

# レフシェッツ束と写像類群

丹下 基生

筑波大学数理物質系数学類

平成 28 年 3 月 25 日

## 概要

このノートは、Stipsicz と Ozbagci によって記述された、[15] を元にまとめたものである。随時加筆される。

## 1 $C^\infty$ レフシェッツ束

### 1.1 $C^\infty$ レフシェッツ束の定義

$C^\infty$  レフシェッツ束の定義をしておく。

**定義 1.1** ( $C^\infty$  レフシェッツ束).  $X$  がコンパクトで、向きづけられた  $4$  次元  $C^\infty$  級多様体とする。  $B$  をコンパクト向きづけられた  $2$  次元  $C^\infty$  級多様体とする。ある全射な  $C^\infty$  写像  $f : M \rightarrow B$  はある有限個の点  $b_1, \dots, b_m \in \text{Int}(B)$  以外では微分  $df$  が全射になっており、その  $m$  個の点で、以下を満たす。

- (1)  $\{b_1, \dots, b_m\}$  は  $f$  の臨界値であり、各  $i$  に対して唯一の臨界点  $p_i \in f^{-1}(b_i)$  が存在する。
- (2)  $b_i$  と  $p_i$  の周りの  $M, B$  の局所複素座標が存在して、 $f$  は  $f(z_1, z_2) = z_1^2 + z_2^2$  となる。

ここで、 $p \in B - \{b_1, \dots, b_m\}$  となる点とすると、 $f^{-1}(p)$  は滑らかな曲面であり、それを一般ファイバーとよび、 $f^{-1}(b_i)$  を特異ファイバーと呼ぶ。また、 $f^{-1}(B - \{b_1, \dots, b_m\}) \rightarrow B - \{b_1, \dots, b_m\}$  はファイバーが滑らかな曲面となる、 $B - \{b_1, \dots, b_m\}$  上のファイバー束である。特に、任意の点上の一般ファイバーは微分同相である。レフシェッツ束の一般ファイバーの種数が  $g$  のとき、 $f : X \rightarrow B$  を種数  $g$  レフシェッツ束という。

$C$  を  $B - \{b_1, \dots, b_m\}$  上の曲線とする。  $C$  の一点  $c$  を固定し、 $f^{-1}(c) = \Sigma$  と同一視する。このとき、 $f^{-1}(C)$  は  $\Sigma \times I / (x, 1) \sim (\psi(x), 0)$  なる写像類群の元  $\psi \in \Gamma_\Sigma$  によって表される。この  $\psi$  のことを、 $C$  周りのモノドロミーという。

$\nu$  をその空間の近傍をあらわす  $f^{-1}(\nu(b_i))$  は、 $D^2$  上に唯一の臨海値をもつレフシェッツ束である。その境界  $f^{-1}(\partial\nu(b_i))$  は  $S^1$  上の曲面束となる。  $a_i \in \partial\nu(b_i)$  をとり、 $f^{-1}(a_i)$  を  $\Sigma$  と同一視するとき、その  $\partial\nu(b_i)$  周りのモノドロミーは局所モノドロミーとよばれ、唯一つのレフシェッツ特異点であるので、 $\Sigma$  上のある曲線  $\gamma$  のデーンツイスト  $\tau_\gamma$  によって表される。

$p \in B$  を  $f$  の臨界値ではないとすると、 $f^{-1}(p)$  は滑らかな曲面であり、それを  $\Sigma$  とする。また、 $p$  から、 $a_i$  までの simple な曲線  $s_i$  をとり、それらの曲線や  $\nu(p)$  や  $\nu(b_i)$  などとは互いに交わらないとする。また、この曲線は、 $p$  の周りで、反時計回りに  $p$  から出発しているとする。この曲線上のファイバー  $f^{-1}(s_i)$  の積構造を使って、 $f^{-1}(p) = \Sigma$  と  $f^{-1}(a_i)$  に対して自然な同一視を選ぶことができる。このとき、

$$f^{-1}(\nu(p)) \cup_i f^{-1}(\nu(s_i)) \cup_i f^{-1}(\nu(b_i))$$

はある  $D^2$  上のレフシェッツ束となり、そのモノドロミーは  $\tau_n \tau_{n-1} \cdots \tau_1$  となる。このようなモノドロミーを大域モノドロミーという。

## 1.2 レフシェッツ束の不変量

事実 1.2 (オイラー数).  $X \rightarrow \Sigma$  をファイバーを  $F$  とするファイブレーションとする. このとき、レフシェッツ束のオイラー数  $\chi(X)$  は  $\chi(\Sigma)\chi(F) + n$  となる. ここで、 $n$  はレフシェッツ型特異ファイバーの本数である.

レフシェッツ束のオイラー数は簡単に求められるが、signature( $\sigma = b_2^+ - b_2^-$ ) は求めるのは難しい.

定理 1.3 (松本 ( $g = 1, 2$ )[9][10], 遠藤 ( $g \geq 3$ )[3]).  $X \rightarrow S^2$  を種数が  $g$  の超楕円のレフシェッツファイブレーションとする.  $n, s = \sum_{h=1}^{\lfloor \frac{g}{2} \rfloor} s_h$  を大域モノドロミーの中の非分離的消滅サイクルの数、非分離的消滅サイクルの数とする. このとき、

$$\sigma(X) = -\frac{g+1}{2g+1}n + \sum_{h=1}^{\lfloor \frac{g}{2} \rfloor} \left( \frac{4h(g-h)}{2g+1} - 1 \right) s_h$$

となる. ここで、 $s_h (1 \leq h \leq \lfloor \frac{g}{2} \rfloor)$  は分離的な消滅サイクルの数で、消滅サイクルを一つ除去して得られる曲面の一つの種数が  $h$  のものとする.

