

Heegaard Floer 理論と Dehn surgery 概観

山田 裕一 Yuichi YAMADA (電気通信大学) *

2017年1月

概要

このノートは、研究集会「微分トポロジー17」の参考資料とするために、P. Ozsváth and Z. Szabó による2つの論文 [OS(int)], [OS(rat)] (それぞれ論文タイトルの integral 整係数, rational 有理係数, surgery の意味) の一部を、手計算を交え、私見を加えて解説を試みたものである。

This particle is written down for the Workshop “Differential Topology 17” (March 2017, UEC Tokyo). Mainly based on two papers [OS(int)], [OS(rat)] by P. Ozsváth and Z. Szabó.

目次

1	境界付4次元多様体の要	1
2	Spin 構造と Spin ^c 構造	3
3	レンズ空間の場合	5
4	Correction term (<i>d</i> -invariant)	9
5	Heegaard Floer Homology と デーン手術	9
6	簡単な計算例	15
7	L-space (Seifert manifold の場合)	21
8	knot 不変量について少々	22

1 境界付4次元多様体の要

境界付4次元多様体のコホモロジーで最も重要な写像は

$$\longrightarrow H^1(\partial X) \longrightarrow H^2(X, \partial X) \xrightarrow{Q} H^2(X) \longrightarrow H^2(\partial X) \longrightarrow$$

の Q であろう。これは交叉形式 \cdot に一致するが、注意が必要である。

カップ積は $H^2(X) \otimes H^2(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ ではなく $H^2(X, \partial X) \otimes H^2(X, \partial X) \rightarrow \mathbb{Z}$ あるいは

*The author was supported by KAKENHI (Grant-in-Aid for Scientific Research) No. 16K05143

$$H^2(X) \otimes H^2(X, \partial X) \rightarrow \mathbb{Z} \quad (\cong H^4(X, \partial X))$$

である。一方、ホモロジーの交叉形式は $H_2(X) \otimes H_2(X, \partial X) \rightarrow \mathbb{Z}$ あるいは

$$H_2(X) \otimes H_2(X) \rightarrow \mathbb{Z}$$

で定義される。ここでポアンカレ双対を（係数を体と想定して）思い出しておくと

$$\begin{array}{ccccccc} H^1(\partial X) & \rightarrow & H^2(X, \partial X) & \xrightarrow{Q} & H^2(X) & \xrightarrow{r} & H^2(\partial X) \\ & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\ & & H_2(X) & \xrightarrow{j} & H_2(X, \partial X) & \rightarrow & H_1(\partial X) \end{array}$$

注意 1. 後でチャーン類 $c = c_1(\mathfrak{s}) \in H^2(X; \mathbb{Z})$ の自乗 $c_1^2(\mathfrak{s})$ が登場するが、この自乗 c^2 は（一旦 \mathbb{Q} 係数に移行して） $c \cup Q^{-1}(c)$ と解釈すべきと思われる。（参照：補題 3, 補題 5）

$H_2(X)$ の基底を $\{x_i\}$ とし、その双対基底（ $H^2(X)$ の基底）を $\{\xi_i\}$ とする。一方、 $H_2(X)$ のポアンカレ双対 $H^2(X, \partial X)$ の $\{x_i\}$ に対応する基底を $\{\text{Pd}(x_i)\}$ とする。すると

$$Q(\text{Pd}(x_i)) \text{ の } \xi_k \text{ の係数} = Q(\text{Pd}(x_i))(x_k) = \text{Pd}(j(x_i))(x_k) = j(x_i) \cdot x_k$$

であることから Q は交叉形式から定まる。具体的には、上記の基底 $\{x_i\}$ に関する交叉形式 \cdot の行列表示が、基底 $\{\text{Pd}(x_i)\}, \{\xi_i\}$ に関する写像 Q の行列表示となる。

例 1. $X = S_n = X(O; n)$ とする。球面 S^2 上の Disk 束で、自己交叉 Euler class が n のもの。 S を切断、 D をファイバーとする。 $[S] \cdot [D] = 1, [S] \cdot [S] = n. \partial X = -L(n, 1)$. \mathbb{Z} 係数で考える。

$$\begin{array}{ccccccc} H^2(X, \partial X) & \xrightarrow{Q} & H^2(X) & \rightarrow & H^2(\partial X) \\ \parallel & & \parallel & & \parallel \\ \mathbb{Z}[D^*] & \rightarrow & \mathbb{Z}[S^*] & \rightarrow & (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})[\mu^*] \\ \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow{n} & \mathbb{Z} & \rightarrow & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\ \mathbb{Z}[S] & \rightarrow & \mathbb{Z}[D] & \rightarrow & (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})[\partial D] \\ \parallel & & \parallel & & \parallel \\ H_2(X) & \xrightarrow{j} & H_2(X, \partial X) & \rightarrow & H_1(\partial X) \end{array}$$

2 Spin 構造と Spin^c 構造

$n \geq 3$ のとき, 特殊直交群 $SO(n)$ の基本群は

$$\pi_1(SO(n)) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\pm 1\}.$$

$SO(n)$ の 2 重被覆を $\text{Spin}(n)$ で表す. 単連結なリー群である.

$$SO(n) = \frac{\text{Spin}(n)}{\pm 1}$$

次に, リー群 $\text{Spin}^c(n)$ を次で定める.

