4 次元トーラス上の正則レフシェッツペンシルの一意性

早野　健太（北海道大学）

1. 主定理

T を 4 次元トーラスとする (つまり $T = (S^1)^4$). 本稿では以下の定理の証明を与える (種々の用語の定義は次節参照).

定理 1.1 (Hamada-H.). f_0, f_1 を T 上の正則なレフシェッツペンシルとし，f_0 の種数が 6 以上，あるいは f_0 の divisibility は 2 以上であると仮定する．このとき f_0 と f_1 の種数と divisibility が一致すれば，f_0 と f_1 は同型となる．

注意 1.2. 定理 1.1 で仮定が必要な理由は，定理 3.23 が補題 3.22 の条件 $(*)$ が満たされるという仮定のもとでしか成立しない，というところにある．補題 3.24 と補題 3.25 において，定理 1.1 の仮定のもとであれば条件 $(*)$ が満たされるということは示している．筆者は定理 1.1 の仮定がなくても条件 $(*)$ が満たされると予想しているが，本稿を執筆している時点 (2016 年 1 月末) ではそれを証明できていない [1].

本稿は主に「微分トポロジー１６」の予稿として活用していただくために執筆されているが，それに加えて筆者自身が証明や周辺の知識を再確認する，という目的もある．そのため一部の読者には説明や証明が冗長であると感じられるかもしれないが，それは筆者の知識不足ゆえのことであると理解し，どうかご容赦いただきたい．

2. 用語の意味の確認

以下，本稿では特に断らない限り，多様体は全て可微分，有向，連結，コンパクトであると仮定する．

2.1. レフシェッツペンシル

定義 2.1. X を 4 次元多様体，$B \subset X$ を空でない有限集合 (**base locus** とよぶ) とする．$f : X \setminus B \to \mathbb{CP}^1$ が**レフシェッツペンシル** (本稿では **LP** と略記する．また B が文脈から明らかである，あるいは明示する必要のないとき，有理型写像と同様，$f : X \dashrightarrow \mathbb{CP}^1$ と表すことにする) であるとは，以下を満たすときをいう：

1. f の臨界点集合への制限が単射，
2. f の臨界点は全て Lefschetz 型，つまり任意の $x \in \mathrm{Crit}(f)$ に対し，x，$f(x)$ のまわりの向きに適合する複素座標 $(U, \varphi), (V, \psi)$ が存在し，$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(z, w) = zw$ となる，
3. 任意の $x \in B$ に対し，x のまわりの向きに適合する複素座標 (U, φ) と，向きを保つ微分同相 $\phi : \mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^1$ が存在し，$\phi \circ f \circ \varphi^{-1}(z, w) = [z : w]$ となる．

$x \in \mathbb{CP}^1$ を f の正則値とすると，$F = \overline{f^{-1}(x)}$ は X の部分多様体となる．F の種数を ***f* の種数**という．またこの F を用いて定義される以下の値を ***f* の divisibility** という：

$$\max\left\{ n \in \mathbb{Z} \;\middle|\; {}^{\exists}\alpha \in H_2(X;\mathbb{Z}) \text{ s.t. } [F] = n\alpha \right\} \in \mathbb{Z}_{>0}.$$

[1] 3.4 節で定義する φ_Z が T_Z 全体で定義されている場合，すなわち $g \geq 4$ の場合なら (φ_Z を直接調べることで) 何とかなるかもしれない (実際 $(d, g) = (2, 5)$ の場合は何とかできた．補題 3.25 参照)．また $g = 3$ のときについては，[5, Exercise 10.1] が関係している気がしている．

ここで $B \neq \emptyset$ であることから F は自己交差を持つ，特に $[F]$ は torsion ではない (だから max をとることができる) ということに注意する．X が複素多様体で，Lefschetz 特異点の標準形を与える複素座標，および 3 つめの条件に現れる複素座標と微分同相 ϕ として両正則なものがとれるとき，その LP は**正則**であるという．

定義 2.2. $f_i : X_i \dashrightarrow \mathbb{CP}^1$ を種数 g の LP とする $(i = 1, 2)$．微分同相 $\Phi : X_1 \to X_2$ と $\phi : \mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^1$ で，以下の図式を可換にするものが存在するとき，f_1 と f_2 は**同型**であるという：

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{\Phi} & X_2 \\ {\scriptstyle f_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_2} \\ \mathbb{CP}^1 & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{CP}^1. \end{array}$$

定義より f_1 と f_2 が同型であれば，その種数と divisibility は一致するが，逆は一般には成立しない (例えば [1] に例がある) [2]．

X を複素多様体，$U \subset X$ を開集合，$f : U \to \mathbb{C}$ を正則写像，$x \in U$ を f の臨界点とする．x のまわりの座標近傍 (z_1, z_2) において $\dfrac{\partial f}{\partial z_i}(x) = 0$ $(i = 1, 2)$ であるから，複素ヘッセ行列 $\mathrm{Hess}(f)_x = \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j}(x)\right)_{i,j}$ の行列式が 0 であるかどうか，は座標近傍の取り方によらない．以下の補題は Lefschetz 特異点を複素ヘッセ行列により特徴づける．

補題 2.3 ([7, Lemma 2.11])**.** f の臨界点 $x \in U$ が Lefschetz 特異点であるための必要十分条件は $\det(\mathrm{Hess}(f)_x)$ が 0 でないということである．

2.2. 豊富な直線束と偏極

定義 2.4. X をコンパクト複素多様体，L をその上の正則直線束，$\Gamma(L) = H^0(X; \mathcal{O}_L)$ を L の正則切断全体からなるベクトル空間とする．このとき $\Gamma(L)$ は有限次元であるということが知られている．$s_0, \ldots, s_N$ を $\Gamma(L)$ の基底とする．L の局所自明化を介して s_i は X の開集合から $\mathbb{C}$ への写像とみなすことができ，さらにそれらを用いて

$$\varphi_L : X \setminus B_L \to \mathbb{CP}^N, \ \ \varphi_L(x) = [s_1(x) : \cdots : s_N(x)]$$

が定義できる (ただし $B_L = \{x \in X \mid s_1(x) = \cdots s_N(x) = 0\}$)．$B_L = \emptyset$ で φ_L が埋め込みとなるとき，L は**とても豊富**であるといい，ある $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し $L^{\otimes n}$ がとても豊富になるとき，L は**豊富**であるという．

上の φ_L の構成において，$\Gamma(L)$ の基底の代わりに独立な切断 s_0, s_1 を用いれば，X から $\mathbb{CP}^1$ への写像が構成できる．この写像を $[s_0 : s_1] : X \dashrightarrow \mathbb{CP}^1$ と表すことにする．$[s_0 : s_1]$ は $B_{s_0,s_1} = \{x \in X \mid s_0(x) = s_1(x) = 0\}$ 上では定義されない，ということに注意する．

補題 2.5. $x \in B_{x_0,s_1}$ において定義 2.1 の 3 つ目の条件にある座標近傍と微分同相がとれるということと，$(ds_0)_x, (ds_1)_x$ が一次独立であるということは同値である．

補題 *2.5* の証明. (U, φ) を，対応する直線束が自明となるような x のまわりの座標近傍とし，U は φ を介して $\mathbb{C}^2$ と同一視し，直線束の U への制限も適当な自明化を用いて $U \times \mathbb{C}$ と同一視す

[2] T 上の正則 LP に限れば逆も成立する，というのが本稿の主定理である．

る．このとき s_0, s_1 は $\mathbb{C}^2$ から $\mathbb{C}$ への正則写像とみなせる．$S = (s_0, s_1) : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ とする．逆写像定理より x が Lefschetz 型の base point であることと，dS_x が同型であることは同値であり，さらに後者は $(ds_0)_x, (ds_1)_x$ が一次独立であるということと同値である． $\square$

定義 2.6. Λ を $\mathbb{C}^2$ の格子とし，$T = \mathbb{C}^2/\Lambda$ を複素トーラスとする．$H^2(T;\mathbb{Z})$ の元で，T 上の豊富な直線束の Chern 類として実現されるものを，T の**偏極**という．自然な同型 $H^1(T;\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}(\Lambda, \mathbb{Z})$ より，同型 $H^2(T;\mathbb{Z}) \cong \wedge^2 \mathrm{Hom}(\Lambda, \mathbb{Z}) \cong \mathrm{Alt}(\Lambda, \mathbb{Z})$ が誘導される．ただし $\mathrm{Alt}(\Lambda, \mathbb{Z})$ は Λ 上の $\mathbb{Z}$ に値を持つ交代形式全体である．この同型により，偏極は Λ 上の交代形式とみなすことができる．さらに $E \in \mathrm{Alt}(\Lambda, \mathbb{Z})$ が正則直線束の Chern 類であれば，$E(iv, iw) = E(v, w)$ を満たす ([5, Proposition 1.1.6])．このような交代形式から，以下の対応で $\mathbb{C}^2$ 上の Hermite 形式 H が得られる：

$$H(v, w) = E(iv, w) + iE(v, w).$$

ただし E は $\mathbb{C}^2$ 上の交代形式に拡張されている．この対応は $E(iv, iw) = E(v, w)$ を満たす Λ 上の交代形式全体と，$\mathbb{C}^2$ 上の Hermite 形式全体との間の 1 対 1 対応を与えるので，偏極は $\mathbb{C}^2$ 上の Hermite 形式ともみなせる．Λ の，交代形式 E に関するシンプレクティック基底をうまくとれば，E の表現行列は $\begin{pmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{pmatrix}$ となる．ただし $D = \mathrm{diag}(d_1, d_2)$ は対角行列で，$d_1 | d_2$ である．この D，あるいは対 (d_1, d_2) を偏極 E の**型**という．

2.3. 解析的集合

X を複素多様体とし，$A \subset X$ とする．任意の $x \in A$ に対し x の (X における) 開近傍 U と，U 上定義された正則関数 $f_1, \ldots, f_r$ が存在し，$A \cap U = \{y \in U \mid f_1(y) = \cdots f_r(y) = 0\}$ となるとき，A を X の**解析的集合**であるという．$A \subset X$ を解析的集合とする．$x \in A$ に対し，x の開近傍 $U \subset X$ で，$A \cap U$ が X の複素部分多様体となるものがとれるとき，x を A の**正則点**といい，そのような U が x に対し存在しないとき，x を A の**特異点**という．A の正則点全体，特異点全体をそれぞれ $\mathrm{reg}(A)$，$\mathrm{sing}(A)$ で表す．$x \in \mathrm{reg}(A)$ に対し，その近傍の複素多様体としての次元を A の $\boldsymbol{x}$ **における次元**といい，$\dim_x(A)$ で表す．この次元を用いて，A の次元を以下のように定義する．

$$\dim(A) = \max_{x \in \mathrm{reg}(A)} \dim_x(A).$$

以下の定理より $\mathrm{reg}(A) \neq \emptyset$ なので，$\dim(A)$ は確かに定義される．

定理 2.7 ([2, Theorem 2.3, Theorem 5.2.2])**.** 解析的集合 $A \subset X$ に対し，$\mathrm{reg}(A)$ は A の稠密な部分集合である．さらに $\mathrm{sing}(A)$ も解析的集合であり，$\dim(\mathrm{sing}(A)) < \dim(A)$ である．

X, Y を複素多様体，$A \subset X$ を解析的集合，$f : A \to Y$ を連続写像とする．任意の $x \in A$ に対し x の X における開近傍 U と正則写像 $F : U \to Y$ が存在し，$F|_{U \cap A} = f|_{U \cap A}$ となるとき，f は**正則**であるという．以下の定理は後の議論で度々必要となる．

定理 2.8 ([2, Theorem 5.8])**.** $f : A \to Y$ を解析的集合 A から複素多様体 Y への固有な (つまりコンパクト集合の逆像がコンパクトとなるような) 正則写像とする．このとき $f(A) \subset Y$ も解析的集合であり，その次元は $\max\{\dim_z(A) - \dim_z(f^{-1}(f(z))) \mid z \in \mathrm{reg}(f^{-1}(f(z))) \cap \mathrm{reg}(A)\}$ である ($z \in A$ に対し $f^{-1}(f(z))$ は解析的集合であるということに注意する)．

3. 主定理の証明

3.1. 正則な LP に付随する豊富な直線束

まずこの節で以下の主張を示す.

定理 3.1. T 上の任意の正則な LP f に対し，ある豊富な直線束 $L \to T$ と $s_0, s_1 \in \Gamma(L)$ が存在し，$f = [s_0 : s_1]$ となる.

証明は [4, Chap. 1,§.4] の議論とほぼ同様であるが，多様体全体で定義されていない写像を扱うため，少しだけ工夫が必要である.