超楕円の対合とは限らない、任意の種数のレフシェッツ束の signature を計算するアルゴリズムについて、Ozbagci によって得られている. ただし、底空間は  $D^2$  もしくは、 $S^2$  である.

定義 1.4.  $X$  を境界が  $\Sigma_g \times I / (x, 1) \sim (\phi(x), 0)$  となる 4 次元多様体とする. ここで、 $\phi$  は  $\Sigma_g$  の自己微分同相とする.  $X'$  を  $\Sigma \times \{pt\}$  のある単純閉曲線  $\gamma$  に 2-ハンドルをフレイミング  $-1$  (積構造と比較して) で接着してできる 4 次元多様体とする. このとき、 $\sigma(X') - \sigma(X)$  のことを  $\sigma(\phi, \gamma)$  として書く.

定理 1.5 (Ozbagci[11]).  $X$  を底空間が  $D^2$  もしくは  $S^2$  となる種数  $g$  レフシェッツ束となる 4 次元多様体とする. その fibration を  $f$  とする. ここで、 $p \in D^2$  もしくは  $S^2$  をその reference fiber とする.  $f^{-1}(p) = \Sigma_g$  とする.  $\gamma_i \subset \Sigma_g$  とし、 $(\tau_{\gamma_1}, \dots, \tau_{\gamma_t})$  をこの順番に沿った大域モノドロミーとする. ここで、 $\tau_\gamma$  は  $\gamma$  に沿ったデーンツイストを表す.  $\tau_{\gamma_0}$  は恒等写像とする. このとき、

$$\sigma(X) = \sum_{i=1}^t \sigma(\tau_{\gamma_{i-1}}, \dots, \tau_{\gamma_0}, \gamma_i)$$

となる. ここで全ての  $i (1 \leq i \leq t)$  に対して、 $\sigma(\tau_{\gamma_{i-1}}, \dots, \tau_{\gamma_0}, \gamma_i) \in \{-1, 0, +1\}$  がなりたつ.

命題 1.6.  $\gamma$  が分離的曲線とする. このとき、 $\sigma(\phi, \gamma) = -1$  である.

定理??の系として以下が成り立つ.

系 1.7 ([11]).  $X$  を底空間が  $D^2$  もしくは  $S^2$  となる種数  $g$  レフシェッツ束となる 4 次元多様体とする.  $n$  や  $s$  を大域モノドロミーの中の非分離的消滅サイクルの数、分離的消滅サイクルの数とします. このとき、 $\sigma(X) \leq n - s$  が成り立つ.

Stipsicz によって次が知られている.

定理 1.8 (Stipsicz[12]).  $X \rightarrow \Sigma$  を  $g(\Sigma) > 0$  のレフシェッツ束とする. このとき、 $X \rightarrow \Sigma$  が相対極小であることと、シンプレクティック多様体  $X$  が極小であることは同値である.

定理 1.5 の系として以下が成り立つ.

系 1.9 (Stipsicz[12]).  $X \rightarrow \Sigma$  を相対極小なレフシェッツ束で、 $g(\Sigma) > 0$  とする. このとき、 $c_1^2(X) > 0$  が成り立つ. もし、 $X \rightarrow S^2$  が相対極小であるなら、 $c_1^2(X) \geq 4 - 4g$  が成り立つ.

## 1.3 Wall の signature 和公式

この Ozbagci の定理 (定理 1.5) の証明は基本的に Wall による signature の和公式 [16] によるものである.  $Y_+, Y_-$  を 4 次元多様体とする.  $\partial Y_+ = X_+ \cup X_0$  かつ、 $\partial Y_0 = X_0 \cup X_0$  とし、 $\partial X_+ = \partial X_- = \partial X_0 = Z$  とし、 $Y = Y_+ \cup Y_-$  とするまた、それぞれ、 $\partial[Y_-] =$

$[X_0] - [X_-], \partial[Y_+] = [X_+] - [X_0], \partial[X_-] = \partial[X_0] = \partial[X_+] = [Z]$  として向き付けられているとする。いま、 $V = H_1(Z, \mathbb{R})$  とする。  $A, B, C$  を  $Z \hookrightarrow X_-, X_0, X_+$  が  $H_1$  上に誘導する写像の核とする。  $\dim(A) = \dim(B) = \dim(C) = \frac{\dim(V)}{2}$  となる。  $\Phi$  を  $Z$  上の交差形式とする。  $W = \frac{C \cap (A+B)}{(C \cap A) + (C \cap B)}$  とする。このとき、  $\Psi : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$  を定義する。

$$\Psi' : C \cap (A+B) \times C \cap (A+B) \rightarrow \mathbb{R}$$

を  $\Psi'(c, c') = \Phi(c, a')$  とする。ただし、  $a' + b' + c' = 0$  となる  $a' \in A$  かつ  $b' \in B$  とする。この  $\Psi'$  を  $W$  に誘導した対称な双線形形式を  $\Psi$  とする。  $\Psi$  の signature を  $\sigma(V : C, A, B)$  とする。このとき、以下の公式が成り立つ。

定理 1.10 (Wall[16]).

$$\sigma(Y) = \sigma(Y_+) + \sigma(Y_-) - \sigma(V : C, A, B)$$

## 2 写像類群

### 2.1 写像類群の初歩

$\Sigma_{g,r}^n$  を  $n$  個の基点、  $r$  成分の境界をもつような向き付けられた種数  $g$  の連結曲面とする。

定義 2.1 (写像類群). 写像類群  $\Gamma_{g,r}^n$  は  $\Sigma_{g,r}^n$  上で、基点、境界は点ごとに固定する向きを保つ微分同相写像をイソトピーでの商とする。ここで、群の積は、写像としての合成である。  $n = 0$  のとき、  $\Gamma_{g,r}$  とし、  $n = r = 0$  のとき、それを  $\Gamma_g$  とかく。