$$\text{Spin}^c(n) = \frac{\text{Spin}(n) \times U(1)}{\pm 1}$$

次の自然な写像もある.

$$\xi : \text{Spin}^c(n) \xrightarrow{2:1} SO(n) \times U(1). \quad \begin{array}{ccc} & \exists \text{ lift} & \text{Spin}^c(2n) \\ & \nearrow & \downarrow \xi \\ U(n) & \xrightarrow{(\text{st.}, \det^2)} & SO(2n) \times U(1) \end{array}$$

低次元では具体的にわかる: 4 元数体 \mathbb{H} の単位球面を S^3

$$\begin{aligned} \mathbb{H} &= \{ \mathbf{v} = v_0 + v_1i + v_2j + v_3k \mid \text{各 } v_i \in \mathbb{R} \}, \\ S^3 &= \{ \mathbf{v} \in \mathbb{H} \mid \|\mathbf{v}\| = 1 \} \end{aligned}$$

で表すと

$$\text{Spin}(3) \cong SU(2) = S^3, \quad \text{Spin}(4) \cong S^3 \times S^3$$

であり, また

$$\text{Spin}^c(3) \cong U(2)$$

である. これを確認するには $\mathbb{H} = \mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$ および 虚部 $\text{Im}\mathbb{H} = \mathbb{R}^3$ の同一視

$$\begin{aligned} \text{Im}\mathbb{H} &= \{ v_1i + v_2j + v_3k \mid \text{各 } v_i \in \mathbb{R} \}, \\ \mathbb{C}^2 &= \{ z_0 + z_1j \mid z_0, z_1 \in \mathbb{C} \}, \end{aligned}$$

を利用する. いずれも作用の核 (中心) が $\{\pm 1\}$. \mathbb{C}^2 の複素構造は $i \circ (z_0 + z_1j) = (z_0 + z_1j)i = (iz_0) + (-iz_1)j$ とする.

$$\begin{aligned} S^3 \text{ acts on Im}\mathbb{H} &: q \circ \mathbf{v} = q\mathbf{v}q^{-1} \\ S^3 \times S^3 \text{ acts on } \mathbb{H} &: (q_1, q_2) \circ \mathbf{v} = q_1\mathbf{v}q_2^{-1} \\ S^3 \times S^1 \text{ acts on } \mathbb{H} &: (q, u) \circ \mathbf{v} = q\mathbf{v}u^{-1} \end{aligned}$$

連結な閉多様体 M の接束 TM (と構造群 $O(n)$ の主束に置き換え) について

$$\begin{aligned} M \text{ が向き付け可能} &\Leftrightarrow w_1(TM) = 0 \text{ in } H^1(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \\ \text{このとき } M \text{ の向き} &\leftrightarrow H^0(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \text{ の指定} \end{aligned}$$

の論理を延長する. M の Spin 構造とは TM に同伴する主 $SO(n)$ 束 $P_{SO(n)}$ のファイバーごとの 2 重被覆である主 $\text{Spin}(n)$ 束 $P_{\text{Spin}(n)}$ (の同値類) のことで,

M が Spin 構造をもつ $\Leftrightarrow w_2(TM) = 0$ in $H^2(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$
 このとき $\{M$ の Spin 構造 $\}$ に $H^1(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ が推移的に作用.

つまり Stiefel-Whitney 類が Spin 構造の障害類である. なお, $\text{rank}_{\mathbb{R}} = 2$ の複素構造をもつ (従って有向) ベクトル束 E について $c_1(E) \equiv w_2(E) \pmod{2}$ である.

定義. 位相空間 X 上の $SO(n)$ 主束 $P_{SO(n)}$ の Spin^c 構造とは, ファイバーごとに $\xi: \text{Spin}^c(n) \xrightarrow{2:1} SO(n) \times U(1)$ である束 $\text{map}: P_{\text{Spin}^c(n)} \rightarrow P_{SO(n)} \times P_{U(1)}$ をもつ Spin^c 主束 $P_{\text{Spin}^c(n)}$ のこと. このとき $c_1(P_{U(1)}) \in H^2(X; \mathbb{Z})$ を「 Spin^c 構造の canonical class」という.

$$\begin{aligned} M \text{ が } \text{Spin}^c \text{ 構造をもつ} &\Leftrightarrow W_3(TM) = \beta w_2(TM) = 0 \text{ in } H^3(M; \mathbb{Z}) \\ &\Leftrightarrow w_2(TM) \in \text{Im}(H^2(M; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\text{mod } 2} H^2(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})) \end{aligned}$$

である. $\beta: H^2(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow H^3(M; \mathbb{Z})$ は $(0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0)$ が導く Bockstein 完全系列の連結準同型写像.

結果的に 向き付け可能な 3, 4次元多様体は常に Spin^c 構造をもち, 構造の選択について, 次が知られている.

事実 1. 4次元多様体 X の Spin^c 構造 \mathfrak{s} は $c_1(\mathfrak{s}) \in \text{Char}H^2$ で分類できる.
 ここで

$$\text{Char}H^2 = \{c \in H^2(X; \mathbb{Z}) \mid c \text{ is characteristic (ie, } c \cup x = x \cup c \text{ for } \forall x)\}$$

3次元多様体の Spin^c 構造は「非零ベクトル場 v の『ホモロジー類』(球体内での局所変形で写り合うものを同一視する)」[Turaev], 4次元多様体の Spin^c 構造は複素構造 J (の同値類) で幾何的に捉えることができる. ($Y^3 = \partial X^4$ のときは Y 上の非零ベクトル場 v は $(TX$ 内の) TY 内の plane 場 $TY \cap JTY$ の法ベクトルだと思う) これらの Spin^c 構造には 共役 conjugation $t \mapsto \bar{t}$ が存在する. それぞれ, $v \mapsto -v, J \mapsto -J$ に対応する.