定理 3.1 の証明. $f : T \setminus B \to \mathbb{CP}^1$ を種数 g の正則な LP とする．B の十分小さい近傍 $\sqcup_i D_i$ と，正則同型 $\Phi_i : D_i \to \Phi_i(D_i) \subset \mathbb{C}^2$ で，$f \circ \Phi_i^{-1}(z_0, z_1) = [z_0 : z_1]$ となるものをとっておく (LP の定義では $\mathbb{CP}^1$ の自己同型も必要であるが，$\mathbb{CP}^1$ の自己同型は全て $\mathbb{C}^2$ の線形写像に持ち上がることから，Φ_i をうまくとることで LP の定義に現れる $\mathbb{CP}^1$ の自己同型は恒等写像であると仮定できるということに注意する)．$\Phi_i(x) = (\Phi_i^0(x), \Phi_i^1(x))$ とする.

簡単のため $[0:1] \in \mathbb{CP}^1$ は f の臨界点ではないと仮定する．$U_i = \{[z_0 : z_1] \in \mathbb{CP}^1 \mid z_i \neq 0\}$ とし，$\varphi_i : U_i \to \mathbb{C}$ を $\varphi_0([z_0 : z_1]) = z_1/z_0$，$\varphi_1([z_0 : z_1]) = z_0/z_1$ で定義する．複素多様体 L_f を

$$L_f = (f^{-1}(U_0) \times \mathbb{C}) \sqcup (f^{-1}(U_1) \times \mathbb{C}) \sqcup_i (D_i \times \mathbb{C}) / \sim$$

で定義する．ただし，同値関係 $\sim$ は以下の対が同一視されるように定義する：

- $x \in f^{-1}(U_0 \cap U_1)$ に対し $(x, z) \in f^{-1}(U_0) \times \mathbb{C}$ と $(x, \varphi_1(f(x))z) \in f^{-1}(U_1) \times \mathbb{C}$,
- $x \in f^{-1}(U_0) \cap D_i$ に対し $(x, z) \in f^{-1}(U_0) \times \mathbb{C}$ と $(x, \Phi_i^0(x)z) \in D_i \times \mathbb{C}$,
- $x \in f^{-1}(U_1) \cap D_i$ に対し $(x, z) \in f^{-1}(U_1) \times \mathbb{C}$ と $(x, \Phi_i^1(x)z) \in D_i \times \mathbb{C}$.

L_f は (自然な射影により) T 上の直線束となる．因子 $D_{[0:1]}$ は，$f^{-1}(U_0)$，$f^{-1}(U_1)$，D_i 上でそれぞれ定数関数 1，$\varphi_1 \circ f$，Φ_i^0 の零点集合となるから，L_f は $D_{[0:1]}$ に対応する直線束である.

$s_0 : T \to L_f$ を次のように定義する.

$$s_0(x) = \begin{cases} (x, 1) \in U_0 \times \mathbb{C} \subset L_f & (x \in f^{-1}(U_0)) \\ (x, \varphi_1(f(x))) \in U_1 \times \mathbb{C} \subset L_f & (x \in f^{-1}(U_1)) \\ (x, \Phi_i^0(x)) \in D_i \times \mathbb{C} \subset L_f & (x \in D_i). \end{cases}$$

L_f の構成からこの写像は well-defined であり，L_f の正則な切断となる．さらに $s_1 : T \to L_f$ を次のように定義する.

$$s_1(x) = \begin{cases} (x, \varphi_0(f(x))) \in f^{-1}(U_0) \times \mathbb{C} \subset L_f & (x \in f^{-1}(U_0)) \\ (x, 1) \in f^{-1}(U_1) \times \mathbb{C} \subset L_f & (x \in f^{-1}(U_1)) \\ (x, \Phi_i^1(x)) \in D_i \times \mathbb{C} \subset L_f & (x \in D_i). \end{cases}$$

この写像も well-defined で，L_f の正則な切断となる．定義から $s_0^{-1}(0) = \overline{f^{-1}([1:0])}$，$s_1^{-1}(0) = \overline{f^{-1}([0:1])}$ であるから，$s_0^{-1}(0) \cap s_1^{-1}(0)$ は f の基点集合 B と一致し，さらに s_0 と s_1 から誘導される写像

$$[s_0 : s_1] : T \setminus B \to \mathbb{CP}^1 : x \mapsto [s_0(x) : s_1(x)]$$

は f と一致する．

最後に，定理 3.1 を示すためには L_f が豊富であるということを示せばよいが，それは次の定理から従う．

定理 3.2 (Ch. 4, Prop.5.2 in [5])**.** T 上の直線束 L に対し次の 2 つの条件は同値..

1. L は豊富．
2. L は非自明な正則切断を持ち，$c_1^2(L) > 0$.

L_f に対しては定理 3.2 の条件 2 を容易に確かめることができる．実際 L_f の非自明な正則切断は既に構成しているし，D_x に代表されるホモロジー類が $c_1(L_f)$ のポアンカレ双対になることと，D_x の自己交差が基点の個数と一致することから，$c_1^2 > 0$ であることも確かめられる．以上より定理 3.1 は示された． □

注意 3.3. 証明を見てもわかる通り，(豊富とは限らない) 正則直線束を対応させるだけなら一般の複素多様体でも可能である．得られる正則直線束の豊富性を示す際に，全空間が T であること (特に定理 3.2) を用いている．

3.2. 偏極つきアーベル曲面のモジュライ空間と Theta 関数

$\mathfrak{H}_g$ で $g \times g$ 複素対称行列で，虚部が正定値であるもの全体とする．これは対称行列からなる空間の開部分多様体で $\frac{g(g+1)}{2}$ 次元である．アーベル曲面の偏極の型として $D = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_g)$ を一つ固定する．$Z \in \mathfrak{H}_g$ に対し，Λ_Z を (Z, D) の列ベクトルを並べて得られる $\mathbb{C}^g$ の $2g$ 個のベクトルの対とする．Z の虚部が正定値であることから，Λ_Z は $\mathbb{C}^g$ の格子を与える．この格子も同じ記号 Λ_Z で表すことにし，$T_Z = \mathbb{C}^g/\Lambda_Z$ とする．さらに $H_Z = \mathrm{Im}(Z)^{-1}$ とする．H_Z を $\mathbb{C}^g$ 上の Hermite 形式とみなし，基底 Λ_Z に関して行列表示すると，$\begin{pmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{pmatrix}$ となる．特に H_Z は T_Z の偏極を与える．対応 $Z \mapsto (T_Z, H_Z, \Lambda_Z)$ のもと，$\mathfrak{H}_g$ は偏極とそれに付随する交代形式のシンプレクティック基底の組のモジュライ空間となっている ([5, Proposition 8.1.2]).

補題 3.4. $\mathfrak{H}_2$ において，分裂するもの全体の集合は正の余次元を持つ可算個の解析的集合の和集合に含まれる．

証明. $\mathrm{End}(T)$ で, T の正則な自己準同型全体からなる環とする．まず主張を示すには「$\mathrm{End}(T_Z) \cong \mathbb{Z}$ とならない Z 全体が $\mathfrak{H}_2$ の中で正の余次元を持つ」ということを示せば十分である，ということを見ておく．アーベル曲面 T が楕円曲線の直積 $E_1 \times E_2$ と同型であると仮定する．このとき $T = E_1 \times E_2$ の自己準同型として次の 2 つが考えられる．

$$\varphi_1 : E_1 \times E_2 \to E_1 \times E_2, \ \ \varphi_1(x, y) = (x, 0),$$
$$\varphi_2 : E_1 \times E_2 \to E_1 \times E_2, \ \ \varphi_2(x, y) = (0, y).$$

ただし 0 は楕円曲線の単位元である．もし $\mathrm{End}(T) \cong \mathbb{Z}$ であれば $n\varphi_1 = m\varphi_2$ となる $n, m \in \mathbb{Z}$ が存在するが，両辺に $(x, y) \in E_1 \times E_2$ を代入すると，$(nx, 0) = (0, my)$ となり，$n = m = 0$ となるが，φ_1, φ_2 は自明な準同型ではないので，これは矛盾する．よって $\mathrm{End}(T) \not\cong \mathbb{Z}$ となる．

次に前段落の「」内の主張を示す (この主張は [5, Exercise 8.1] の一部であるが，解答がついていないのでここで証明しておく)．$\varphi : T_Z \to T_Z$ を正則な準同型とする．このとき $\Phi = d\varphi_0 : T_0T_Z \to T_0T_Z$ は $\mathbb{C}$-線形写像であり，これは φ の $\mathbb{C}^2$ への持ち上げと一致する．Φ が T_Z に正則写像を誘導するということから，Φ は格子 $(Z, D)\mathbb{Z}^4$ を $(Z, D)\mathbb{Z}^4$ 内に写す．特に制

限 $\phi = \Phi|_{(Z,D)\mathbb{Z}^4} : (Z,D)\mathbb{Z}^4 \to (Z,D)\mathbb{Z}^4$ はアーベル群の準同型となる．ϕ の，$(Z,D)\mathbb{Z}^4$ の基底 (Z,D) に関する表現行列を $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Z})$ とする $(a,b,c,d \in M_2(\mathbb{Z}))$．このとき $(\phi(Z),\phi(D)) = (Z,D)M = (Za+Db, Zc+Dd)$ である．一方 D は $\mathbb{C}^2$ の $\mathbb{C}$-ベクトル空間としての基底であるから，Z は D の一次結合で表すことができる．実際 $G = D^{-1}Z$ とおくと，$Z = DG$ である．両辺に Φ を作用させると，$\Phi(Z) = \Phi(D)G$ を得る．ここで $\Phi(Z) = \phi(Z), \Phi(D) = \phi(D)$ であることから，

$$Za + Db = (Zc + Dd)D^{-1}Z \tag{1}$$

を得る [3]．つまり，M が格子に誘導する準同型の表現行列になるような，T_Z 上の自己準同型が存在するためには，Z は等式 (1) を満たさなければならない．式 (1) を変形すると，$ZcD^{-1}Z - Za + DdD^{-1}Z = Db$ となる．Z に関する次数をみると，これが自明な等式となるためには Z によらず $ZcD^{-1}Z = DdD^{-1}Z - Za = bD = 0$ となる必要があることがわかる．このときまず第 3 式より $b = 0$．さらに第 1 式と第 2 式の各成分を計算すると，Z の成分の係数が 0 になるためには $c = 0, a = d = nI$($n \in \mathbb{Z}$ で I は単位行列) となる必要があることがわかる (逆に $b = c = 0, a = d = nI$ のとき，対応する準同型は n 倍写像であり，これは常に存在する)．よって $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Z})$ に対し $\mathcal{S}_M = \{Z \in \mathfrak{H}_2 \mid Za + Db = (Zc + Dd)D^{-1}Z\}$ とすると，$M \neq nI$ であれば $\mathcal{S}_M$ は余次元 1 の解析的集合となり，$Z \in h_2 \setminus (\cup_{M\neq nI}\mathcal{S}_M)$ であれば，$\mathrm{End}(T_Z) \cong \mathbb{Z}$ となる．以上より主張が示された． □

連結準同型 $c_1 : H^1(X;\mathcal{O}_X^*) \to H^2(X;\mathbb{Z})$ の像，すなわち正則直線束の Chern 類となり得るコホモロジー類全体を **Néron-Severi 群**といい，$\mathrm{NS}(X)$ で表す．補題 3.4 の証明中の結果 $(+\alpha)$ を用いれば，以下の補題も示すことができる．

補題 3.5 (cf. [5, Exercise 8.1])**.** $\mathfrak{H}_2$ において，$\mathrm{NS}(X) \cong \mathbb{Z}$ とならないもの全体の集合は正の余次元を持つ解析的集合の可算和に含まれる．

補題 *3.5* の証明．補題 3.4 の証明における議論から，$\mathrm{End}(X) \cong \mathbb{Z}$ であれば，$\mathrm{NS}(X) \cong \mathbb{Z}$ を示せば十分である．[5, Proposition 5.2.1] より，$\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X) = \mathrm{NS}(X) \otimes \mathbb{Q}$ と $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(X) \cong \mathbb{Q}$ のある $\mathbb{Q}$-部分空間は同型である．よって $\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X) \cong \mathbb{Q}$ となる．$\mathrm{NS}(X)$ は自由アーベル群で階数は 1 であるから $\mathbb{Z}$ と同型である． □

補題 3.6. $d_1d_2 \geq 5$ であれば，とても豊富ではない直線束の Chern 類となる $\mathfrak{H}_2$ の元全体は，$\mathfrak{H}_2$ の正の余次元を持つ解析的集合の可算和に含まれる．