$\Gamma_{g,r}^n$  は写像の群の商なので、曲面上に左から作用する。つまり、  $h = g_1 g_2 \cdots g_n \in \Gamma_{g,r}^n$  は  $g_n$  から順に曲面上に作用する。

定義 2.2 (デーンツイスト).  $a$  を  $\Sigma_{g,r}^n$  内の単純閉曲線とする。このとき、右手デーンツイストとは、  $\Sigma_{g,r}^n$  における  $a$  の近傍を取り除いて、  $a$  のカラー近傍を右ねじりに一ひねりして、再び同じ点同士を貼り合わせる操作のことである。このような操作は、ある写像類群の元を定め、それを  $\tau_a$  とかく。右手デーンツイストの逆操作を左手デーンツイストという。

注意 2.3. デーンツイストの定義において、単純閉曲線  $a$  の向きは必要ない。

デーンツイストは  $\Gamma_{g,r}^n$  を生成することは古くから知られている。実は、有限生成であることも知られている。例えば [17] をみよ。

補題 2.4.  $f : \Sigma_{g,r}^n \rightarrow \Sigma_{g,r}^n$  を向きを保つ微分同相写像とする。このとき、  $a$  を単純閉曲線とすると、  $f \tau_a f^{-1} = \tau_{f(a)}$  が成り立つ。

$a \subset \Sigma_{g,r}^n$  を単純閉曲線とする。  $\Sigma_{g,r}^n - a$  が非連結な曲面をなすとき、  $a$  を分離的単純閉曲線という。そうでないとき、非分離的単純閉曲線という。

補題 2.5.  $a_1, a_2$  を  $\Sigma_{g,r}^n$  内の非分離的単純閉曲線とする。このとき、向きを保つ同相写像  $f : \Sigma_{g,r}^n \rightarrow \Sigma_{g,r}^n$  が存在して、  $a_1$  を  $a_2$  に写すことができる。結果的に、  $\tau_{a_1}$  と  $\tau_{a_2}$  は共役である。とくに、  $a, b$  がホモロジー本質である単純閉曲線であれば、  $\tau_a, \tau_b$  は共役である。

演習 2.6.  $a_1, a_2$  が一点で交わるとする。このとき、  $\tau_{a_1} \tau_{a_2}(a_1) = a_2$  となる。

補題 2.7.  $a_1, a_2$  を非交和 (disjoint) となる曲面上の単純閉曲線とする。このとき、  $\tau_{a_1} \tau_{a_2} = \tau_{a_2} \tau_{a_1}$  となる。  $a_1$  と  $a_2$  が唯一つの点で交われば、  $\tau_{a_1} \tau_{a_2} \tau_{a_1} = \tau_{a_2} \tau_{a_1} \tau_{a_2}$  が成り立つ。

補題 2.8 (可換関係式、ブレイド関係式、chain 関係式).  $a_1, \dots, a_k$  を曲面上の曲線のチェインとする。つまり、  $a_i$  と  $a_{i+1}$  は一点で交わり、  $|i - j| > 1$  となるとき、  $a_i, a_j$  は交わりがないとする。  $N$  を  $a_1, a_2, \dots, a_k$  の正則近傍とする。このとき、以下の関係式が成り立つ。

- (1)  $|i - j| > 1$  が成り立つとき、  $\tau_{a_i} \tau_{a_j} = \tau_{a_j} \tau_{a_i}$  が成り立つ (可換関係式)
- (2)  $|i - j| = 1$  が成り立つとき、  $\tau_{a_i} \tau_{a_j} \tau_{a_i} = \tau_{a_j} \tau_{a_i} \tau_{a_j}$  が成り立つ (ブレイド関係式)

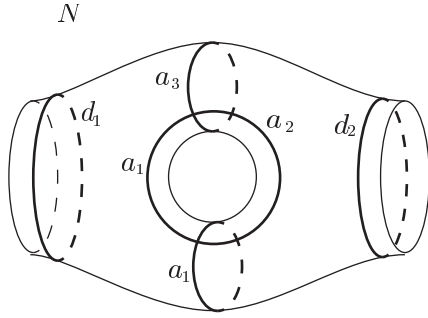


図 1:  $k$  が奇数の場合:  $(\tau_{a_1}\tau_{a_2}\tau_{a_3})^4 = \tau_{d_1}\tau_{d_2}$

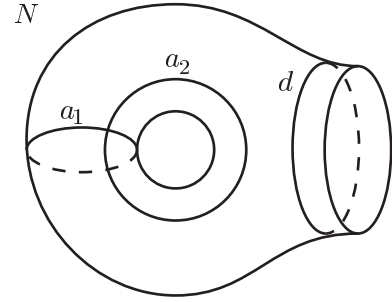


図 2:  $k$  が偶数の場合:  $(\tau_{a_1}\tau_{a_2})^6 = \tau_d$

- (3)  $k$  が奇数のとき、 $N$  の境界成分は 2 つであり、それを、 $d_1, d_2$  とすると、 $(\tau_{a_1}\tau_{a_2}\cdots\tau_{a_k})^{k+1} = \tau_{d_1}\tau_{d_2}$  が成り立つ (chain 関係式) (図 1)  
 $k$  が偶数のとき、 $N$  の境界成分は 1 つであり、それを、 $d$  とすると、 $(\tau_{a_1}\tau_{a_2}\cdots\tau_{a_k})^{2k+2} = \tau_d$  が成り立つ. (図 2)

次の関係式は Dehn によって初めて示唆され、Johnson ([5]) によって、再発見されたランタン関係式である.