3 レンズ空間の場合

\mathbb{C}^2 の複素構造から定まる向きを重要視すれば「 $(O; p/q) = -L(p, q)$ (p/q -framed unknot に沿う Dehn surgery が $-L(p, q)$)」が正しい. なるべくこれを採用する. 低次元多様体論では $(O; p/q) = L(p, q)$ がよく採用されている. 論文を引用するときなどに間違える可能性がある.

3次元多様体 Y^3 の Spin^c 構造を指定するには, Y が bound する 4次元多様体 X^4 を用いると都合が良い.

定義 1. $[\text{Spin}^c$ 構造の指定]

$X^4 = B^4 \cup h^2$ (2-handle 1つ接着; 係数 $n \in \mathbb{Z}, n > 0$) の場合, $Y = \partial X$ の Spin^c 構造 \mathfrak{t}_j とは, X の Spin^c 構造 \mathfrak{s}_j で

$$\langle c_1(\mathfrak{s}_j), [\hat{F}] \rangle \equiv n + 2j \pmod{2n} \quad (j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

となるものの Y への制限 $\mathfrak{t}_j = \mathfrak{s}_j|_Y$ として定める. 一旦 attaching circle K に向きを入れる. \hat{F} は h_2 の attaching circle の Seifert 膜 F に h_2 の core を貼り合わせた閉曲面.

これを「 Y の Spin^c 構造の集合の同一視: $\text{Spin}^c(Y) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 」とみなして (Y, \mathfrak{t}_j) の代わりに (Y, j) と書くこともある.

注意 2. ここで言う (Y, \mathfrak{t}_j) や (Y, j) は, 多様体 Y に対して Spin^c 構造が指定したのではなく, あくまで「 Y の構成: デーン手術 $Y = (K; n)$ 」を経由して Spin^c 構造を指定することに注意.

例 2. $X = S_n = (O; n)$ (球面 S^2 上の Disk 束で, 自己交叉 Euler class が n のもの)

$\partial X = -L(n, 1)$ の Spin^c 構造は n 種類 $\mathfrak{t}_0, \mathfrak{t}_1, \dots, \mathfrak{t}_{n-1}$.

$-L(5, 1) :$	\mathfrak{t}_j	$\langle c_1(\mathfrak{s}_j), [S] \rangle$	d
	\mathfrak{t}_0	$5 (\equiv -5)$	1
	\mathfrak{t}_1	$7 (\equiv -3)$	$\frac{1}{5}$
	\mathfrak{t}_2	$9 (\equiv -1)$	$\frac{1}{5}$
	\mathfrak{t}_3	1	$-\frac{1}{5}$
	\mathfrak{t}_4	3	$-\frac{1}{5}$

$-L(4, 1) :$	\mathfrak{t}_j	$\langle c_1(\mathfrak{s}_j), [S] \rangle$	d
	\mathfrak{t}_0	$4 (\equiv -4)$	$\frac{3}{4}$
	\mathfrak{t}_1	$6 (\equiv -2)$	0
	\mathfrak{t}_2	0	$-\frac{1}{4}$
	\mathfrak{t}_3	2	0

\mathfrak{t}_0 が $-L(n, 1)$ の「canonical Spin^c 構造」である.

Correction term d については後述するが, ここでは公式を引用しておく.

補題 1. [OS(int)] (後述の注意 4 も参照)

$$d(-L(n, 1), \mathfrak{t}_j) = - \max_{s \equiv j \pmod{n}} \frac{1}{4} \left(1 - \frac{(n + 2s)^2}{n} \right)$$

逆向きの場合には $d(L(n, 1), \mathfrak{t}_j) = -d(-L(n, 1), \mathfrak{t}_j)$ となる.

一般のレンズ空間の場合には, 次の帰納的公式が知られていた.

補題 2. [OS]

$$d(L(p, q), i) = \frac{1}{4} - \frac{(2i + 1 - p - q)^2}{4pq} - d(L(q, r), j)$$

where $0 \leq i < p + q$, r and j are the reductions of q and j modulo p , respectively.

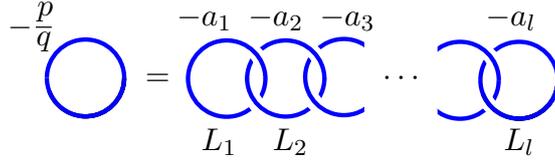


図 1: chain link

デデキンド和を利用した丹下氏の直接公式もある.