補題 *3.6* の証明．まず $d_1 \geq 3$ であれば [5, Theorem 4.5.1] より全ての型が (d_1, d_2) の直線束はとても豊富である．また $d_1 = 2, d_2 \geq 4$ であれば，[5, §.10.1] にある通り，型が (d_1, d_2) の直線束は底空間が分裂しなければとても豊富となる．よって補題 3.4 よりこの場合でも主張が従う．最後に $d_1 = 1, d_2 \geq 5$ とすると，[5, Theorem 10.4.1] より，T 上の型が (d_1, d_2) の直線束 L がとても豊富ではないための必要十分条件は，X が $C \cdot L = 2$ となる楕円曲線をもつことである．C は楕円曲線であるから随伴等式より $C^2 = 0$ である ($K_T = 0$ から従う)．特に C, L は $H^2(T;\mathbb{Z})$ において一次独立である．一方 C は X の因子と思うこともできるから，$\mathrm{NS}(X)$ の階数は 2 以上となる．よって補題 3.5 より主張が従う． □

[3] [5, Exercise 8.1] のヒントとは少し異なるが，これは群の作用のさせ方によるもので，本質的な差はない．

$Z \in \mathfrak{H}_2$ に対し，T_Z 上の H_Z を Chern 類として持つ直線束全体を考える．[5, Corollary 2.5.4] により，H_Z を Chern 類に持つ直線束が一つ与えられれば，T_Z からそのような直線束全体への全射が引き戻しにより得られる．特に H_Z を Chern 類に持つ 2 つの直線束に対応する LP の同型類全体にも一対一対応があるため,「LP の同型類全体を考える」という目的のうえでは，各 H_Z に対し直線束を一つ構成し，その正則切断全体の空間の基底を一つ与え，それらを調べれば十分である．

T_Z の普遍被覆は $\mathbb{C}^2$ であり，$\mathbb{C}^2$ 上の正則直線束は全て自明であるから ([5, Lemma 2.1.1]), T_Z 上の正則直線束の切断を与えることと，$\mathbb{C}^2$ 上のある二重周期関数を与えることは同値である．この二重周期関数が Theta 関数と呼ばれるものである．H_Z を Chern 類に持つ直線束の切断に対応する Theta 関数の組を一つ与え，それが Z に滑らかに依存する，ということを見ておく (ここに記す内容の詳細は [5, Chap. 2, §.2] に書いてある).

格子 Λ_Z のうち，Z, D で張られる部分加群をそれぞれ Λ_Z^1, Λ_Z^2 とし，その $\mathbb{R}$ ベクトル空間としての拡張を V_Z^1, V_Z^2 する．$\chi_Z : \mathbb{C}^2 \to S^1$ を次のように定義する：

$$\chi_Z(v_1 + v_2) = \exp(\pi i \operatorname{Im}(H_Z)(v_1, v_2)),\ \text{ただし } v_i \in V_Z^i.$$

この χ_Z を用いて，$a = a_Z : \Lambda_Z \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^\times$ を次のように定義する：

$$a_Z(\lambda, v) = \chi_Z(\lambda) \exp\left(\pi H_Z(v, \lambda) + \frac{\pi}{2} H_Z(\lambda, \lambda)\right).$$

$V_Z^2 = \langle D \rangle$ は $\mathbb{R}$ ベクトル空間としては 2 次元であるが，$\mathbb{C}$ ベクトル空間としては $\mathbb{C}^2$ を生成する．$\operatorname{Im}(H_Z)$ は V_Z^2 上自明であり，H_Z は Hermite 形式であるから，$H_Z|_{V_Z^2 \times V_Z^2}$ は対称形式である．この対称形式を $\mathbb{C}$-線形に拡張したものを $B_Z : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ とする．これを用いて $\vartheta_Z^{00} : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ を次のように定義する：

$$\vartheta_Z^{00}(v) = \exp\left(\frac{\pi}{2} B_Z(v, v)\right) \sum_{\lambda \in \Lambda_Z^1} \exp\left(\pi(H_Z - B_Z)(v, \lambda) - \frac{\pi}{2}(H_Z - B_Z)(\lambda, \lambda)\right)$$

$Z = (z_1, z_2)$ $(z_i \in \mathbb{C}^2)$ とし，$0 \leq e_1 < d_1$，$0 \leq e_2 < d_2$ に対し，$w_{e_1, e_2} = \dfrac{e_1}{d_1} z_1 + \dfrac{e_2}{d_2} z_2$ とする．$\vartheta_Z^{e_1, e_2} : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ を次のように定義する：

$$\vartheta_Z^{e_1, e_2}(v) = a_Z(w_{e_1, e_2}, v)^{-1} \vartheta_Z(v + w_{e_1, e_2}).$$

このとき，集合 $\{\vartheta_Z^{e_1, e_2} \mid 0 \leq e_1 < d_1, 0 \leq e_2 < d_2\}$ が H_Z を Chern 類に持ち，a_Z を保型形式とする直線束 L_Z の切断の空間の基底となる ([5, Theorem 2.2.7])．上の構成から各 e_1, e_2 に対し，$\vartheta_Z^{e_1, e_2}$ は Z に滑らかに依存する，すなわち $\mathfrak{H}_2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$，$(Z, v) \mapsto \vartheta_Z^{e_1, e_2}(v)$ は可微分写像であるということがわかる ($H_Z = \operatorname{Im}(Z)^{-1}$ であるから正則であるとは限らない [4] ということに注意しておく).

3.3. ペンシルが LP となるための条件

この節では直線束に由来するペンシルが LP となるための条件について考察する．[7, §.2.1.1] において一般の複素多様体上の，とても豊富な直線束に対して行われている議論を，アーベル曲面上の，とても豊富とは限らない，豊富な直線束に対して行う．まず以下の簡単な補題を示しておく．

[4] 多分正則ではないし，この写像の (非) 正則性はあまり重要ではない．

補題 3.7. $(1,d)$ 型の偏極を持つ正則直線束は LP を与えるならば分裂しない.

補題 3.7 の証明. 対偶を示す. $(1,d)$ 型の偏極 L が分裂すると仮定し, $T \cong E_1 \times E_2$ とする. このとき $\varphi_L(x,y) = [s(x)t_1(y) : \cdots : s(x)t_d(y)]$ と表せる. 特に φ_L は $s^{-1}(0) \times E_2$ 上で定義されないから, φ_L に射影を合成して得られる $\mathbb{CP}^1$ への射も $s^{-1}(0)$ 上定義されない. s は楕円曲線の次数 1 の直線束の非自明な切断であり, 特に $s^{-1}(0)$ は空ではない. よって φ_L と射影の合成は複素余次元 1 の多様体上定義されないので, LP になり得ない. $\square$

$Z \in \mathfrak{H}_2$ を一つとる. $d_1 \geq 2$ であれば $\varphi_Z = \varphi_{L_Z}$ は T_Z 全体で定義され, また $d_1 = 1$ であっても $d_2 \geq 3$ であり, T_Z が分裂しなければ φ_Z は T_Z 全体で定義される ([5, Chap. 10] 参照). 補題 3.7 より $d_1 = 1$ で, T_Z が楕円曲線の積になっているような状況は考える必要がないので, 以降の議論では以下を仮定する：

仮定 1 ：$d_1 = 1$ のとき T_Z は分裂しない.

このとき [5, Lemma 10.1.2] より $d_1 d_2 \geq 3$ を仮定すれば $B_Z = \emptyset$ となる.

$N = d_1 d_2 - 1$ とし, $\{\vartheta_Z^{ij}\}$ を用いて $\Gamma(L_Z)$ と $\mathbb{C}^{N+1}$ を同一視する. $\mathbb{CP}^N$ の双対射影空間, すなわち $\mathbb{CP}^N$ の超平面全体を $(\mathbb{CP}^N)^*$ で表す. $P \subset (\mathbb{CP}^N)^*$ を直線 (つまり一次式の零点集合で 1 次元のもの) とすると, 次のようにしてペンシル $f_P : T_Z \setminus B_P \to P$ が定義できる：

$$B_P = \left\{ x \in T_Z \;\middle|\; s(x) = 0 \text{ for } {}^\forall s \in P \right\}, \quad f_P(x) = s \in P \text{ if } s(x) = 0.$$

$s_0, s_1 \in P$ を異なる点とすると, f_P は $[s_0 : s_1]$ と同型である.

以下 $\mathbb{CP}^N$ と $(\mathbb{CP}^N)^*$ は自然に同一視する. $W_Z \subset T_Z \times (\mathbb{CP}^N)^*$ を, 以下のように定義する：

$$W_Z = \left\{ (\overline{x}, [\ldots, l_{ij}, \ldots]) \in T_Z \times (\mathbb{CP}^N)^* \;\middle|\; \sum_{i,j} l_{ij} \vartheta_Z^{ij}(x) = \sum_{i,j} l_{ij} \frac{\partial \vartheta_Z^{ij}}{\partial z_k}(x) = 0 \;\; (k = 1, 2) \right\}.$$

ただし $\overline{x} \in T_Z$ は $x \in \mathbb{C}^2$ で代表される点である. 定義から W_Z は $T_Z \times (\mathbb{CP}^N)^*$ の解析的集合である.

補題 3.8. $x \in \mathbb{C}^2$, $\overline{x} \notin B_P$ とする. このとき $H \in P$ に対し以下の 3 つは全て同値：

1. $(\overline{x}, H) \in W_Z$,
2. $f_P(\overline{x}) = H$ で $\overline{x}$ が f_P の臨界点.
3. φ_Z と H は $\overline{x}$ で横断的ではない,

補題 3.8 の証明. まず 1. $\Leftrightarrow$ 2. を示す. 商写像 $\mathbb{C}^2 \to T_Z$ は普遍被覆であるから, 特に局所両正則である. この逆写像を用いて $\overline{x} \in T_Z$ の局所座標を与える. $x \notin B_P$ であるから, $[\ldots : r_{ij} : \ldots] \in P$ で, $\sum_{i,j} r_{ij} \vartheta_Z^{ij}(x) \neq 0$ となるものが存在する. このとき f_P は $\overline{x}$ のまわりの局所座標上で次のようになる：

$$x \mapsto \frac{\sum_{i,j} l_{ij} \vartheta_Z^{ij}(x)}{\sum_{i,j} r_{ij} \vartheta_Z^{ij}(x)}.$$

となる. なお, 値域において $H \in P$ は 0 に対応することに注意する. このとき,

$f_P(\overline{x}) = H$ で $\overline{x}$ が f_P の臨界点

$$\Leftrightarrow \sum_{i,j} l_{ij}\vartheta_Z^{ij}(x)=0 \text{ で } \frac{\partial}{\partial z_k}\left(\frac{\sum_{i,j} l_{ij}\vartheta_Z^{ij}(x)}{\sum_{i,j} r_{ij}\vartheta_Z^{ij}(x)}\right)=0 \ \ (k=1,2)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i,j} l_{ij}\vartheta_Z^{ij}(x)=0 \text{ かつ}$$

$$\frac{\frac{\partial}{\partial z_k}\left(\sum_{i,j} l_{ij}\vartheta_Z^{ij}(x)\right)\sum_{i,j} r_{ij}\vartheta_Z^{ij}(x)-\frac{\partial}{\partial z_k}\left(\sum_{i,j} r_{ij}\vartheta_Z^{ij}(x)\right)\sum_{i,j} l_{ij}\vartheta_Z^{ij}(x)}{\left(\sum_{i,j} r_{ij}\vartheta_Z^{ij}(x)\right)^2}=0 \ \ (k=1,2)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i,j} l_{ij}\vartheta_Z^{ij}(x)=0 \text{ かつ } \sum_{i,j} l_{ij}\frac{\partial\vartheta_Z^{ij}}{\partial z_k}(x)=0$$

となる．

次に 1. $\Leftrightarrow$ 3. を示す．$H\subset\mathbb{CP}^N$ は余次元 1 の超平面であるから，$\overline{x}$ において φ_Z が H と横断的でないことと，$(d\varphi_Z)_{\overline{x}}(T_{\overline{x}}T_Z)\subset T_{\varphi_Z(\overline{x})}H$ は同値である．$U_{ij}=\{[y]\in\mathbb{CP}^N \mid y_{ij}\neq 0\}$ とし，$\varphi_Z(\overline{x})\in U_{ij}$ とする．自然な方法で U_{ij} と $\mathbb{C}^N$ を同一視すると，$H=[l]$ は一次式 $\displaystyle\sum_{(k,l)\neq(i,j)} l_{kl}X_{kl}+l_{ij}$ の零点集合となる．よって，

$$\varphi_Z \text{ と } H \text{ は } \overline{x} \text{ で横断的ではない}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{(k,l)\neq(i,j)} l_{kl}\frac{\vartheta_Z^{kl}(x)}{\vartheta_Z^{ij}(x)}+l_{ij}=0 \text{ かつ } \sum_{(k,l)\neq(i,j)} l_{kl}\frac{\partial}{\partial z_m}\left(\frac{\vartheta_Z^{kl}(x)}{\vartheta_Z^{ij}(x)}\right)=0 \ \ (m=1,2)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i,j} l_{ij}\vartheta_Z^{ij}(x)=0 \text{ かつ}$$

$$\sum_{(k,l)\neq(i,j)} l_{kl}\frac{\frac{\partial}{\partial z_m}\left(\vartheta_Z^{kl}(x)\right)\vartheta_Z^{ij}(\overline{x})-\frac{\partial}{\partial z_m}\left(\vartheta_Z^{ij}(x)\right)\vartheta_Z^{kl}(x)}{\left(\vartheta_Z^{ij}(x)\right)^2}=0 \ \ (m=1,2)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i,j} l_{ij}\vartheta_Z^{ij}(x)=0 \text{ かつ}$$

$$\sum_{(k,l)\neq(i,j)} l_{kl}\frac{\frac{\partial\vartheta_Z^{kl}}{\partial z_m}(x)}{\vartheta_Z^{ij}(x)}+l_{ij}\frac{\frac{\partial\vartheta_Z^{ij}}{\partial z_m}(x)}{\vartheta_Z^{ij}(x)}=0 \ \ (m=1,2)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i,j} l_{ij}\vartheta_Z^{ij}(x)=0 \text{ かつ } \sum_{i,j} l_{ij}\frac{\partial\vartheta_Z^{ij}}{\partial z_k}(x)=0$$

となる． □

以降の議論では以下を仮定する：

仮定 2：$d_1d_2\geq 3$.