補題 2.9 (ランタン関係式).  $U$  を 3 つ穴あき円盤とする. 円盤の境界近くの曲線を  $a$  とし、内部の 3 つの穴に対応する曲線を  $a_1, a_2, a_3$  とする. また、 $b_1, b_2, b_3$  を図 3 のような曲線とする. このとき、以下の関係式が成り立つ.

$$\tau_a\tau_{a_1}\tau_{a_2}\tau_{a_3} = \tau_{b_1}\tau_{b_2}\tau_{b_3}$$

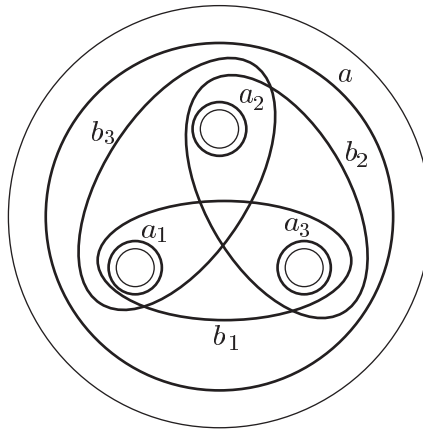


図 3: ランタン関係式

補題 2.10.  $i$  を図 4 のような hyperelliptic involution (超楕円的対合写像) とする.  $a$  を  $xy$ -平面上の曲線とする. このとき、 $[i, \tau_a] = 1$  が成り立つ.

これまでの関係式を使って、 $\Gamma_g$  や  $\Gamma_{g,1}$  の群表示を得ることができる.  $a_0, \dots, a_{2g+1}$  を図 5 のような単純閉曲線とする. このとき、

$$\tau_{a_0}, \tau_{a_1}, \tau_{a_2}, \dots, \tau_{a_{2g}}$$

は  $\Gamma_g, \Gamma_{g,1}$  を生成する. 次に関係式を記す.  $a_i \cap a_j = \emptyset$  とするとき、 $A_{i,j} = [\tau_{a_i}, \tau_{a_j}]$  とする.  $B_i$  ( $i = 1, \dots, 2g-1$ ) をブレイド関係式  $\tau_{a_i}\tau_{a_{i+1}}\tau_{a_i}\tau_{a_{i+1}}^{-1}\tau_{a_i}^{-1}\tau_{a_{i+1}}^{-1}$  とする.  $B_0 = \tau_{a_0}\tau_{a_4}\tau_{a_0}\tau_{a_4}^{-1}\tau_{a_0}^{-1}\tau_{a_4}^{-1}$  とする.  $C, D$  を図 6 と 7 のような曲線に関する chain 関係式、ランタン関係式とする.  $E = [i, \tau_{2g+1}]$  とする. このとき、 $R_1 = \langle A_{i,j}, B_i, C, D \rangle_{\text{No}}$ ,  $R = \langle A_{i,j}, B_i, C, D, E \rangle_{\text{No}}$  をこれらの元で正規生成された部分群とする. このとき、Wajnryb の表示は以下ようになる.

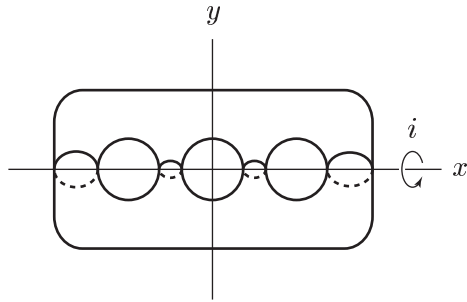


図 4: 超楕円の対合  $i$  .

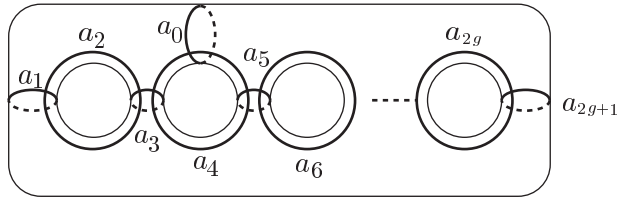


図 5: 生成元

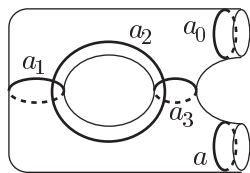


図 6:  $a_0, a_1, a_2, a_3, a$  に関する chain 関係式 .

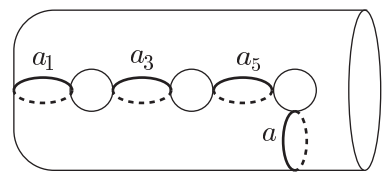


図 7:  $a_1, a_3, a_5, a$  に関するランタン関係式

定理 2.11 (B.Wajnryb,[17]).  $g \geq 3$  のとき、以下の完全系列が存在する .

$$1 \rightarrow R \rightarrow F_{2g+1} \rightarrow \Gamma_g \rightarrow 1$$

$$1 \rightarrow R_1 \rightarrow F_{2g+1} \rightarrow \Gamma_{g,1} \rightarrow 1$$

つまり、群表示として、

$$\Gamma_g = \langle a_k (0 \leq k \leq 2g) | A_{i,j}, B_i, C, D \rangle,$$

$$\Gamma_{g,1} = \langle a_k (0 \leq k \leq 2g) | A_{i,j}, B_i, C, D, E \rangle$$

が得られる . ここで、 $F_n$  は  $n$  個の元によって生成される自由群とする .

注意 2.12 ( $g = 2$  の場合).  $\Gamma_2$  に対しては、生成元は、 $\tau_{a_1}, \tau_{a_2}, \tau_{a_3}, \tau_{a_4}, \tau_{a_5}$  であり、関係式は以下のように修正する .