一般のレンズ空間 $L(p, q)$ ($0 < q < p$ とする) の場合に、次のような方法が発見された. Hirzebruch-Jung 連分数展開を用いる.

$$\frac{p}{q} = [a_1, a_2, a_3, \dots, a_l] = a_1 - \frac{1}{a_2 - \frac{1}{a_3 - \dots - \frac{1}{a_l}}} \quad (a_i > 1) \quad (1)$$

$$X^4(p, q) = (CL; -a_1, -a_2, \dots, -a_l), \quad H_2(X(p, q)) = \mathbb{Z}[h_1, h_2, \dots, h_l]$$

$CL = L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_l$ は chain link (図 1). 成分 L_i の meridian-longitude system を μ_i, λ_i とする. 記号 h_i は 2-handle と対応する $H_2(X(p, q))$ の元を混用. $H_2(X(p, q))$ は, 単射で $H_2(X(p, q), \partial X(p, q))$ に入る. ポアンカレ双対は $H^2(X(p, q), \partial X(p, q))$ で, 単射で $H^2(X(p, q))$ に入る.

$$H^2(X(p, q)) \cong \mathbb{Z}^l \text{ の元 } c (= c_1(\mathfrak{s})) \text{ を} \\ \varphi_c = (c(h_1), c(h_2), \dots, c(h_l)) \in \mathbb{Z}^l \text{ で表す.}$$

境界 $\partial X^4(p, q) = L(p, q)$ について, chain Link の特性から 1 次ホモロジー内で

$$\lambda_1 = \mu_2, \dots, \mu_{i-1} - \lambda_i + \mu_{i+1} = 0 \quad (2 \leq i \leq l-1), \dots, \mu_{l-1} = \lambda_l$$

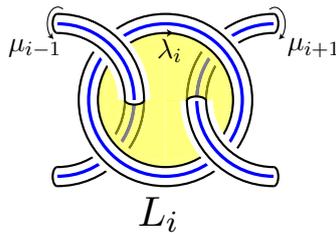


図 2: $\mu_{i-1} - \lambda_i + \mu_{i+1} = 0$

Dehn surgery の特性として, 1 次ホモロジー内で $\lambda_i - a_i \mu_i = 0$ であることを合わせて

$$a_1 \mu_1 = \mu_2, \dots, \mu_{i-1} - a_i \mu_i + \mu_{i+1} = 0 \quad (2 \leq i \leq l-1), \dots, 0 = a_l \mu_l - \mu_{l-1}$$

境界 ∂X に制限して $\delta\varphi_c \in H^2(\partial X(p, q)) = H^2(L(p, q))$ をポアンカレ双対 $\cong H_1(L(p, q))$ の中で扱うときに

$$\begin{aligned} (-a_1, 1, 0, 0, 0, \dots, 0, 0) &= 0, & \text{つまり } \mu_2 &= a_1\mu_1, \\ (1, -a_2, 1, 0, 0, \dots, 0, 0) &= 0, & \mu_3 &= a_2\mu_2 - \mu_1, \\ (0, 1, -a_3, 1, 0, \dots, 0, 0) &= 0, & \mu_4 &= a_3\mu_3 - \mu_2, \\ & \vdots & & \vdots \\ (0, 0, 0, \dots, 1, -a_{l-1}, 1) &= 0, \\ (0, 0, 0, 0, \dots, 0, 1, -a_l) &= 0, & a_l\mu_l &= \mu_{l-1} \end{aligned}$$

となることに注意して $L(p, q) = \partial X(p, q)$ の Spin^c 構造を, $X^4(p, q)$ の Spin^c 構造 \mathfrak{s} の制限として表す.

レンズ空間の Spin^c 構造の表し方 (Gibbons [G])

p/q の連分数展開 (1) を介して $L(p, q)$ を境界にもつ 4次元多様体 $X(p, q)$ の Spin^c 構造 \mathfrak{s} を考え, \mathfrak{s} の境界 $L(p, q)$ への制限として表す. $H^2(X(p, q)) \cong \mathbb{Z}^l$ の元 $c = c_1(\mathfrak{s})$ を $\varphi_c = (c(h_1), c(h_2), \dots, c(h_l)) \in \mathbb{Z}^l$ で表して扱う.

$$N(a) = \{x \in \mathbb{Z} \mid -a < x \leq a, x \equiv a \pmod{2}\}, \quad \bar{N}(a) = N(a) \cup \{-a\}$$

とする.

(Step 1) 次の集合を考える. 注: $N(a)$ は a を含む. が嫌う (例 3 では太字).

$$N(a_1) \times N(a_2) \times \dots \times N(a_l) \subset \mathbb{Z}^l$$

(Step 2) 上の集合に含まれる各 (x_1, x_2, \dots, x_l) について, 次の操作を行う: $x_i = a_i$ となる i が存在する (両端も可) 限り

$$(\dots, x_{i-1}, a_i, x_{i+1}, \dots) \rightarrow (\dots, x_{i-1} + 2, -a_i, x_{i+1} + 2, \dots)$$

(Step 3) Step 2 の操作をしていって集合 $\bar{N}(a_1) \times \bar{N}(a_2) \times \dots \times \bar{N}(a_l)$ から外れるものは捨てて残ったものだけ選ぶ. 注: Step 1 では $-a_i$ を嫌ったが Step 3 では許す

例 3. $L(5, 2)$ ($5/2 = [3, 2]$) の 5 つの Spin^c 構造

$(-3, -2)$	Step 2 の操作		μ^*	d
$(-1, 0)$		○	-1	$\frac{2}{5}$
$(1, 0)$		○	1	$\frac{2}{5}$
$(3, 0)$	$\rightarrow (-3, \mathbf{2}) \rightarrow (-1, -2)$	○	3	$-\frac{2}{5}$
$(-1, \mathbf{2})$	$\rightarrow (1, -2)$	○	0	0
$(1, \mathbf{2})$	$\rightarrow (\mathbf{3}, -2) \rightarrow (-3, 0)$	○	-3	$-\frac{2}{5}$
$(3, \mathbf{2})$	$\rightarrow (-3, \mathbf{4}) \times$ $\rightarrow (\mathbf{5}, -2) \times$	×		

$$Q = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

補題 3. [OS(plumb)] $d(L(p, q), \varphi_c) = \frac{\varphi_c \cdot Q^{-1} \cdot {}^t\varphi_c + l}{4}$