このとき $B_Z=\emptyset$ であることに注意する．$R_i\subset T_Z$ を以下のように定義する．

$$R_i=\{x\in T_Z \mid \operatorname{rank}((d\varphi_Z)_x)=i\} \ \ (i=0,1,2).$$

また $S_i=\cup_{j=0}^i R_j$ する．このとき S_i は解析的集合である．

補題 3.9. $\dim(S_1) \leq 1$．さらに $\mathrm{NS}(T_Z) \cong \mathbb{Z}$ であれば $\dim(S_0) = 0$ [5].

補題 *3.9* の証明. T_Z はコンパクトであるから，定理 2.8 より $\varphi_Z(T_Z)$ は解析的集合である．$\dim(S_1) = 2$ であるとすると，T_Z の既約性から $S_1 = T_Z$ となる．よって階数定理 ([2, Theorem A2.2.2]) よりその次元は 1 となる．一方 Chow の定理 ([2, Theorem 7.1]) より $\varphi_Z(T_Z)$ は代数曲線である．その次数が 1 であると仮定すると，$\varphi_Z(T_Z)$ はある $\mathbb{CP}^N$ の超平面に含まれるが，これは ϑ_Z^{ij} の非自明な一次結合で 0-切断となるものが存在する，ということを意味する．これは ϑ_Z^{ij} の一次独立性に反する．よって $\varphi_Z(T_Z)$ の次数は 2 以上であるから，$\varphi_Z(T_Z)$ は $\mathbb{CP}^N$ の生成的な超平面と 2 点以上で交わる．しかしこれは線形形式 $|L_Z|$ の生成的な因子が非連結，特に可約であるということを意味するが，これは [5, Theorem 4.3.5] に反する．よって結局 $\dim(S_1) = 1$ であることがわかる．

φ_Z は S_0 の連結成分上で定数関数である．φ_Z は定数関数ではないことから，$\dim(S_0) \leq 1$ である．$\dim(S_0) = 1$ と仮定すると，S_0 の既約成分 C で，$\dim(C) = 1$ となるものが存在する．C は連結であるから，$\varphi_Z|_C$ は定数関数となる．$H \in (\mathbb{CP}^N)^*$ として $\varphi_Z(C)$ を通らないものをとると，C と $\varphi_Z^{-1}(H)$ は交わらない．このことから $C \cdot H_Z = 0$ がわかる．一方 $(H_Z)^2 = 2d_1d_2 > 0$ であるから，$[C], H_Z \in H^2(T_Z;\mathbb{Z})$ は一次独立である (C は代数多様体 T_Z 内の代数的部分多様体であるから，特に代表するホモロジー類は非自明であるということに注意する)．$[C] \in \mathrm{NS}(T_Z)$ であるから，$\mathrm{NS}(T_Z)$ の階数は 2 以上となる．これで主張が従う． □

$\dim(S_0) = 1$ となるような Z から LP は現れ得ない．実際 S_0 の 1 次元の既約成分は必ずペンシルの一つのファイバーに含まれる臨界点集合になる．よって以降の議論では次を仮定する：

仮定 3：$\dim(S_0) = 0$.

補題 3.5 よりこの仮定は生成的な $Z \in \mathfrak{H}_2$ に対し成立することに注意する．

補題 3.10. $\dim(W_Z) \leq N - 1$.

補題 *3.10* の証明. $\overline{x} \in R_i$ とすると，$\dim\left((d\varphi_Z)_{\overline{x}}(T_{\overline{x}}T_Z)\right) = i$ であるから，$p_1^{-1}(R_i)$ は R_i 上の $\mathbb{CP}^{N-1-i}$ をファイバーとするファイバー束になるということを示すことができる．ただし $p_1 : W_Z \to T_Z$ は第 1 成分への射影である．このことと仮定より $p_1^{-1}(R_0) = p_1^{-1}(S_0)$ の次元は (空でなければ) $N - 1$ である．

$p_1^{-1}(S_1)$ は (S_1 が解析的集合であるから) 解析的集合である．この次元が $N-1$ より大きいと仮定する．このとき開集合 $U \subset T_Z \times (\mathbb{CP}^N)^*$ で，$U \cap p_1^{-1}(S_1)$ が N 次元以上の多様体になるようなものが存在する．前段落における議論から，$p_1^{-1}(\mathrm{reg}(S_1) \cap R_1)$ は $N-1$ 次元以下の多様体である．よって仮定より U と $p_1^{-1}(\mathrm{reg}(S_1) \cap R_1)$ は共通部分を持たないから，$U \subset p_1^{-1}(\mathrm{sing}(S_1) \cup S_0)$ である．一方 $\mathrm{sing}(S_1) \cup S_0$ は 0 次元の解析的集合であるから特に離散集合である．よって前段落の議論から $p_1^{-1}(\mathrm{sing}(S_1) \cup S_0)$ は有限個の $N-1$ 次元以下の多様体の非交和であるが，これは $U \cap p_1^{-1}(S_1)$ の次元が N 以上であることに反する．以上より $p_1^{-1}(S_1)$ の次元が $N-1$ 以下であるということがわかる．同様にして，$p_1^{-1}(S_2) = W_Z$ の次元が $N-1$ 以下であるということも示すことができる． □

$p_2 : W_Z \to (\mathbb{CP}^N)^*$ を第 2 成分への射影とし，$\mathcal{D}_Z = p_2(W_Z)$ とする．p_2 は固有写像であるから，定理 2.8 より $\mathcal{D}_Z$ は次元が $\dim(W_Z)$ 以下の解析的集合である．

[5] $\mathrm{NS}(T_Z) \cong \mathbb{Z}$ という仮定がなくても $\dim(S_0) = 0$ となる気がするが，筆者にはこの仮定抜きで主張を証明することができない．

補題 3.11. $\dim(\mathcal{D}_Z) = N-1$ で，$\dim(W_Z) = N-1$.

補題 *3.11* の証明．前半が従えば後半が従うので前半のみ示す．$\dim(\mathcal{D}_Z) \le \dim(W_Z) \le N-1$ であるから，$x \in (\mathbb{CP}^N)^* \setminus \mathcal{D}_Z$ が存在する．自然な射影 $\pi : (\mathbb{CP}^N)^* \setminus \{x\} \to \mathbb{CP}^{N-1}$ の $\mathcal{D}_Z$ への制限は固有写像であるから，定理 2.8 よりその像は解析的集合で，次元は $\dim(\mathcal{D}_Z)$ 以下である．ここで $\dim(\mathcal{D}_Z) < N-1$ と仮定すると $\pi|_{\mathcal{D}_Z}$ は全射ではないので，x を通る $(\mathbb{CP}^N)^*$ 内の直線 P で，$\mathcal{D}_Z$ と交わらないものがとれる．このとき $p_2^{-1}(P) \cap W_Z = \emptyset$ であるから，ペンシル $f_P : T_Z \setminus B_P \to P$ は臨界点を持たず，また補題 2.5 より B_P の点は全て Lefschetz 型になる．よって T のブローアップが球面上の曲面束の構造を持つことになるが，これはあり得ない． □

$W_Z^0 \subset W_Z$ を次のように定義する：

$$W_Z^0 = \left\{ (\overline{x}, [l]) \in W_Z \ \middle|\ \det\left(\left(\sum_{i,j} l_{ij} \frac{\partial^2 \vartheta_Z^{ij}}{\partial z_k \partial z_l}(x) \right)_{1 \le k,l \le 2} \right) \ne 0 \right\}.$$

補題 3.12. $P \subset (\mathbb{CP}^N)^*$ を直線，$\overline{x} \notin B_P$ とする．このとき $H \in P$ に対し以下の 2 つは同値：

1. $(\overline{x}, H) \in W_Z^0$,
2. $f_P(\overline{x}) = H$ で $\overline{x}$ は f_P の Lefschetz 特異点.

さらに，$(\overline{x}, H) \in W_Z^0$ なら $(\overline{x}, H)$ は W_Z の正則点で，$\dim_{(\overline{x},H)} W_Z = N-1$ で，さらに $p_2 : W_Z \to \mathcal{D}_Z$ は $(\overline{x}, H)$ においてはめ込みとなる.

補題 *3.12* の証明．まず前半の主張を示す．補題 3.8 より，$(\overline{x}, H) \in W_Z$ に対し $\overline{x}$ が f_P の Lefschetz 特異点であることと，$\det\left(\left(\sum_{i,j} l_{ij} \frac{\partial^2 \vartheta_Z^{ij}}{\partial z_k \partial z_l}(x) \right)_{1 \le k,l \le 2} \right) \ne 0$ が同値であることを示せばよい．しかしこれは

$$x \mapsto \frac{\sum_{i,j} l_{ij} \vartheta_Z^{ij}(x)}{\sum_{i,j} r_{ij} \vartheta_Z^{ij}(x)}.$$

の複素ヘッセ行列を計算することで容易に確かめられる (補題 2.3 を用いる).

次に後半の主張を示す．$(\overline{x}, [l_{ij}]) \in W_Z^0$ とする．l_{ij} のうち少なくとも一つは 0 ではない．簡単のため $l_{00} \ne 0$ と仮定し，$l'_{ij} = l_{ij}/l_{00}$ とする．正則関数 $\Phi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^3$ を次のように定義する：

$$\Phi(x, y_{01}, \ldots, y_{ij}, \ldots) =$$
$$\left(\vartheta_Z^{00}(x) + \sum_{(i,j) \ne (0,0)} y_{ij} \vartheta_Z^{ij}(x), \frac{\partial \vartheta_Z^{00}}{\partial z_1}(x) + \sum_{(i,j) \ne (0,0)} y_{ij} \frac{\partial \vartheta_Z^{ij}}{\partial z_1}(x), \frac{\partial \vartheta_Z^{00}}{\partial z_2}(x) + \sum_{(i,j) \ne (0,0)} y_{ij} \frac{\partial \vartheta_Z^{ij}}{\partial z_2}(x) \right).$$

W_Z の定義より，W_Z の $(\overline{x}, [l_{ij}])$ における解析的集合芽は $\Phi^{-1}(0)$ の $(x, (l'_{ij}))$ における解析的集合芽と同型である．よって $(x, (l'_{ij}))$ が Φ の正則点であれば，$(\overline{x}, [l_{ij}])$ が W_Z の正則点であるということがわかる．簡単な計算から，$(d\Phi)_{(x,(l'_{ij}))}$ は以下の行列となることがわかる：