- (1)  $\tau_{a_i} \tau_{a_j} = \tau_{a_j} \tau_{a_i}$  ( $|i - j| > 1$ ) (可換関係式)
- (2)  $\tau_{a_i} \tau_{a_j} \tau_{a_i} = \tau_{a_j} \tau_{a_i} \tau_{a_j}$  ( $|i - j| = 1$ ) (ブレイド関係式)
- (3)  $i = \tau_{a_1} \tau_{a_2} \tau_{a_3} \tau_{a_4} \tau_{a_5}^2 \tau_{a_4} \tau_{a_3} \tau_{a_2} \tau_{a_1}$  が中心であり、 $i^2 = 1$  である .
- (4)  $(\tau_{a_1} \tau_{a_2} \tau_{a_3} \tau_{a_4} \tau_{a_5})^2 = 1$

$\Sigma_{g,r}^n$  の境界の一つの成分を一点につぶすことで曲面  $\Sigma_{g,r-1}^{n+1}$  を得ることができる . つぶすことで、境界点上の点の一つの基点になる . そのとき、境界の成分  $\delta$  のデーンツイストが自明になるので、次の完全系列が存在する .

$$1 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \Gamma_{g,r}^n \rightarrow \Gamma_{g,r-1}^{n+1} \rightarrow 1$$

また、基点を忘れることで、

$$1 \rightarrow \pi_1(\Sigma_{g,r}^{n-1}) \rightarrow \Gamma_{g,r}^n \rightarrow \Gamma_{g,r-1}^{n-1} \rightarrow 1$$

なる完全系列も存在する . ここで、 $\pi_1$  は基本群を表す .

これらの完全系列を使って、 $\Gamma_{g,r}^n$  の表示を Wajnryb のものを使って作り出すことができる . 結果として、 $\Gamma_{g,r}^n$  は非分離的単純閉曲線のデーンツイストと、境界平行な曲線に沿ったデーンツイストによって生成されている .

命題 2.13 (Powell,[14]).  $g \geq 3$  のとき、 $[\Gamma_g, \Gamma_g] = \Gamma_g$  が成り立つ . つまり、 $\Gamma_g$  は完全群である .

証明.  $g \geq 3$  であるので、4 つ穴あき球面 (その 1 つを  $a$  とする) を、 $\Sigma_g$  の中に、ランタン関係式の 7 つ全ての曲線が非分離的単純閉曲線になるように埋め込むことができる . 例えば、図 8 のように . このとき、ランタン関係式によって

$$\tau_a = \tau_{b_1} \tau_{a_1}^{-1} \tau_{b_2} \tau_{a_2}^{-1} \tau_{b_3} \tau_{a_3}^{-1}$$

が得られる . ここで、補題 2.5 を使うと、写像  $h_i : \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$  が存在して、 $\tau_{b_i} = h_i \tau_{a_i} h_i^{-1}$  となる . ゆえに、

$$\tau_a = h_1 \tau_1 h_1^{-1} \tau_{a_1}^{-1} h_2 \tau_{a_2} h_2^{-1} \tau_{a_2}^{-1} h_3 \tau_{a_3} h_3^{-1} \tau_{a_3}^{-1} = [h_1, \tau_{a_1}] [h_2, \tau_{a_2}] [h_3, \tau_{a_3}]$$

ゆえに、任意の非分離的単純閉曲線に沿ったデーンツイストは共役であり、交換子の共役はまた交換子であることから、任意の非分離的単純閉曲線に沿ったデーンツイストは、高々 3 つの交換子の積である . また、分離的単純閉曲線に沿ったデーンツイストは非分離的単純閉曲線の積でかけるから、この場合もいくつかの交換子の積となる . 任意の曲線のデーンツイストを  $[\cdot, \cdot]$  の積によって書くことができる .  $\square$

注意 2.14. 同じように、 $g \geq 3$  のとき、 $\Gamma_{g,r}^n$  は完全である ([8]) .  $g = 1, 2$  の場合にはランタン関係式を境界を非分離的単純閉曲線として埋め込むことは不可能であるので、可換化に関して別に議論を行う必要がある . 以下の結果が知られている .

1.  $\Gamma_{1,0}^n / [\Gamma_{1,0}^n, \Gamma_{1,0}^n] = \mathbb{Z}_{12}$
2.  $\Gamma_{1,r}^n / [\Gamma_{1,r}^n, \Gamma_{1,r}^n] = \mathbb{Z}_r$  ( $r \geq 1$ )

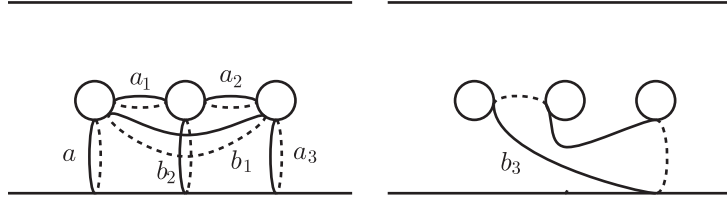


図 8:  $a$  が非分離的単純閉曲線の際のランタン関係式の埋め込み .

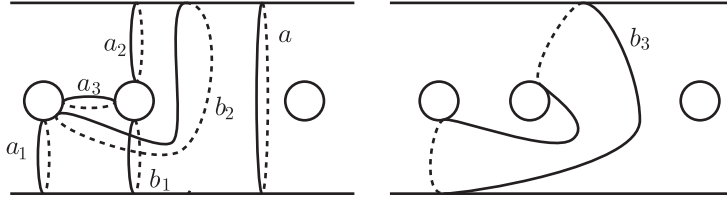


図 9:  $a$  が分離的単純閉曲線の際のランタン関係式の埋め込み

$$3. \Gamma_{2,r}^n / [\Gamma_{2,r}^n, \Gamma_{2,r}^n] = \mathbb{Z}_{10}$$

補題 2.15.  $\Gamma_g$  の任意の元はある非分離的単純閉曲線に沿った右手デーンツイストの積によって表示することができる .