例 4. $d(L(5, 2), [-1, 0]) = d(L(5, 2), \mathfrak{t}_{-1}) = \frac{[-1 \ 0] \frac{-1}{5} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2}{4} = \frac{2}{5}$

$X(p, q)$ に穴を開けた $\mathring{X}(p, q)$ を S^3 から $L(p, q)$ への cobordism とみなすと $\chi(\mathring{X}) = l, \sigma(\mathring{X}) = -l$ なので、この右辺は Seiberg-Witten 理論でたびたび現れる $\frac{c_1^2 - (2\chi + 3\sigma)}{4}$ に他ならない。

$L(p, q)$ を Dehn surgery $(CL; -a_1, -a_2, \dots, -a_l)$ と見て、第 1 成分 L_1 の meridian $\mu_1 = \mu$ を $H^1(L(p, q))$ の生成元 とみなし、第 i 成分 L_i の meridian μ_i が μ の何倍か (つまり μ^* での値を) 調べると

$$\mu_2 = a_1\mu, \quad \mu_3 = (a_1a_2 - 1)\mu, \quad \mu_4 = (a_1a_2a_3 - a_1 - a_3)\mu, \quad \dots$$

となるので、例えば $\varphi_c = (c_1, c_2, c_3, c_4, \dots)$ であれば

$$\text{Pd}(\delta\varphi_c) = \{c_1 + a_1c_2 + (a_1a_2 - 1)c_3 + (a_1a_2a_3 - a_1 - a_3)c_4 + \dots\}\mu$$

が成り立つ。例 2 の表の μ^* の欄に $\mu^*(\text{Pd}(\delta\varphi_c))$ を書いておいた。 μ^* と t_j の j とは異なる値であることに注意。

i	$L(5, 1)$	$L(5, 2)$	$L(5, 3)$	$L(5, 4)$
0	-1	-2/5	-2/5	1/5
-1	-1/5	-2/5	0	-1/5
2	1/5	2/5	-2/5	-1/5
3	1/5	0	2/5	1/5
4	-1/5	2/5	2/5	1

表 1: $L(5, q)$ の Spin^c 構造と d -不変量

注意 3. 共役 $t \mapsto \bar{t}$ (概複素構造で言えば $J \mapsto -J$) について、丹下氏によるとレンズ空間 $L(p, q)$ の Spin^c 構造の集合 $\{t_i\}$ への「共役」作用の固定点は $i = \frac{q-1}{2}, \frac{p+q-1}{2}$ のうち“有効なもの”である。特に p が偶数のときは q が奇数のため両方が有効でこれは Spin 構造が 2 つあることと対応する。また、 φ_c でいうと「Step 2 の変形の過程の中に逆符号の対が存在するもの」にあたる。

例：連分数展開 $p/q = [a_1, a_2, \dots, a_l]$ で、すべての a_i が偶数の場合、共役の固定点の 1 つは $\varphi_c = (0, 0, \dots, 0)$ 。 l が奇数 (p が偶数) のときは、 $(-a_1, 2, -a_3, 2, \dots, 2, -a_l)$ がもう 1 つの固定点。 Spin 構造の「characteristic sublink」と似ている。

注意 4. 補題 1 について、個人的には、符号に関して $\frac{1}{4}(c_1^2(\mathfrak{s}) - (2\chi + 3\sigma))$ との整合性から、次の様に直したい気がします (オイラー標数 χ は向きを逆にしても逆符号にならない) :
Unknot O の $(-n)$ -surgery $(O; -n) = L(n, 1)$ ($n > 0$) について

$$d(L(n, 1), t_j) = \max_{s \equiv j \pmod n} \frac{1}{4} \left(1 - \frac{(n+2s)^2}{n} \right)$$

4 Correction term (d -invariant)

この章は整数係数ホモロジー球面しか考えていなかった頃の記事のコピーを調整したものである。

ここで Correction term の定義, 性質とその典型的な応用例を引用しておく。

定義 2. ([OS, p.21], Correction term) For a Spin^c $\mathbb{Q}HS(Y, t)$, $d(Y, t)$ is the minimal grading of the image of $HF^\infty(Y, t)$ in $HF^+(Y, t)$.

補題 4. ([OS, Corollary 9.8], Correction term の性質)

$$\begin{aligned} d(Y_1 \# Y_2, t_1 \# t_2) &= d(Y_1, t_1) + d(Y_2, t_2), \\ d(Y, \bar{t}) &= d(Y, t), \quad d(-Y, t) = -d(Y, t) \end{aligned}$$

ここで, 3-, 4-manifold の Spin^c 構造を, それぞれ nowhere vanishing vector 場, almost complex str. J で表すことにすれば, conjugation $t \mapsto \bar{t}$ は $v \mapsto -v$, $J \mapsto -J$ に対応する。

補題 5. ([OS, Corollary 9.8]) If Y bounds a negative definite 4-manifold X , then

$$Q_X(\xi, \xi) + \text{rk}H^2(X; \mathbb{Z}) \leq 4d(Y)$$

for each characteristic vector ξ .