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \vartheta_Z^{ij}(x) & \cdots \\ \frac{\partial^2 \vartheta_Z^{00}}{\partial z_1^2}(x) + \sum_{(i,j) \ne (0,0)} l'_{ij} \frac{\partial^2 \vartheta_Z^{ij}}{\partial z_1^2}(x) & \frac{\partial^2 \vartheta_Z^{00}}{\partial z_1 \partial z_2}(x) + \sum_{(i,j) \ne (0,0)} l'_{ij} \frac{\partial^2 \vartheta_Z^{ij}}{\partial z_1 \partial z_2}(x) & \cdots & \frac{\partial \vartheta_Z^{ij}}{\partial z_1}(x) & \cdots \\ \frac{\partial^2 \vartheta_Z^{00}}{\partial z_1 \partial z_2}(x) + \sum_{(i,j) \ne (0,0)} l'_{ij} \frac{\partial^2 \vartheta_Z^{ij}}{\partial z_1 \partial z_2}(x) & \frac{\partial^2 \vartheta_Z^{00}}{\partial z_2^2}(x) + \sum_{(i,j) \ne (0,0)} l'_{ij} \frac{\partial^2 \vartheta_Z^{ij}}{\partial z_2^2}(x) & \cdots & \frac{\partial \vartheta_Z^{ij}}{\partial z_2}(x) & \cdots \end{pmatrix}.$$

$(\overline{x},[l_{ij}])\in W_Z^0$ であるから，以下の行列の行列式は 0 ではない：

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2\vartheta_Z^{00}}{\partial z_1^2}(x)+\sum_{(i,j)\neq(0,0)} l'_{ij}\frac{\partial^2\vartheta_Z^{ij}}{\partial z_1^2}(x) & \frac{\partial^2\vartheta_Z^{00}}{\partial z_1\partial z_2}(x)+\sum_{(i,j)\neq(0,0)} l'_{ij}\frac{\partial^2\vartheta_Z^{ij}}{\partial z_1\partial z_2}(x) \\ \frac{\partial^2\vartheta_Z^{00}}{\partial z_1\partial z_2}(x)+\sum_{(i,j)\neq(0,0)} l'_{ij}\frac{\partial^2\vartheta_Z^{ij}}{\partial z_1\partial z_2}(x) & \frac{\partial^2\vartheta_Z^{00}}{\partial z_2^2}(x)+\sum_{(i,j)\neq(0,0)} l'_{ij}\frac{\partial^2\vartheta_Z^{ij}}{\partial z_2^2}(x) \end{pmatrix}$$

また $\vartheta_Z^{00}(x)+\sum_{(i,j)\neq(0,0)} l'_{ij}\vartheta_Z^{ij}(x)=0$ であることと，$|L_Z|$ が基点を持たないということから，$\vartheta_Z^{ij}(x)\neq 0$ となる $(i,j)\neq(0,0)$ が存在する．よって $(x,(l'_{ij}))$ は Φ の正則点であるということがわかる．さらに上の議論から解析的集合芽 $\Phi^{-1}(0)$ の多様体としての次元は $N-1$ であることもわかるから，$\dim_{(\overline{x},H)} W_Z=N-1$ がわかる．

前段落の 2 つの解析的集合芽の同一視により，接空間 $T_{(\overline{x},H)}W_Z$ は $\mathrm{Ker}(d\Phi)_{(x,(l'_{ij}))}\subset T_x\mathbb{C}^2\oplus T_{(l'_{ij})}\mathbb{C}^N$ と同一視できる．この同一視のもと，$(dp_2)_{(\overline{x},H)}$ は射影 $T_x\mathbb{C}^2\oplus T_{(l'_{ij})}\mathbb{C}^N\to T_{(l'_{ij})}\mathbb{C}^N$ の $\mathrm{Ker}(d\Phi)_{(x,(l'_{ij}))}$ への制限と一致する．$c_1\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)+c_2\left(\frac{\partial}{\partial z_2}\right)$ が $\mathrm{Ker}(d\Phi)_{(x,(l'_{ij}))}$ に含まれると仮定すると，$k=1,2$ に対し以下の等式が成立する：

$$c_1\left(\frac{\partial^2\vartheta_Z^{00}}{\partial z_1\partial z_k}(x)+\sum_{(i,j)\neq(0,0)} l'_{ij}\frac{\partial^2\vartheta_Z^{ij}}{\partial z_1\partial z_k}(x)\right)+c_2\left(\frac{\partial^2\vartheta_Z^{00}}{\partial z_2\partial z_k}(x)+\sum_{(i,j)\neq(0,0)} l'_{ij}\frac{\partial^2\vartheta_Z^{ij}}{\partial z_2\partial z_k}(x)\right)=0$$

$$\Leftrightarrow e_k\cdot\left(\frac{\partial^2\vartheta_Z^{00}}{\partial z_k\partial z_l}(x)+\sum_{(i,j)\neq(0,0)} l'_{ij}\frac{\partial^2\vartheta_Z^{ij}}{\partial z_k\partial z_l}(x)\right)_{1\leq k,l\leq 2}\cdot\begin{pmatrix} c_1\\ c_2\end{pmatrix}=0,$$

ただし e_k は $\mathbb{C}^2$ の単位ベクトルである．$\left(\frac{\partial^2\vartheta_Z^{00}}{\partial z_k\partial z_l}(x)+\sum_{(i,j)\neq(0,0)} l'_{ij}\frac{\partial^2\vartheta_Z^{ij}}{\partial z_k\partial z_l}(x)\right)_{1\leq k,l\leq 2}$ の行列式は 0 ではないから，$(c_1,c_2)=(0,0)$ となる．このことから $(dp_2)_{(\overline{x},H_{\sum l_{ij}X_{ij}})}$ は単射であるということがわかる． □

系 3.13. $(\overline{x},H)\in W_Z^0$，$P\subset(\mathbb{CP}^N)^*$ を直線とし，H を P 上の点とする．このとき T_HP が $(dp_2)_{(\overline{x},H)}(T_{(\overline{x},H)}W_Z)$ に含まれるということと，$H'\in P$ なる全ての H' が $\varphi_Z(\overline{x})$ を通るということは同値である．

証明. $H=V([l])$ とし，$l_{00}\neq 0$ であるとする．$H'=V([l'])\neq H$，$l'_{00}\neq 0$ となる $H'\in P$ をとる．P の元は全て $V([\lambda_0 l+\lambda_1 l'])$ と表せるから，$T_HP\subset(dp_2)_{(\overline{x},H)}(T_{(\overline{x},H)}W_Z)$ と $\varphi_Z(\overline{x})\in H'$ が同値であるということを示せばよい．補題 3.12 の証明と同様に，H のまわりの自然な座標近傍をとり，それを $\mathbb{C}^N$ と同一視する．このとき，

$$(dp_2)_{(\overline{x},H)}(\mathrm{Ker}(d\Phi)_{(\overline{x},H)})=\left\{\sum_{(i,j)\neq(0,0)} r_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial l_{ij}}\right)\ \middle|\ \sum_{(i,j)\neq(0,0)} r_{ij}\vartheta_Z^{ij}(x)=0\right\}$$

であった．一方 $H'=(l_{ij}+l'_{ij})$ としたとき，

$$T_HP=\left\langle\sum_{(i,j)\neq(0,0)} l'_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial l_{ij}}\right)\right\rangle$$

となるから，$T_HP\subset(dp_2)_{(\overline{x},H)}(T_{(\overline{x},H)}W_Z)$ と $\displaystyle\sum_{(i,j)\neq(0,0)} l'_{ij}\vartheta_Z^{ij}(x)=0$ は同値であるが，後者は $\varphi_Z(\overline{x})\in H'$ と同値である． □

$\mathcal{D}_Z$ の部分集合 $\mathcal{D}'_Z$ と $\mathcal{D}''_Z$ を次のように定義する．

$$\begin{aligned}\mathcal{D}'_Z =& p_2(W_Z \setminus W_Z^0),\\ \mathcal{D}''_Z =& \left\{H \in \mathcal{D}_Z \setminus \mathcal{D}'_Z \;\middle|\; \sharp(p_2^{-1}(H)) \neq 1\right\}.\end{aligned}$$

$W_Z \setminus W_Z^0$ は解析的集合で，p_2 は固有写像であるから，定理 2.8 より $\mathcal{D}'_Z$ は解析的集合である．

補題 3.14. $\mathcal{D}''_Z$ は $\mathcal{D}_Z$ の高々$N-2$ 次元の解析的部分集合に含まれる．

証明．$\dim(\mathcal{D}_Z) = N-1$ であるから，定理 2.7 より $\mathrm{sing}(\mathcal{D}_Z)$ は高々$N-2$ 次元の解析的集合である．よって $\mathcal{D}''_Z$ が $\mathrm{sing}(\mathcal{D}_Z)$ に含まれるということを示せば十分である．$H \in \mathcal{D}''_Z$ に対し，$p_2^{-1}(H)$ は W_Z^0 に含まれる．補題 3.12 より，p_2 は W_Z^0 上ではめ込みであるから，$p_2^{-1}(H)$ は有限集合であり，$\mathcal{D}_Z$ の H における解析的集合芽は，$|p_2^{-1}(H)| > 1$ の部分多様体芽の和集合となる．系 3.13 より，これらの部分多様体芽はどの 2 つも横断的に交差する．特に H は $\mathcal{D}_Z$ の特異点である． □

定理 3.15. 直線 $P \subset (\mathbb{CP}^N)^*$ に対し，次の 2 条件は同値である．

1. f_P は LP,
2. P は $\mathcal{D}'_Z \cup \mathcal{D}''_Z$ と交点を持たず，各 $(\overline{x}, H) \in p_2^{-1}(\mathcal{D}_Z \cap P)$ に対し，$(dp_2)_{(\overline{x},H)}(T_{(\overline{x},H)}W_Z) + T_H P = T_H(\mathbb{CP}^N)^*$ が成立.

証明．補題3.12 と $\mathcal{D}''_Z$ の定義より，P が $\mathcal{D}'_Z \cup \mathcal{D}''_Z$ と交点を持たないということと，f_P が Lefschetz 特異点しか持たず $f_P|_{\mathrm{Crit}(f_P)}$ が単射であるということは同値である．よって定義 2.1 の 3 つ目の条件を満たさない f_P の基点が存在するということと，$T_H P$ が $(dp_2)_{(\overline{x},H)}(T_{(\overline{x},H)}W_Z)$ に含まれるような $(\overline{x}, H) \in p_2^{-1}(\mathcal{D}_Z \cap P)$ が存在するということが同値であるということを示せばよい．

系 3.13 より，$T_H P \subset (dp_2)_{(\overline{x},H)}(T_{(\overline{x},H)}W_Z)$ であるということと，任意の $H' \in P$ に対し $\varphi_Z^{-1}(H')$ が $\overline{x}$ を含むということは同値である．よって $T_H P$ が $(dp_2)_{(\overline{x},H)}(T_{(\overline{x},H)}W_Z)$ に含まれるような $(\overline{x}, H) \in p_2^{-1}(\mathcal{D}_Z \cap P)$ が存在するとき，$\overline{x}$ は f_P の基点であり，さらに $f_P = [s_0 : s_1]$ となるように $s_0, s_1 \in L_Z$ をとったとき，$\mathcal{D}_Z$ の定義より $(ds_0)_{\overline{x}}$ と $(ds_1)_{\overline{x}}$ は一次従属である．よって補題 2.5 より f_P の基点 $\overline{x}$ は定義 2.1 の 3 つ目の条件を満たさない．

逆に f_P が定義 2.1 の 3 つ目の条件を満たさない基点を持つと仮定する．$H_{\sum l_{ij}^0 X_{ij}}$ と $H_{\sum l_{ij}^1 X_{ij}}$ を P の異なる超平面とし，$s_k = \sum l_{ij}^k \vartheta_Z^{ij}$ とする．補題 2.5 と仮定より，f_P の基点 b と $\lambda_k \in \mathbb{C}$ で，$\lambda_0(ds_0)_b + \lambda_1(ds_1)_b = 0$ を満たすものが存在する．このとき簡単な計算から $(b, \tilde{H} = H_{\sum(\lambda_0 l_{ij}^0 + \lambda_1 l_{ij}^1)X_{ij}})$ は W_Z に含まれるということがわかる．b は基点であるから，任意の $H \in P$ に対し $b \in \varphi_Z^{-1}(H)$ が成立する．よって系 3.13 より $(dp_2)_{(b,\tilde{H})}(T_{(b,\tilde{H})}W_Z)$ が成立する． □

補題 3.12 より $\mathcal{D}_Z^0 = \mathcal{D}_Z \setminus (\mathcal{D}'_Z \cup \mathcal{D}''_Z)$ は空集合か，$(\mathbb{CP}^N)^*$ の $N-1$ 次元部分多様体である．定理 3.15 より直ちに以下の系が得られる：