証明.  $a_i$  を図 5 中の曲線とする . 関係式  $(\tau_{a_1} \cdots \tau_{a_{2g}})^{4g+2} = 1$  を使うことによって, 任意の生成元  $\tau_{a_i}$  の左手デーンツイストは右手デーンツイストの積によって表示することができる .  $\square$

演習 2.16. 次を示せ .

- (1)  $\Gamma_{g,1}$  の任意の元は, 右手デーンツイストと, 境界平行な曲線による左手デーンツイストの積によって得られることを示せ .
- (2)  $\Gamma_{g,1}$  の任意の分離的単純閉曲線のデーンツイストは, 非分離的単純閉曲線の右手デーンツイストの積によって表示されることを示せ .

## 2.2 写像類群と幾何構造

写像類群の関係式に幾何的な対象を当てはめる . ここで,  $D^2$  は 2 次元円盤を表す .

- $\Gamma_g$  の  $k$  個の交換子の積  $\prod_{i=1}^k [a_i, b_i]$  は,  $\Sigma_{k,1}$  上のある  $\Sigma_g$ -束を与えている . ここで,  $a_i, b_i$  は対応する  $\pi_1(\Sigma_{k,1})$  の生成系  $\langle \alpha_1, \beta_i \rangle$  のモノドロミーに対応する . もし,  $\Gamma_g$  の中で,  $\prod_{i=1}^k [a_i, b_i] = 1$  となる関係式があれば,  $\Sigma_k$  上の  $\Sigma_g$ -束  $X \rightarrow \Sigma_k$  を与えている .  $g \geq 2$  の場合, このような束は, そのような語列によって一意に定まる .  $\Gamma_g^1$  において,  $\prod_{i=1}^k [a_i, b_i] = 1$  なる関係式が成り立つとき, 束  $X \rightarrow \Sigma_k$  には切断 (section) が存在する .  $\prod_{i=1}^k [a_i, b_i] = (\tau_\delta)^n$  が  $\Gamma_{g,1}$  (境界平行な閉曲線は  $\delta$ ) において成り立つとき, 自己交差が  $-n$  の切断をもつ .
- 右手デーンツイストの積  $\prod_{i=1}^k \tau_i \in \Gamma_g$  は,  $D^2$  上の種数  $g$  (ファイバーが  $\Sigma_g$ ) のレフシェッツ束  $X \rightarrow D^2$  を表す . 関係式  $\prod_{i=1}^k \tau_i \in \Gamma_g = 1$  は,  $S^2$  上のレフシェッツ束を表す .  $\prod_{i=1}^k \tau_i$

の語列から一意的に多様体が決定される．関係式  $\prod_{i=1}^k \tau_i$  の  $\Gamma_g^1$  へのリフトは、ある切

断の存在を示している． $\Gamma_{g,1}$  において  $\prod_{i=1}^k \tau_i = (\tau_\delta)^n$  ( $\delta$  は境界平行な曲線) は自己交差数が  $-n$  の切断の存在を表している．

- これらを組み合わせることで、 $w = \prod_{i=1}^{k'} \tau_i \prod_{j=1}^k [a_j, b_j]$  は  $\Sigma_{g,1}$  上のレフシェッツ束を表す． $\Gamma_g$  において  $w = 1$  であることは、 $X \rightarrow \Sigma_k$  上のレフシェッツ束を与えている．
- $\Gamma_{g,k}(\delta_i (1 \leq i \leq k))$  を  $k$  個の境界平行な単純閉曲線) において、 $\prod_{i=1}^n \tau_i = \tau_{\delta_1} \cdots \tau_{\delta_k}$  なる関係式は以下のようにレフシェッツペンシルを与えている．ただし、 $\tau_i$  はある右手デーンツイストとする．この関係式から  $k$  個の切断をもつようなレフシェッツ束が決定し、そのそれぞれの切断の自己交差数は  $-1$  となる．その切断をプロードダウンをすることでレフシェッツペンシルを得る．逆に、そのレフシェッツペンシルの base locus をプロードアップすることで、上のような関係式をもつようなレフシェッツ束を与える．そのとき、プロードアップの例外曲線が対応するレフシェッツ束の切断となる．
- デーンツイスト  $\tau_i$  に負の指数があるとすると、アキラルなレフシェッツ束を表す．
- $r > 0$  とする． $h \in \Gamma_{g,r}$  に対して、その写像柱を考え、境界をそのコアサークルにつぶすことである開本分解をもつ 3 次元多様体を表す． $h$  に対して接触 3 次元多様体を決め、逆に、全ての接触閉 3 次元多様体はこのようにして定まる． $h$  は一意には決まらない、開本分解の positive stabilizing によって、 $g, r$  は変えるが、接触構造は変えないようにすることができる．
- $\prod_{i=1}^n \tau_i \in \Gamma_{g,r}$  は、 $D^2$  上の閉ではないファイバーをもつようなレフシェッツ束を作ることができる．これらの多様体は Stein 構造をもつ． $h = \prod_{i=1}^n \tau_i$  のような右手デーンツイストへの分解は  $h$  によって定まる接触 3 次元多様体の Stein filling (Stein 充填) を与えている．全ての Stein 充填はこのようにして与えられる．その際、何回か stabilization を行う必要があるかもしれない．

Stein filling について以下の定理が知られている．

定理 2.17. 与えられた閉接触多様体  $(Y, \xi)$  に対して、ある定数  $K_{(Y, \xi)}$  が存在して、任意の  $(Y, \xi)$  の Stein 充填  $W$  に対して

$$K_{(Y, \xi)} \leq 3\sigma(W) + 2\chi(W)$$

が成り立つ．つまり、 $c(W) = 3\sigma(W) + 2\chi(W)$  は定数によって下に有界である．

この不等式から、 $K_{(Y, \xi)} \leq 3\sigma(W) + 2\chi(W)$  はある定数  $C_{(Y, \xi)}$  によって

$$b_2^-(W) + C_{(Y, \xi)} \leq 5b_2^+(W)$$

と書き直され、 $b_2^+$  が有限であれば、すべての特性数について有限性がいえる．特に、オイラー数についての有界性がいえる．多くの 3 次元多様体に対する Stein 充填において、 $b_2^+$  が消えていることがある．例えば、レンズ空間などの正スカラー曲率をもつ例、reduced フレーホモロジーが消えているような例についてである．Stein 充填について以下の予想が知られている．