In particular, if a ZHS Y satisfies $d(Y) < 0$, then Y bounds no negative definite 4-manifold. (unimodular 行列に関する Elkies の定理により不等式の左辺が 0 以上になるため)

さて, Y を整係数ホモロジー球面とする (よって Spin^c 構造は一意的) とき,

$$\begin{aligned} \lambda(Y) &: \text{Casson 不変量} \\ \chi(HF_{\text{red}}^+(Y)) &: HF_{\text{red}}^+ \text{ のオイラー標数} \\ d(Y) &: \text{Correction term} \end{aligned}$$

の間に次の関係式が成り立つ。

定理 3. ([OS, p.30])

$$\lambda(Y) = \chi(HF_{\text{red}}^+(Y)) - \frac{1}{2}d(Y)$$

ただし, Casson 不変量は $\lambda(\Sigma(2, 3, 5)) = -1$ となるよう正規化している ($\Sigma(2, 3, 5)$ は negative definite E_8 plumbing の境界で, -1 -framed 左手 trefoil) .

5 Heegaard Floer Homology と デーン手術

[Heegaard Floer Homology の基本] Spin^c 構造 t を備えた有向閉 3 次元多様体 Y (記号 (Y, t)) に対して鎖複体 $CF^\circ(Y, t)$ を経由して「ホモロジー」 $HF^\circ(Y, t)$ が定まる。 Y_1 から Y_2 への smooth 4 次元 cobordism $W : Y_1 \rightarrow Y_2$ で Spin^c 構造 \mathfrak{s} で $\mathfrak{s}|_{Y_i} = t_i (i = 1, 2)$ を満たすものに対して

$$f_{W, \mathfrak{s}}^\circ : HF^\circ(Y_1, t_1) \rightarrow HF^\circ(Y_2, t_2)$$

が誘導される。それらを通して, 不変量「 d -invariant」 $d(Y, t)$ などが定義される。

Y 内の null-homologous な knot K に対して, $Y_n(K)$ で Y の K に沿う n -surgery を表すとする。 $W_n(K)$ で, $Y \times [0, 1]$ の境界 $Y \times \{1\}$ の K に沿って n -framed 2-handle を接着した smooth 4 次元 cobordism 「2-handle cobordism」 $W_n(K) : Y \rightarrow Y_n(K)$ を表す。 逆向きにした $W'_n(K) : Y_n(K) \rightarrow Y$ も便利に使う。

(Y, K) から鎖複体 $CFK^\infty(Y, K)$ が定まる. これを利用して $HF^\circ(Y_n(K), t)$ を求めるのが目標である. (コ) ホモロジーの係数環は $\mathbb{F} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ とする (が, ときどき \mathbb{Z} と書いてしまう).
記号: U の degree は -2 .

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^+ &= \mathbb{F}[U, U^{-1}]/U\mathbb{F}[U] \\ &= \{a_0 + a_1U^{-1} + a_2U^{-2} + \dots \mid \text{各 } a_i \in \mathbb{F}\} \\ &\cong \mathbb{F} \oplus \mathbb{F}U^{-1} \oplus \mathbb{F}U^{-2} \oplus \mathbb{F}U^{-3} \dots \end{aligned}$$

Knot Floer Homology では (Y, K) に対して, まず

$$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \text{ フィルター付 } \mathbb{F}[U] \text{ 鎖複体 } C = CFK^\infty(Y, K)$$

が定められる. ここで「 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ フィルター付」とは関数 $\mathcal{F}: C \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ があって $\partial \tilde{\mathbf{x}} = \sum \tilde{\mathbf{y}}_i$ のとき $\mathcal{F}(\tilde{\mathbf{y}}_i) \leq \mathcal{F}(\tilde{\mathbf{x}})$ となることを表す. また U の作用は $\mathcal{F}(\tilde{\mathbf{x}}) = (i, j)$ ならば $\mathcal{F}(U\tilde{\mathbf{x}}) = (i-1, j-1)$.

$CFK^\infty(Y, K)$ は, (Y, K) の 2 点付 Heegaard 分解 $(\Sigma, \alpha, \beta, w, z)$ を用いて構成される. (その構成は Heegaard Floer 理論として根本的で, 非常に重要だがここでは割愛する)

$$CFK^\infty(Y, K) = \{[\mathbf{x}, i, j] \in (\mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta) \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid \underline{s}(\mathbf{x}) + i - j = 0\}$$

ただし, $\underline{s}: \mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta \rightarrow \mathbb{Z}$ は (Y, K) の relative Spin^c 構造の Chern class による K の Seifert 膜に対する値の半分.

$$\partial[\mathbf{x}, i, j] = \sum_{\mathbf{y} \in \mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta} \sum_{\phi \in \pi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \mu(\phi)=0} \#\hat{\mathcal{M}}(\phi) \cdot [\mathbf{y}, i - n_w(\phi), j - n_z(\phi)]$$

ij -平面の格子点 (i, j) 上に, $\mathcal{F}(\tilde{\mathbf{x}}) = (i, j)$ となる $CFK^\infty(Y, K)$ の元 $\tilde{\mathbf{x}}$ を配置して考える (実際には元は $\tilde{\mathbf{x}} = [\mathbf{x}, i, j]$ である ($\mathbf{x} \in \mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta$)).