系 3.16. $H \in (\mathbb{CP}^N)^*$ は $\mathcal{D}_Z$ 上の点ではないとし，$\pi_H : \mathcal{D}_Z \to \mathbb{CP}^{N-1}$ を H からの射影とする．このとき $f_{\overline{\pi_H^{-1}(x)}} : T_Z \dashrightarrow \overline{\pi_H^{-1}(x)}$ が LP であることと，$\pi_H^{-1}(x) \cap (\mathcal{D}'_Z \cup \mathcal{D}''_Z) = \emptyset$ でかつ x が $\pi_H|_{\mathcal{D}_Z^0}$ の正則値であるということは同値である．

$(\mathbb{CP}^N)^*$ の直線全体の集合を $\mathcal{L}$ で表す．自然な方法で $\mathcal{L}$ はグラスマン多様体 $G_2(\mathbb{C}^{N+1})$ と同一視できる (特に $\mathcal{L}$ には複素多様体の構造が入る) ということに注意する．

系 3.17. ペンシル $f_P : T_Z \dashrightarrow P$ が定義 2.1 の 2 つ目と 3 つ目の条件を満たすと仮定する (つまり特異点や基点での局所的な様子は LP と同様であるが，$f_P|_{\mathrm{Crit}(f_P)}$ が単射とは限らないものを考える)．任意の P の開近傍 $U \subset \mathcal{L}$ に対し，$P' \in U$ で $f_{P'}$ が LP になるようなものが存在する．

証明．定理 3.15 の証明より，$P \cap \mathcal{D}'_Z = \emptyset$ で，任意の $(\overline{x}, H) \in p_2^{-1}(\mathcal{D}_Z \cap P)$ に対し以下が成立するということがわかる：

$$(dp_2)_{(\overline{x},H)}(T_{(\overline{x},H)}W_Z) + T_H P = T_H(\mathbb{CP}^N)^*.$$

$\mathcal{D}_Z$ に含まれない点 $H \in P$ を一つとる．$H' \in P \setminus \{H\}$ とし，$\pi_H(H')$ の開近傍 $V \subset \mathbb{CP}^{N-1}$ を，任意の $y \in V$ に対し $\overline{\pi_H^{-1}(y)}$ が U に含まれるようにとる．$\pi_H(\mathcal{D}'_Z)$ と $\pi_H(\mathrm{sing}(\mathcal{D}_Z))$ はともに解析的集合であり，補題 3.14 より $\pi_H(\mathrm{sing}(\mathcal{D}_Z))$ の次元は高々$N-2$ である．よって正則写像に関する Sard の定理 ([6, Corollary V.1.2]) より，$\pi_H(\mathcal{D}'_Z \cup \mathcal{D}''_Z)$ に含まれない $y' \in V$ で，$\pi_H|_{\mathcal{D}_Z^0}$ の正則値となるものが存在する．このとき系 3.16 より，$f_{\overline{\pi_H^{-1}(y')}}$ は LP であるということがわかる．□

3.4. 2 つの LP の間の道の存在

以下 $d_1|d_2$，$d_1 d_2 \geq 3$ と仮定する．定理 3.1 より divisibility が d_1 で種数が $d_1 d_2 + 1$ の任意の正則な LP f に対し，$Z \in \mathfrak{H}_2$ と $P \subset \mathcal{L}$ が存在し，f は $f_P : T_Z \dashrightarrow P$ と同型である．この節では，そのような 2 つの LP に対応する $\mathfrak{H}_2 \times \mathcal{L}$ の 2 点を結ぶ道をとることを考える．

補題 3.18. $f_P : T_Z \dashrightarrow P$ が LP となるような $(Z, P) \in \mathfrak{H}_2 \times \mathcal{L}$ 全体は開集合である．

証明．$S_2(\mathbb{C}^{N+1}) \subset (\mathbb{C}^{N+1})^2$ を $\mathbb{C}^{N+1}$ 内の $\mathbb{C}$ 上独立なベクトルの対全体とする (つまり $S_2(\mathbb{C}^{N+1})$ は Stiefel 多様体)．商写像 $\pi : S_2(\mathbb{C}^{N+1}) \to \mathcal{L}$ は開写像であるから，

$$\left\{ (Z, (v_0, v_1)) \in \mathfrak{H}_2 \times S_2(\mathbb{C}^{N+1}) \;\middle|\; (Z, \pi(v_0, v_1)) \text{ は LP を与える} \right\}$$

が開集合であることを示せばよい．

$(Z, (v_0, v_1)) \in \mathfrak{H}_2 \times S_2(\mathbb{C}^{N+1})$ に対し，微分同相写像 $\phi_{v_0,v_1} : \mathbb{CP}^1 \to \pi(v_0, v_1)$，$\psi_Z : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{C}^2$ を次のように定義する：

$$\begin{aligned} \phi_{v_0,v_1}([l_0 : l_1]) &= H_{\sum(l_0 v_0^{ij} + l_1 v_1^{ij})X_{ij}}, \\ \psi_Z(x) &= (Z, D)x, \end{aligned}$$

ただし $v_k = (\ldots, v_k^{ij}, \ldots)$，$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$ とする．補題 3.12 より，$f_{\pi(v_0,v_1)}(\psi_Z(x)) = \phi_{v_0,v_1}([l_0 : l_1])$ で $\psi_Z(x)$ が Lefschetz 特異点となることと，次の 3 つの条件が全て成立することは同値である：

$$\begin{aligned} &\sum_{i,j} (l_0 v_0^{ij} + l_1 v_1^{ij}) \vartheta_Z^{ij}(\psi_Z(x)) = 0, \\ &\sum_{i,j} (l_0 v_0^{ij} + l_1 v_1^{ij}) \frac{\partial \vartheta_Z^{ij}}{\partial z_k}(\psi_Z(x)) = 0 \ \ (k = 1, 2), \\ &\det \left(\left(\sum_{i,j} (l_0 v_0^{ij} + l_1 v_1^{ij}) \frac{\partial^2 \vartheta_Z^{ij}}{\partial z_k \partial z_l}(\psi_Z(x)) \right)_{1 \leq k,l \leq 2} \right) \neq 0. \end{aligned}$$

さらに系 3.13 より次の 2 条件は同値である：

- $T_{\phi_{v_0,v_1}([l_0:l_1])}\pi(v_0,v_1)$ が $(dp_2)_{(\overline{\psi_Z(x)},\phi_{v_0,v_1}([l_0:l_1]))}(T_{(\overline{\psi_Z(x)},\phi_{v_0,v_1}([l_0:l_1]))}W_Z)$ に含まれており，$(\psi_Z(x),\pi(v_0,v_1))$ が W_Z^0 に含まれる．
- $(Z,(v_0,v_1))$ が上の 3 つの条件を満たし，$\sum_{i,j} v_k^{ij}\vartheta_Z^{ij}(\psi_Z(x))=0$ が $k=0,1$ に対して成立．

可微分写像 $\Phi(Z,(v_0,v_1)):\mathbb{R}^4\times\mathbb{CP}^1\to\mathbb{C}^6$ を次のように定義する：

$$\Phi(Z,(v_0,v_1))(x,[l_0:l_1])=$$

$$\Bigg(\sum_{i,j}(l_0v_0^{ij}+l_1v_1^{ij})\vartheta_Z^{ij}(\psi_Z(x)),\sum_{i,j}(l_0v_0^{ij}+l_1v_1^{ij})\frac{\partial\vartheta_Z^{ij}}{\partial z_1}(\psi_Z(x)),\sum_{i,j}(l_0v_0^{ij}+l_1v_1^{ij})\frac{\partial\vartheta_Z^{ij}}{\partial z_2}(\psi_Z(x)),$$

$$\det\left(\left(\sum_{i,j}(l_0v_0^{ij}+l_1v_1^{ij})\frac{\partial^2\vartheta_Z^{ij}}{\partial z_k\partial z_l}(\psi_Z(x))\right)_{1\le k,l\le 2}\right),\sum_{i,j}v_0^{ij}\vartheta_Z^{ij}(\psi_Z(x)),\sum_{i,j}v_1^{ij}\vartheta_Z^{ij}(\psi_Z(x))\Bigg).$$

$V_1=\{0\}\times\{0\}\times\mathbb{C}^2$，$V_2=\{0\}\times\mathbb{C}\times\{0\}\subset\mathbb{C}^3\times\mathbb{C}\times\mathbb{C}^2=\mathbb{C}^6$ とし，$\Delta=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4\mid |x_i|\le 1/2\}$ とする．関数 ϑ_Z^{ij} の二重周期性 ([5, §.3.2] 参照) より，$f_{\pi(v_0,v_1)}:T_Z\dashrightarrow\pi(v_0,v_1)$ が定義 2.1 の条件 2 と 3 を満たすということと，$\Phi(Z,(v_0,v_1))(\Delta\times\mathbb{CP}^1)\cap(V_1\cup V_2)$ が空集合となることは同値である．

V_1，V_2 は $\mathbb{C}^6$ の閉集合であり，$\Delta\times\mathbb{CP}^1$ はコンパクトであるから，$\mathfrak{H}_2\times S_2(\mathbb{C}^{N+1})$ の部分集合

$$W_0=\left\{(Z,(v_0,v_1))\in\mathfrak{H}_2\times S_2(\mathbb{C}^{N+1})\mid\Phi(Z,(v_0,v_1))(\Delta\times\mathbb{CP}^1)\cap(V_1\cup V_2)=\emptyset\right\}$$

は開集合である [6]．

$(Z,(v_0,v_1))\in W_0$ を一つとり，$f_{\pi(v_0,v_1)}:T_Z\dashrightarrow\pi(v_0,v_1)$ が LP であるとし、$\{y_1,\dots,y_n\}=\phi_{v_0,v_1}^{-1}(f_{\pi(v_0,v_1)}(\mathrm{Crit}(f_{\pi(v_0,v_1)})))$ とする．ここで $n=6d_1d_2$ は $f_{\pi(v_0,v_1)}$ の臨界点の個数である．各 $i\in\{1,\dots,n\}$ に対し，y_i の円板近傍 $D_i\subset\mathbb{CP}^1$ を，$D_i\cap D_j=\emptyset$ $(i\ne j)$ となるようにとる．$f_{\pi(v_0,v_1)}$ は定義 2.1 の 3 つ目の条件を満たすから，補題 2.5 より $x\in\Delta$ が $f_{\pi(v_0,v_1)}$ の基点を代表するとき，$d(\sum v_0^{ij}\vartheta_Z^{ij})_x$ と $d(\sum v_1^{ij}\vartheta_Z^{ij})_x$ は一次独立である．よって特にこのとき $\Phi(Z,(v_0,v_1))(x,[l_0:l_1])\subset\mathbb{C}^6$ の最初の 3 成分が同時に 0 となるような $[l_0:l_1]$ は存在しない．故に $\Phi(Z,(v_0,v_1))(x,[l_0:l_1])$ の最初の 3 成分が 0 となるのは x が $f_{\pi(v_0,v_1)}$ の臨界点を代表するときに限る．$\Delta\times(\mathbb{CP}^1\setminus\sqcup_i D_i)$ はコンパクトであるから，$(Z,(v_0,v_1))$ の開近傍 $U\subset W_0$ で，任意の $(Z',(v_0',v_1'))\in U$ と $(x,[l_0:l_1])\in\Delta\times(\mathbb{CP}^1\setminus\sqcup_i D_i)$ に対し $\Phi(Z',(v_0',v_1'))(x,[l_0:l_1])$ の最初の 3 成分が 0 とならない，つまり $f_{\pi(v_0',v_1')}:T_{Z'}\dashrightarrow\pi(v_0',v_1')$ の臨界値が全て $\sqcup_i D_i$ に含まれるようなものが存在する．

ここで以下の補題を示しておく．

補題 3.19. $\overline{x}\in T_Z$ を $f_{\pi(v_0,v_1)}$ の基点とする．このとき $(Z,(v_0,v_1))$ の開近傍 $U'\subset U$，$x\in\mathbb{C}^2$ の開近傍 V，$0\in\mathbb{C}^2$ の開近傍 W と，可微分写像 $\xi:U'\times W\to V$ で，$(Z',(v_0',v_1'))\in U'$，$y\in V$ に対し以下を満たすものが存在する．

$$\xi\left((Z',(v_0',v_1')),\sum_{i,j}v_0'^{ij}\vartheta_{Z'}^{ij}(\psi_{Z'}(y)),\sum_{i,j}v_1'^{ij}\vartheta_{Z'}^{ij}(\psi_{Z'}(y))\right)=y.$$

[6] 一般に位相空間 X,Y,K に対し，$f:X\times K\to Y$ が連続，K がコンパクト，$F\subset Y$ が閉集合とすると，X の部分集合 $\{x\in X\mid f(\{x\}\times K)\cap F=\emptyset\}$ は開集合である．

補題 *3.19* の証明. $\overline{x}$ は $f_{\pi(v_0,v_1)}$ の基点であるから，以下の写像は $((Z,(v_0,v_1)),x)$ において局所微分同相である：

$$U\times\mathbb{C}^2\to U\times\mathbb{C}^2,\ ((Z',(v_0',v_1')),y)\mapsto\left((Z',(v_0',v_1')),\sum_{i,j}v_0'^{ij}\vartheta_{Z'}^{ij}(\psi_{Z'}(y)),\sum_{i,j}v_1'^{ij}\vartheta_{Z'}^{ij}(\psi_{Z'}(y))\right).$$

この微分同相の逆写像と射影の合成を η とすればよい. □

補題 3.18 の証明の続きを行う. 補題 3.19 より，$(Z,(v_0,v_1))$ の開近傍 $U'\subset U$ と，$f_{\pi(v_0,v_1)}$ の基点 $\overline{x}$ のまわりの ($y\in U'$ に依存する) 座標近傍 (W,φ_y) で，$(Z',(w_0,w_1))\in U'$ に対し以下を満たすものが存在する：

$$f_{\pi(w_0,w_1)}\circ\varphi_{(Z',(w_0,w_1))}(z_0,z_1)=[z_0:z_1],$$

ただし上の $f_{\pi(w_0,w_1)}$ は $T_{Z'}$ 上のペンシルである.