予想 2.18. 接触 3 次元多様体  $(Y, \xi)$  において、次の整数の集合

$$\mathcal{C}_{Y, \xi} = \{\chi(W) | W \text{ is a Stein filling of } (Y, \xi)\}$$

は有限集合となる．



## 2.3 いくつかの結果

レフシェッツ束と接触構造、写像類群の関係についてかく．ここでは、 $g \geq 3$  としておく．このとき、全ての  $\Gamma_g$  の元は交換子の積で書くことができ、交換子で書くための最小の長さを交換子長という．

定理 2.19 (Ozbagci-Korkmaz[7]).  $\Gamma_g$  のデーツイストの交換子長は 2 に等しい．

証明. 4 つ穴あき球面  $X$  を曲面に埋め込む．その境界成分を  $a, a_1, a_2, a_3$  とする．また、 $X$  は少なくとも種数が 3 なので、ランタン関係式の  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$  を全て非分離にとることができる． $a$  は非分離か、分離かのどちらかを選ぶ (図 8,9 をみよ)．このとき、 $a_1 \cup b_1, a_2 \cup b_2$  はそれぞれ、その補空間を取ると、連結であるので、ある  $\Sigma_g$  の微分同相写像であって、 $f(a_1) = b_2$  かつ  $f(b_1) = a_2$  となるように取ることができる．なぜなら、 $a_1, b_1$  で切り開いた曲面と  $a_2, b_2$  で切り開いた曲面は微分同相であるからである．また別に  $h(a_3) = b_3$  となる微分同相写像  $h$  をとる．このとき、

$$\begin{aligned}\tau_a &= \tau_{b_1} \tau_{a_1}^{-1} \tau_{b_2} \tau_{a_2}^{-1} \tau_{b_3} \tau_{a_3}^{-1} = \tau_{b_1} \tau_{a_1}^{-1} \tau_{f(a_1)} \tau_{f(b_1)}^{-1} h \tau_{a_3} h^{-1} \tau_{a_3}^{-1} \\ &= \tau_{b_1} \tau_{a_1}^{-1} f \tau_{a_1} f^{-1} \tau_{b_1}^{-1} f^{-1} h \tau_{a_3} h^{-1} \tau_{a_3}^{-1} = [\tau_{b_1} \tau_{a_1}^{-1}, f][h, \tau_{a_3}]\end{aligned}$$

次に、デーツイストの交換子長が 1 ではないことを証明する．デーツイストの交換子長が 1 であると仮定する．このとき、 $T^2$  上の (relatively minimal) 種数  $g$  レフシェッツ束  $X$  が存在して特異ファイバーが一つだけである．このとき、オイラー数が  $\chi(X) = 1$  であることはすぐわかる．relatively minimal であるので、この 4 次元多様体は minimal なシンプレクティック多様体であるので不等式

$$0 \leq c_1^2(X) = 3\sigma(X) + 2\chi(X)$$

が成り立つ．よって、 $\sigma(X) \geq -\frac{2}{3}$  が成り立つ．特に、 $\sigma(X) \geq 0$  である．

ここで、holomorphic オイラー数は  $\chi_h(X) := \frac{1}{4}(\sigma(X) + \chi(X))$  と定義され、 $X$  が概複素構造を持てば、整数となる．したがって、 $\sigma(X) = 4\chi_h(X) - 1$  となり、

$$c_1^2(X) = 3\sigma(X) + 2\chi(X) = 12\chi_h(X) - 1$$

が成り立つ．一方 [12] によって、 $c_1^2(X) \leq 10\chi_h(X)$  が成り立つ． $\chi_h(X)$  は整数であるので、 $\chi_h(X) \leq 0$  でなければならない．これは、 $\sigma(X) + 1 = 4\chi_h(X) \leq 0$  を意味する．このことは、 $\sigma(X) \geq 0$  であることに反する．□

$G$  を群とする． $G$  どの元もある一定の  $K$  個までの交換子の積によって表されるとき、 $G$  は一様完全であるという．また、そのような定数  $K$  が存在しないとき、 $G$  は一様完全ではないという．この事実を、写像類群とレフシェッツ束の関係を使って示すことができる．[1] は、また別の証明である．

定理 2.20 (Endo-Kotschick[2], Korkmaz [8]).  $c \subset \Sigma_g$  を分離的単純閉曲線とする．もし、 $\tau_c^n = \prod_{i=1}^{k_n} [\alpha_i(n), \beta_i(n)]$  となるなら、数列  $\{k_n\}$  は有界ではない．つまり、写像類群  $\Gamma_g$  は一様完全ではない．

証明.  $K$  を  $k_n \leq K$  となる整数とする．このとき、自明なモノドロミーを付け加えることで、共通の底空間上に、

$$f_n : X \rightarrow \Sigma_K$$

なるレフシェッツ束の列を作ることができる．ここで、

$$\chi(X_n) = \chi(\Sigma_g)\chi(\Sigma_K) + n = 4(K-1)(g-1) + n$$

ここで、ノビコフの和公式と signature の計算から、

$$\sigma(X_n) = -n + \sigma(X - \cup_{i=1}^n \nu(f^{-1}(q_i)))$$

となる．ここで、2項目は、 $K, g$  にしかよらない定数  $C$  によって  $\sigma(X - \cup_{i=1}^n \nu(f^{-1}(q_i))) \leq C$  のような評価式が存在する．よって、 $c_1^2(X_n) = 3\sigma(X_n) + 2\chi(X_n) \leq -n + C'$  ここで、 $C' = 3C + 8(K-1)(g-1)$  であり、 $n$  が十分大きくなると、 $c_1^2(X_n)$  は負の数になる．