記号: ij -平面の領域 (あるいは i, j の条件) S に対して

$$C\{S\} = \{\tilde{\mathbf{x}} \in C \mid \mathcal{F}(\tilde{\mathbf{x}}) \in S\} \text{ の生成する部分 鎖複体}$$

とする (図 3: 色 (黄色) のある部分が生きている元). 主に使うのは

$$\begin{aligned} B^+ &= C\{i \geq 0\} \quad (= B_s^+ \ (\forall s \in \mathbb{Z})) \\ A_s^+ &= C\{\max(i, j - s) \geq 0\} \end{aligned}$$

実は B^+ は $CF^+(Y)$ に一致する.

例 5. 図 3 は $T(3, 4)$ の場合である.

$$\Delta_{T(3,4)}(t) = \frac{(t-1)(t^{12}-1)}{(t^3-1)(t^4-1)} \doteq t^3 - t^2 + 1 - t^{-2} + t^{-3}$$

で, このことは j 軸上の 5 つの点の配置から読み取れる.

点	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
(i, j)	(0, 3)	(0, 2)	(0, 0)	(0, -2)	(0, -3)
grading	0	-1	-2	-5	-6

grading は U で -2 , ∂ で -1 変化する. U の作用は $U \cdot [\mathbf{x}, i, j] = [\mathbf{x}, i-1, j-1]$. 矢印は ∂ を表しており

$$\partial x_2 = Ux_1 + x_3, \quad \partial x_4 = U^2x_3 + x_5,$$

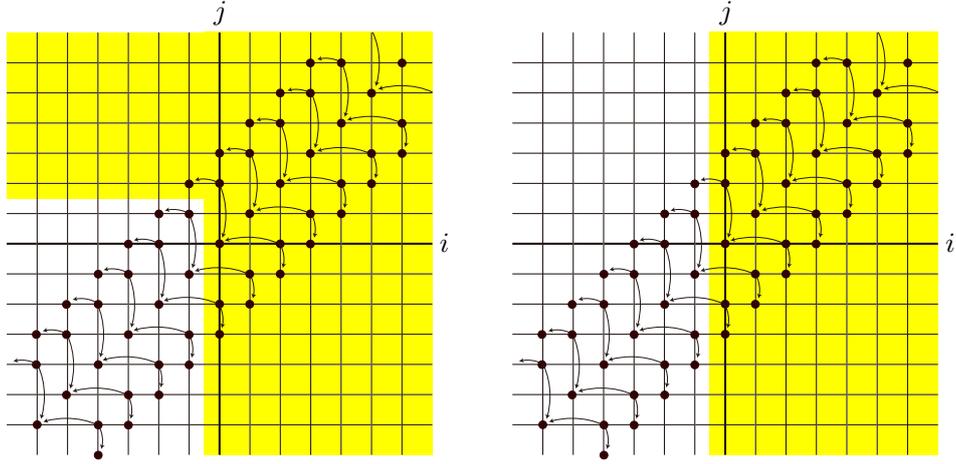


図 3: $T(3,4)$ の場合の A_2^+ (左) と B^+ (右)

$H(B^+)$ の計算では $U^{-2}x_5 \sim x_3 \sim Ux_1 = 0$ に注意 (\sim は homologous) , $H(A_{-1}^+)$ では $x_5 \sim U^3x_1 \sim U^2x_3 = 0$ となることなどに注意して

$$H(B^+) = \mathcal{J}^+[U^{-1}x_3], \quad H(A_s^+) = \begin{cases} \mathcal{J}^+[U^{-1}x_3] & \text{if } s > 2 \\ \mathcal{J}^+[x_3] & \text{if } s = 2, 1, 0 \\ \mathcal{J}^+[Ux_3] & \text{if } s = -1 \\ \mathcal{J}^+[U^2x_3] & \text{if } s = -2, -3 \\ \mathcal{J}^+[U^{-s-1}x_3] & \text{if } s < -3 \end{cases}$$

$T(3,4)$ についての例 5 は一旦ここまで. 例 6 に続く

$H(A_s^+)$ は, $|s|$ がじゅうぶん大きいところで“安定”する.

次に, 2つの map $v_s^+, h_s^+ : A_s^+ \rightarrow B^+$ を用意する.

• v_s^+ は商写像.

$$C\{\max(i, j - s) \geq 0\} \xrightarrow{\text{proj.}} C\{i \geq 0\}$$

• h_s^+ は次の合成写像 (図 4)

$$C\{\max(i, j - s) \geq 0\} \xrightarrow{\text{proj.}} C\{j \geq s\} \xrightarrow{U^s} C\{j \geq 0\} \xrightarrow{\text{eq.}} C\{i \geq 0\}$$