以下の可微分写像 ζ を考える：

$$\zeta:U'\times\mathbb{R}^4/\mathbb{Z}^4\dashrightarrow U'\times\mathbb{CP}^1,\ \zeta((Z',(w_0,w_1)),\overline{x})=\left((Z',(w_0,w_1)),f_{\pi(w_0,w_1)}(\overline{\psi_{Z'}(x)})\right).$$

上の座標近傍がとれるという事実から，ζ が定義されない点全体の集合は，$U'\times\mathbb{R}^4/\mathbb{Z}^4$ の実余次元 4 の部分多様体となることがわかる. さらに上の座標近傍を用いることにより，$U'\times\mathbb{R}^4/\mathbb{Z}^4$ の，この部分多様体に沿うブローアップをとることができ，可微分写像 ζ はその多様体上に自然に拡張される. この拡張された写像を $\tilde{\zeta}$ とする. 必要なら U' を十分小さくとり直し，U' は弧状連結であると仮定する. γ_i を，$f_{\pi(v_0,v_1)}$ の正則値 y_0 と y_i を結ぶ道と，∂D_i をつなげて得られる道とし，これらは $\{(Z,(v_0,v_1))\}\times\mathbb{CP}^1$ に含まれているとみなす. $(Z',(w_0,w_1))\in U'$ に対し $((Z,(v_0,v_1)),x)$ と $((Z',(w_0,w_1)),x)$ を結ぶ道 α を，第 2 成分が一定になるようにとり，γ_i' を γ_i の前後に α をつなげて得られる道とする. このとき γ_i' と γ_i はホモトピックであるから，これらの道に沿う $\tilde{\zeta}$ のモノドロミーは一致する. よって，$\gamma_i\subset\mathbb{CP}^1$ に沿う $f_{\pi(v_0,v_1)}$ のモノドロミーと同じ道に沿う $f_{\pi(w_0,w_1)}$ のモノドロミーは (共役の差を除いて) 一致する. 特に $f_{\pi(w_0,w_1)}^{-1}(D_i)$ は $f_{\pi(w_0,w_1)}$ の臨界点を少なくとも一つ含む. $f_{\pi(w_0,w_1)}$ の種数は $g=d_1d_2+1$ で $b=2d_1d_2$ 個の基点を持つから，$0=\chi(T_{Z'})$ は $4-4g+n'-b=n'-6d_1d_2$ と等しくなければならない. ここで n' は $f_{\pi(v_0',v_1')}$ の臨界点の個数である. 故に $n=n'$ であるから各 i に対し $f_{\pi(w_0,w_1)}^{-1}(D_i)$ は臨界点を唯一つ含むということがわかる. よって $f_{\pi(w_0,w_1)}|_{\mathrm{Crit}(f_{\pi(w_0,w_1)})}$ は単射であるから，LP となる. $(Z',(w_0,w_1))\in U'$ は任意にとっていたので，これで補題 3.18 の主張が従う. □

補題 3.18 の証明から以下の系が従うということに注意しておく.

系 3.20. $(Z_0,P_0),(Z_1,P_1)\in\{(Z,P)\in\mathfrak{H}_2\times\mathcal{L}\mid f_P:T_Z\dashrightarrow P\text{ は LP}\}$ がこの集合の同じ連結成分に含まれるとき，f_{P_0} と f_{P_1} のモノドロミー分解は Hurwitz 同値となる.

補題 3.21. 解析的集合 $\mathcal{D}_Z'\subset\mathcal{D}_Z$ の次元が $N-2$ 以下であると仮定する. このとき，集合

$$\mathcal{L}_Z^0=\{P\in\mathcal{L}\mid f_P:T_Z\dashrightarrow P\text{ は LP}\}$$

は空でない弧状連結な集合である.

Proof. $H \in (\mathbb{CP}^N)^* \setminus \mathcal{D}_Z$ を一つとる．仮定より $\pi_H(\mathcal{D}'_Z \cup \mathcal{D}''_Z)$ は $N-2$ 次元以下の解析的集合に含まれる．さらに Sard の定理より，$\pi_H|_{\mathcal{D}^0_Z}$ の臨界値集合は $\mathbb{CP}^{N-1}$ の可算個の $N-2$ 次元以下の部分多様体の和集合に含まれる．よって $\pi_H(\mathcal{D}'_Z \cup \mathcal{D}''_Z \cup \mathrm{Crit}(\pi_H|_{\mathcal{D}^0_Z}))$ も $\mathbb{CP}^{N-1}$ の可算個の $N-2$ 次元以下の部分多様体の和集合に含まれる．特に $\pi_H(\mathcal{D}'_Z \cup \mathcal{D}''_Z \cup \mathrm{Crit}(\pi_H|_{\mathcal{D}^0_Z}))$ に含まれない点 $x \in \mathbb{CP}^{N-1}$ が存在する．系 3.16 より $\overline{\pi_H^{-1}(x)}$ は $\mathcal{L}^0_Z$ に含まれるので，$\mathcal{L}^0_Z \neq \emptyset$ がわかる．

$P_0, P_1 \in \mathcal{L}^0_Z$ とし，超平面 $H_0, H'_0 \in P_0$ を $\mathcal{D}_Z$ に含まれないようにとる．系 3.16 より $\pi_{H_0}(H'_0)$ は $\pi_{H_0}(\mathcal{D}'_Z \cup \mathcal{D}''_Z \cup \mathrm{Crit}(\pi_{H_0}|_{\mathcal{D}^0_Z}))$ に含まれないので，H'_0 の開近傍 $U_0 \subset (\mathbb{CP}^N)^*$ で，$\mathcal{D}_Z$ と交わらず $\pi_{H_0}(U_0) \cap \pi_{H_0}(\mathcal{D}'_Z \cup \mathcal{D}''_Z \cup \mathrm{Crit}(\pi_{H_0}|_{\mathcal{D}^0_Z})) = \emptyset$ となるものが存在する．超平面 $H_1 \in P_1 \setminus \mathcal{D}_Z$ を一つとる．π_{H_1} は開写像であるから，$\pi_{H_1}(U_0)$ は $\mathbb{CP}^{N-1}$ の開集合である．特に $\pi_{H_1}(U_0) \setminus (\pi_{H_1}(\mathcal{D}'_Z \cup \mathcal{D}''_Z \cup \mathrm{Crit}(\pi_{H_1}|_{\mathcal{D}^0_Z})))$ は空ではない．この集合の中から点 x'_1 を一つとり，$P'_1 = \overline{\pi_{H_1}^{-1}(x'_1)}$ とする．横断性定理 (例えば [3, Theorem 4.9] 参照) より，$\mathbb{CP}^{N-1}$ 内の $x_1 \in \pi_{H_1}(P_1)$ と x'_1 を結ぶ道で，$\pi_{H_1}(\mathcal{D}'_Z \cup \mathcal{D}''_Z \cup \mathrm{Crit}(\pi_{H_1}|_{\mathcal{D}^0_Z}))$ と交わらないものが取れる．この道の逆像を考えることにより，$\mathcal{L}^0_Z$ 内の P_1 と P'_1 の間の道がとれる．超平面 $H'_1 \in P'_1 \cap U_0$ を一つとり，H_0 と H'_1 を通る $(\mathbb{CP}^N)^*$ 内の直線を P''_1 とする．$f_{P''_1}$ は LP であるから，$\pi_{H'_1}(P''_1 \setminus \{H'_1\})$ は $\pi_{H'_1}(\mathcal{D}'_Z \cup \mathcal{D}''_Z \cup \mathrm{Crit}(\pi_{H'_1}|_{\mathcal{D}^0_Z}))$ と交わらない．よって $\mathcal{L}^0_Z$ 内の P'_1 と P''_1 を結ぶ道を，上と同様の方法でとることができる．$\pi_{H_0}(P''_1 \setminus \{H_0\})$ は $\pi_{H_0}(\mathcal{D}'_Z \cup \mathcal{D}''_Z \cup \mathrm{Crit}(\pi_{H_0}|_{\mathcal{D}^0_Z}))$ と交わらないから，$\mathcal{L}^0_Z$ 内の P''_1 と P_0 を結ぶ道がとれ，これまでにとった道を全てつなげることで，P_0 と P_1 を結ぶ道を取ることができる． □

補題 3.22. 以下の (d_1, d_2) に関する条件 $(*)$ が成り立つと仮定する：

$(*)$ $\{Z \in \mathfrak{H}_2 \mid \dim(\mathcal{D}'_Z) < N-1\}$ は正の余次元を持つ解析的集合の可算和に含まれる．

このとき $\mathcal{K} = \{(Z, P) \in \mathfrak{H}_2 \times \mathcal{L} \mid f_P : T_Z \dashrightarrow P \text{ は LP}\}$ は弧状連結である．

証明．$(Z_i, P_i) \in \mathcal{K}$ $(i = 0, 1)$ をとる．横断性定理，仮定，補題 3.5 より，以下の条件を満たす道 $\beta : [0,1] \to \mathfrak{H}_2$ をとることができる：

- $\beta(i) = Z_i$ $(i = 0, 1)$,
- $t \in (0,1)$ のとき $\dim(\mathcal{D}_{\beta(t)}) < N-1$,
- $t \in (0,1)$ のとき $\mathrm{NS}(T_{\beta(t)})$ は無限巡回群.

このとき上の 3 つ目の条件から $T_{\beta(t)}$ は楕円曲線の直積には分裂せず，$S_0 \subset T_{\beta(t)}$ の次元は 0 となるということがわかる．

補題 3.18 より正数 $\varepsilon > 0$ で，任意の $t \in [0, \varepsilon]$ に対し $f_{P_0} : Z_t \dashrightarrow P_0$ と $f_{P_1} : Z_{1-t} \dashrightarrow P_1$ がともに LP となるものが存在する．これより次の条件を満たす道 $\gamma : [t_0, t_1] \to \mathcal{K}$ が存在するということを証明する：

1. $\gamma_2(t_0) = P_0$,
2. 単調非減少関数 $\delta : [t_0, t_1] \to [\varepsilon, 1-\varepsilon]$ で，$\delta(t_0) = \varepsilon$ であり，任意の $t \in [t_0, t_1]$ に対し $\gamma_1(t) = \beta(\delta(t))$ となるものが存在する,
3. $\delta(t_1) = 1 - \varepsilon$，$\gamma_2(t_1) = P_1$.