しかし、このことは、底空間の種数が正の相対極小なレフシェッツ束は極小であることが知られている．そのような  $c_1^2$  は非負である [12]．これは矛盾である．  $\square$

群の完全系列を使えば、 $\Gamma_{g,r}^n$  においても同様完全ではないことがわかる．また、右手デーンツイストの積としての最小数も同じように考えられうる．

**定理 2.21** (Akbulut-Ozbagci, Stipsicz). もし、 $r \geq 1$  のとき、 $1 \in \Gamma_{g,r}$  は非自明な右手デーンツイストの積として  $1 = \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_n$  のように表す事ができない．

**証明.** もし、 $1 \in \Gamma_{g,r}$  が右手デーンツイストの積として  $1 = t_1 \cdots t_n$  と分解できたとする．ここで、一つを残して全て  $\Sigma_{g,r}$  の穴を埋めることで、問題は、 $\Gamma_{g,1}$  上で、 $1$  が非自明な積の形に書けるかという問題に帰着した． $\Gamma_{g,1}$  において、分離的曲線の右手デーンツイストは、非分離的曲線の右手デーンツイストの積によって表されるので、全て、非分離的デーンツイストの積としてよい．いま  $t_1^{-1}$  は非分離的デーンツイストの左手デーンツイストであるが、これは、条件から非分離的右手デーンツイストの積によって表されているよって、任意の分離的左手デーンツイストはこのように、右手デーンツイストの積によって表されることになる．つまり、全ての  $\Gamma_{g,1}$  の元は非分離的右手デーンツイストの積によって表される．しかし、これは接触構造を使えば矛盾である．つまり、いくつか左手 Hopf バンドをプランピングすることで、種数  $g$  で、境界を持つような曲面を作ることができ、これは、左手デーンツイストの積によって得られる  $\phi \in \Gamma_{g,1}$  による接触構造を境界に作る事ができる．この接触構造は、作り方から、overtwisted である．しかし、一方この左手デーンツイストは、右手デーンツイストによって表され、Giroux[4] の結果から Stein 多様体になる．つまりこの写像類  $\phi$  が誘導する接触構造は Stein fillable である．特にこの接触構造は tight である．overtwisted な接触構造は tight ではありえないので矛盾となる．  $\square$

次の予想が立てられる．

**予想 2.22.**  $r > 0$  とする．任意の  $h \in \Gamma_{g,r}$  に対して、ある定数  $C_h$  が存在して、 $h$  の任意の分解に対して、 $h = \tau_1 \cdots \tau_n$  かつ  $n \leq C_h$  が成り立つ．ここで、 $\tau_i$  は  $\Gamma_{g,r}$  の右手デーンツイストであり、 $n \leq C_h$  である．

この問題の肯定的な結果については、ある固定された開本分解の Stein 充填のオイラー数に対しては bound を与えている．これは、予想 2.18 の弱い形の記述といえる．

## 参考文献

- [1] M. Bestvina, K. Fujiwara, *Bounded cohomology of subgroups of mapping class groups*, Geom. Topol. **6**(2002), 68-89
- [2] H. Endo, D. Kotshick, *Bounded cohomology and non-uniform perfection of mapping class groups*. Invevt. Math. **144**(2001),169-175
- [3] H. Endo, *Meyer 's signature cocyle and hyperelliptic fibrations*, Math. Ann., 316 (2000), 237-257
- [4] E. Giroux, *Contact geometry: from dimension three to higher dimensions*, Proceedings of ICM Beijing(2002) 405-414
- [5] D. Johnson, *Homeomorphisms of a surface which act trivially on homology*, Proc. Amer. Math. Soc. **75**(1979), 413-438
- [6] M. Korkmaz, *Low-dimensional homology groups of mapping class gorups: a survey*, Turkish J. Math. **26**(2002)101-114
- [7] M. Korkmaz, B. Ozbagci, *Minimal number of singular fibers in a Lefschetz fibration*, Proc. Amer. Soc. **129**(2001)1545-1549
- [8] M. Korkmaz, *Stable commutators length of a Dehn twist*, Michigan Math. **J52**(2004)23-31
- [9] Y. Matsumoto, *On 4-manifolds fibered by tori II*, Proc. Japan Acad., vol. 59 Ser. A (1983) 100-103.

- [10] Y. Matsumoto, *Lefschetz fibrations of genus two - a topological approach*, Proceedings of the 37th Taniguchi Symposium on Topology and Teichmüller Spaces, ed. Sadayoshi Kojima et al., World Scientific (1996), 123-148.
- [11] B. Ozbagci, *Signatures of Lefschetz fibrations*, Pacific J. Math. 202 (2002), no. 1, 99-118.
- [12] A. Stipsicz, *Chern numbers of certain Lefschetz fibrations*, Proc. Amer. Math. Soc. **128**(2000)1845-1851
- [13] A. Stipsicz, and Ozbagci, *Surgery on contact 3-manifolds and Stein surfaces*, Springer
- [14] J. Powell, *Two theorems on the mapping class group of a surface*, Proc. Amer. Math. Soc. **68**(1978)347-350
- [15] A. Stipsicz, and Ozbagci, *Surgery on contact 3-manifolds and Stein surfaces*, Springer
- [16] C.T.C. Wall, *Non-additivity of the signature*, Inventiones Math., 7 (1969), 269-274,
- [17] B.Wajnryb, *An elementary approach to the mapping class group of a surface*, Geom. Topol. **3**(1999),405-466