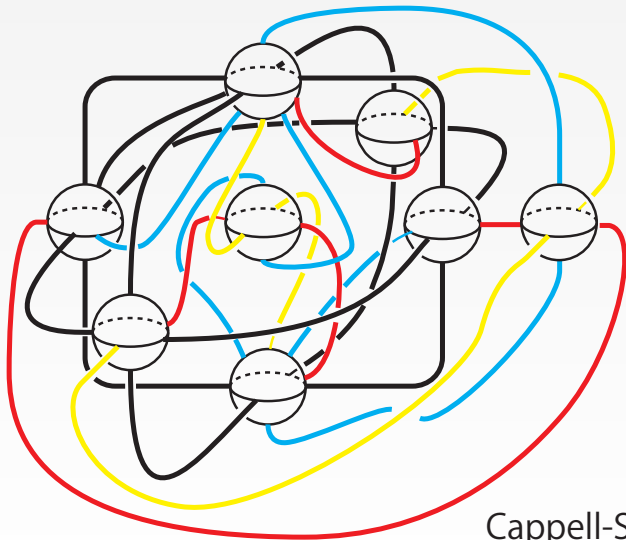
(C) $\mathbb{C}P^2 = \{[z_0 : z_1 : z_2] | z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}\}$ (複素射影空間)

(D) $S^2 \times S^2 = \{(x, y) | x \in S^2, y \in S^2\}$

(E) 境界がポアンカレ球面の 4 次元多様体

(F) S^4

修行を積みばこんな絵を描いて議論することもできる !!

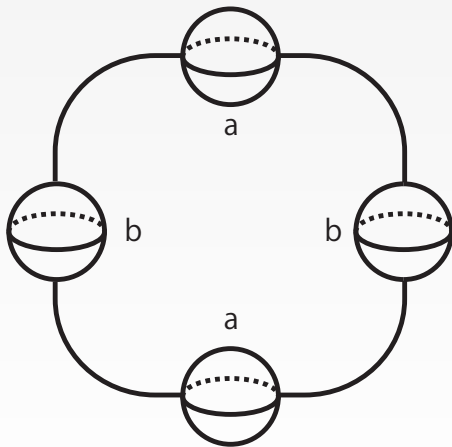


Cappell-Shaneson RP^4

- 4次元多様体そのものは見ることはできないが、輪切りにして接着球面を描くと、ボールや結び目などで描画可能なものが現れる。
- 4次元多様体を描いてみせることで様々なことができるようになる。
 - 描いた絵から性質を引き出して議論可能。例えば、2つの多様体が同じかどうか？
 - 4次元多様体の手術を使って多様体同士の関係性がわかる。
- 4次元トポロジストはカービー図式を用いて4次元多様体の議論をしたりしている。

演習問題

この多様体は何でしょう？



(ヒント：2次元で同じような絵を見たような？)