ただし $\gamma_i(t)$ は $\gamma(t)$ の第 i 成分である．このような道の存在を示すために $T \leq 1 - \varepsilon$ を以下で定義する：

$$T = \sup\left\{ t \leq 1-\varepsilon \;\middle|\; {}^{\exists}\gamma : [t_0, t_1] \to \mathcal{L} \text{ s.t. } \gamma \text{が条件 (1)，(2) を満たし}, \gamma_1(t_1) = \beta(t) \right\}.$$

このとき $T=1-\varepsilon$ である．以下でまずそれを背理法で示す．T が $1-\varepsilon$ より真に小さいと仮定する．補題 3.21 より，$P\in\mathcal{L}$ で $(\beta(T),P)\in\mathcal{K}$ となるものが存在する．次に補題 3.18 より，$\varepsilon'>0$ で任意の $t\in[T-\varepsilon',T+\varepsilon']$ に対し $(\beta(t),P)\in\mathcal{K}$ となるものが存在する．T の定義より，道 $\gamma:[t_0,t_1]\to\mathcal{K}$ と $s\in(T-\varepsilon',T]$ で，γ が上の条件 (1) と (2) を満たし，$\gamma_1(t_1)=\beta(s)$ となるものが存在する．補題 3.21 より $\mathcal{L}^0_{\beta(s)}$ 内の道で，$\gamma_2(s)$ と P を結ぶものがとれる．この道を用いて γ の拡張 $\widetilde{\gamma}$ で，$\widetilde{\gamma}$ は条件 (1)，(2) を満たし，$\widetilde{\gamma}(t_1)=T+\varepsilon'$ となるものがとれるが，これは T の定義に反する．以上より $T=1-\varepsilon$ がわかる．この結果を用いると上と同様の方法で，条件 (1)，(2)，(3) を満たす γ をとることができる．この γ の前と後ろにそれぞれ $(\beta(t),P_0)$，$(\beta(t),P_1)$ をつなげることで，(Z_0,P_0) と (Z_1,P_1) を結ぶ道をとることができる． □

定理 3.23. 補題 3.22 の条件 $(*)$ が満たされるとき，T^4 上の種数が d_1d_2+1，divisibility が d_1 の正則 LP は全て同型である．

証明．系 3.20，補題 3.22 と，モノドロミー分解が Hurwitz 同値である LP は同型であるということ ([1] で示されている) から直ちに従う． □

最後に，定理 1.1 は以下の定理 3.23 と以下の 2 つの補題から従う．

補題 3.24. $d_1d_2\geq 5$ のとき補題 3.22 内の条件 $(*)$ は成立する．

Proof. 補題 3.6 より、L_Z がとても豊富ではないような $Z\in\mathfrak{H}_2$ は，余次元が正の解析的集合の可算和に含まれる．よって主張を示すためには，L_Z がとても豊富であるとき $\mathcal{D}'_Z$ の次元が $N-2$ 以下であるということを示せばよい．

以下，L_Z はとても豊富であると仮定する．まず任意の $(\overline{x},H_{\sum l_{ij}X_{ij}})\in W_Z$ に対し，その点における微分 $(d\Phi)_{(x,(\dots,l'_{ij},\dots))}$ が全射であるということを示す．ただし $\Phi:\mathbb{C}^2\times\mathbb{C}^N\to\mathbb{C}^3$ は補題 3.12 の証明で定義した写像である．$(d\Phi)_{(x,(\dots,l'_{ij},\dots))}$ が全射ではないと仮定すると，以下の行列の階数は 2 以下である：

$$\begin{pmatrix}\vartheta^{01}_Z(x) & \cdots & \vartheta^{ij}_Z(x) & \cdots\\ \frac{\partial\vartheta^{01}_Z}{\partial z_1}(x) & \cdots & \frac{\partial\vartheta^{ij}_Z}{\partial z_1}(x) & \cdots\\ \frac{\partial\vartheta^{01}_Z}{\partial z_2}(x) & \cdots & \frac{\partial\vartheta^{ij}_Z}{\partial z_2}(x) & \cdots\end{pmatrix}$$

このとき $(c_1,c_2)\neq(0,0)$ なる $k,c_1,c_2\in\mathbb{C}$ で，任意の $(i,j)\neq(0,0)$ に対し以下の等式を満たすものが存在する：

$$k\vartheta^{ij}_Z(x)=c_1\frac{\partial\vartheta^{ij}_Z}{\partial z_1}(x)+c_2\frac{\partial\vartheta^{ij}_Z}{\partial z_2}(x).$$

$(\overline{x},H_{\sum l_{ij}X_{ij}})$ は W_Z に含まれているから，$\vartheta^{00}_Z(x)+\sum_{(i,j)\neq(0,0)}l'_{ij}\vartheta^{ij}_Z(x)=0$ である．また $\vartheta^{ij}_Z(x)$ が全て同時に 0 になることはないので，$\vartheta^{ij}_Z(x)\neq 0$ なる $(i,j)\neq(0,0)$ が存在する．簡単のため $\vartheta^{01}_Z(x)\neq 0$ とする．このとき適当な局所座標のもと，$\varphi_Z:T_Z\to\mathbb{CP}^N$ は以下の表示を持つ：

$$x\mapsto\left(\frac{\vartheta^{00}_Z(x)}{\vartheta^{01}_Z(x)},\dots,\frac{\vartheta^{ij}_Z(x)}{\vartheta^{01}_Z(x)},\dots\right).$$

仮定よりこの写像の微分は $c_1\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)+c_2\left(\frac{\partial}{\partial z_2}\right)$ を 0 に写す．特に φ_Z は埋め込みにならないので，仮定に反する．よって $(d\Phi)_{(x,(\dots,l'_{ij},\dots))}$ は全射であるということがわかった．

上の考察から W_Z は $N-1$ 次元多様体で，接空間 $T_{(\overline{x},H)}W_Z$ は $\mathrm{Ker}((d\Phi)_{(x,(\dots,l'_{ij},\dots))})$ と同一視される．補題 3.12 の証明と同様の方法で，$p_2:W_Z\to(\mathbb{CP}^N)^*$ が $(\overline{x},H)$ においてはめ込みで

あることと，$(\overline{x}, H) \in W_Z^0$ が同値であるということを示すことができる．$\mathcal{D}_Z$ の次元は $N-1$ であるから，W_Z^0 は空ではなく，$W_Z \setminus W_Z^0$ は W_Z より真に小さい解析的集合である．W_Z は多様体であるから特に既約であるので，$W_Z \setminus W_Z^0$ の次元は $N-2$ 以下である．p_2 は固有写像であるから，定理 2.8 より $\mathcal{D}'_Z$ の次元も $N-2$ 以下となる． □

補題 3.25. $(d_1, d_2) = (2, 2)$ のとき，条件 $(*)$ は成立する．

証明．$Z \in \mathfrak{H}_2$ に対し，$(2, 2)$ 型の偏極つきのアーベル曲面 (T_Z, H_Z) は，$(T_{Z'}, 2H_{Z'})$ と同型である．ただし，$Z' = Z/2 \in \mathfrak{H}_2$ で，$(T_{Z'}, H_{Z'})$ は $(1, 1)$ 型の偏極つきのアーベル曲面である．以下，T_Z は楕円曲線の直積ではないとする (補題 3.4 より生成的な $Z \in \mathfrak{H}_2$ に対しこの仮定は満たされるということに注意する)．このとき $T_{Z'}$ も楕円曲線の直積にはならない．$-1 \in \mathbb{Z}$ の $\mathbb{C}^2$ への作用は格子 Λ_Z を保つので，-1 は T_Z にも作用する．この作用で T_Z を割って得られる解析的集合を K_Z とする．直線束 $L_{Z'}$ は ([5, §.4.6] の意味で) 対称であるから，次の図式を可換にする埋め込み $\psi_Z : K_Z \to (\mathbb{CP}^3)^*$ が存在する ([5, §.4.8] 参照)：

$$\begin{tikzcd} T_Z \arrow[r, "\varphi_Z"] \arrow[d, "\pi"'] & (\mathbb{CP}^3)^* \\ K_Z \arrow[ur, "\psi_Z"'] & \end{tikzcd},$$

ただし $\pi : T_Z \to K_Z$ は商写像である．特に，$R_0 = \{x \in T_Z \mid \operatorname{rank}((d\varphi_Z)_x) = 0\}$ は K_Z の特異点の π による逆像 (つまり $(\Lambda_Z/2)/\Lambda_Z \subset T_Z$) となり，$R_2 = T_Z \setminus R_0$ である．

$\overline{x} \in R_0$ に対し，$p_1^{-1}(\overline{x})$ は $\{\overline{x}\} \times (\mathbb{CP}^N)^*$ 内の超平面である．さらに [5, Theorem 4.8.1] の証明から以下の写像は同型であるということがわかる：

$$S^2(T_x\mathbb{C}^2) \to \operatorname{Hom}(\varphi_Z(\overline{x}), \mathbb{C}),\ \sum a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j} \mapsto \left(\varphi_Z(\overline{x}) \ni \vartheta \mapsto a_{ij} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z_i \partial z_j}(x) \in \mathbb{C} \right),$$

ただし $S^2(T_x\mathbb{C}^2)$ は $T_x\mathbb{C}^2$ の対称積であり，$\Gamma(L_Z)$ の基底 $\{\vartheta_Z^{ij}\}$ を用いて $\varphi_Z(\overline{x}) \in (\mathbb{CP}^N)^*$ を $\Gamma(L_Z)$ 内の超平面とみなしている．この写像による $\frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j}$ の像を $s_{ij} \in \operatorname{Hom}(\varphi_Z(\overline{x}), \mathbb{C})$ とする．このとき $\{s_{11}, s_{12}, s_{22}\}$ は $\operatorname{Hom}(\varphi_Z(\overline{x}), \mathbb{C})$ の基底となる．特にこの基底の双対基底 $\{s_{11}^*, s_{12}^*, s_{22}^*\}$ をとることができる．$\vartheta_0 = s_{11}^* + s_{22}^* \in \varphi_Z(\overline{x}) \subset \Gamma(L_Z)$ とすると，$\frac{\partial^2 \vartheta_0}{\partial z_i \partial z_j}(x) = \delta_{ij}$ となり，特に $(\overline{x}, \vartheta_0) \in W_Z^0 \cap p_1^{-1}(\overline{x})$ がわかる．$p_1^{-1}(\overline{x})$ は既約な解析的集合であるから，解析的集合 $(W_Z \setminus W_Z^0) \cap p_1^{-1}(\overline{x})$ の次元は高々$N-2$ となる．定理 2.8 より，$\mathcal{D}'_Z \cap p_2(p_1^{-1}(\overline{x})) \subset p_2((W_Z \setminus W_Z^0) \cap p_1^{-1}(\overline{x}))$ の次元も高々$N-2$ となる．

$p_1^{-1}(R_2) \subset W_Z$ は $N-1$ 次元の多様体である．$p_2(p_1^{-1}(R_2))$ の次元[7] が $N-2$ 以下であるとすると，$p_2(p_1^{-1}(R_2)) \cap \mathcal{D}'_Z$ の次元も $N-2$ 以下になる．よってこのとき $\mathcal{D}'_Z = (p_2(p_1^{-1}(R_0)) \cap \mathcal{D}'_Z) \cup (p_2(p_1^{-1}(R_2)) \cap \mathcal{D}'_Z)$ の次元も $N-2$ 以下となる．$p_2(p_1^{-1}(R_2))$ の次元が $N-1$ であるとする．補題 3.24 の証明と同様の方法で，$p_1^{-1}(R_2) \cap (W_Z \setminus W_Z^0)$ は制限 $p_2 : p_1^{-1}(R_2) \to \mathcal{D}_Z$ がはめ込みにならない点全体と一致するということを証明することができる．特に $p_1^{-1}(R_2) \cap W_Z^0 \neq \emptyset$ である．$p_1^{-1}(R_2)$ は多様体であり，$p_1^{-1}(R_2) \cap (W_Z \setminus W_Z^0)$ は解析的集合であるから，$p_1^{-1}(R_2) \cap (W_Z \setminus W_Z^0)$ の次元は $N-2$ 以下である．よって $W_Z \setminus W_Z^0 = (p_1^{-1}(R_0) \cap (W_Z \setminus W_Z^0)) \cup (p_1^{-1}(R_2) \cap (W_Z \setminus W_Z^0))$ の次元は $N-2$ 以下であるから，定理 2.8 より $\mathcal{D}'_Z$ の次元も $N-2$ 以下である． □

[7]本稿では解析的集合に対してしか次元を定義していないが，より一般に多様体の部分集合に対して次元が定義できる．詳しくは [6] 参照．

参考文献

[1] R. İ. Baykur and K. Hayano, *Hurwitz equivalence for Lefschetz fibrations and their multisections*, preprint, available at `http://arxiv.org/abs/1504.03051`.

[2] E. M. Chirka, *Complex analytic sets*, Mathematics and its Applications (Soviet Series), **46**(1989), xx+372.

[3] M. Golubitsky and V. Guillemin, *Stable mappings and their singularities*, Graduate Texts in Mathematics, **14**, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1973, x+209.

[4] P. Griffiths and J. Harris, *Principles of algebraic geometry*, Pure and Applied Mathematics, Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 1978, xii+813.

[5] H. Lange and Ch. Birkenhake, *Complex abelian varieties*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], **302**, Springer-Verlag, Berlin, 1992, viii+435.

[6] S. Łojasiewicz, *Introduction to complex analytic geometry*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1991, xiv+523.

[7] C. Voisin, *Hodge theory and complex algebraic geometry. II*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **77**, Translated from the French by Leila Schneps, Cambridge University Press, Cambridge, 2003, x+351.