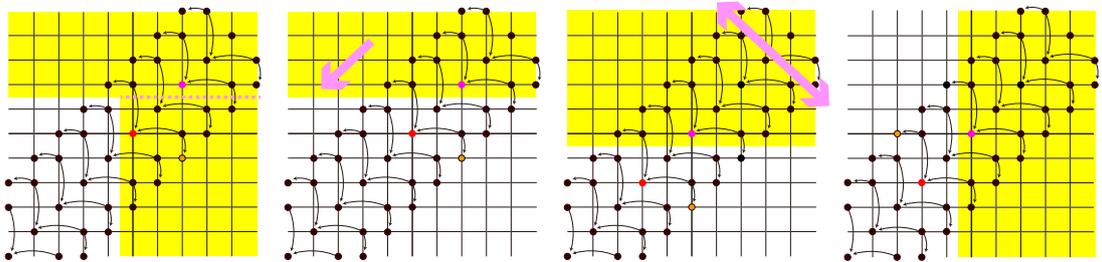


図 4: $h_2^+ : A_2^+ \rightarrow B^+$

例 6. $T(3, 4)$ の場合 (続) $H(A_s^+) \cong \mathcal{T}^+, H(B^+) \cong \mathcal{T}^+$ である. v_s^+, h_s^+ のモデルはそれぞれ

$$v_s^+ : A_s^+ \rightarrow B_s^+, \quad h_s^+ : A_s^+ \rightarrow B_{s+n}^+$$

$$\begin{cases} 1 & \text{if } s > 2 \\ U & \text{if } s = 0, 1, 2 \\ U^2 & \text{if } s = -1 \\ U^{-s+1} & \text{if } s < -1 \end{cases} \quad \begin{cases} U^{s+1} & \text{if } s > 1 \\ U^2 & \text{if } s = 1 \\ U & \text{if } s = 0, -1, -2 \\ 1 & \text{if } s < -2 \end{cases}$$

定義 4. 「 $v_{-1}^+ : A_{-1}^+ \rightarrow B_{-1}^+$ のモデルが U^2 」とは, 同一視 $A_{-1}^+ \cong \mathcal{T}^+, B_{-1}^+ = B^+ = \mathcal{T}^+$ の下で v_{-1}^+ が $U^2 : \mathcal{T}^+ \rightarrow \mathcal{T}^+$ (全射で $\text{Ker} = \mathbb{F} \oplus \mathbb{F}U^{-1}$) と表示されること. 実際, $H(A_{-1}^+)$ の生成元は $Ux_3, H(B^+)$ の生成元 $U^{-1}x_3$ であつた (例 5). v_{-1}^+ は全射で $\text{Ker} = \mathbb{F}\langle Ux_3, x_3 \rangle$.

後で「モデル」を用いて計算を簡略化する.

なお, knot の不変量族 $\{V_k(K)\}_{k \geq 0}$ (および $\{H_k(K)\}_{k \geq 0}$) は「写像 v_k^+ のモデルが U^{V_k} 」として定まる: V_k の性質として: $V_k \geq V_{k+1} \geq V_k - 1, V_{g(K)} = 0$ ($g(K)$ は K の genus) なお, $\{V_k(K)\}_{k \geq 0}$ は concordance 不変量であり,

$$\nu^+(K) = \min\{k \mid V_k(K) = 0\}$$

の性質に興味を持たれている¹.

$T(3, 4)$ の場合, $g = 3$ で $V_0 = V_1 = V_2 = 1, V_3 = 0$.

$\mathbb{A}^+ = \bigoplus_{s \in \mathbb{Z}} A_s^+, \mathbb{B}^+ = \bigoplus_{s \in \mathbb{Z}} B_s^+$ (s に関係なく $B_s^+ = B^+$ であるが和をしておく) として, 写像 $D_n^+ : \mathbb{A}^+ \rightarrow \mathbb{B}^+$ を

$$D_n^+(\{a_s\}_{s \in \mathbb{Z}}) = \{b_s\}_{s \in \mathbb{Z}}, \quad \text{where } b_s = h_{s-n}^+(a_{s-n}) + v_s^+(a_s)$$

と定め, $\mathbb{X}^+(n)$ を D_n^+ の写像錘 (mapping cone) とする. つまり $\mathbb{A}^+ \oplus \mathbb{B}^+$ 上で

$$\begin{pmatrix} \partial_{\mathbb{A}^+} & 0 \\ D_n^+ & \partial_{\mathbb{B}^+} \end{pmatrix}$$

で定める鎖写像. そのホモロジーを $H_*(\mathbb{X}_n^+)$ とする.

なお, 写像錘 $H_*(\mathbb{X}_n^+)$ の計算には, 次の 3 種類の自然な写像

$$\begin{array}{ccccccc} \rightarrow & H_*(\mathbb{B}^+) & \rightarrow & H_*(\mathbb{X}_n^+) & \rightarrow & H_*(\mathbb{A}^+) & \rightarrow & H_*(\mathbb{B}^+) & \rightarrow \\ & b & \mapsto & \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} & \mapsto & a, & a & \mapsto & D_*(a) \end{array}$$

を利用すると良い. 実際 [OS(int)] に $D_* : H_*(\mathbb{A}^+) \rightarrow H_*(\mathbb{B}^+)$ が全射の場合に $H_*(\mathbb{X}_n^+) \cong \text{Ker } D_*$ を利用している.

¹この段落について, 佐藤光樹氏の指摘に感謝いたします.

定理 5 (Ozsvath-Szabo [OS(int)]). “Mapping Cone Theorem”

整係数ホモロジー有向球面 Y 内の knot K と整数 $n(\neq 0)$ について, $H_*(\mathbb{X}^+(n))$ が $HF^+(Y_n(K))$ に一致する.

さらに, $HF^+(Y) \cong H_*(B_s^+)$ と合わせて, 自然な写像 $H_*(B_s^+) \rightarrow H_*(\mathbb{X}^+(n))$ は

$$\begin{array}{ccc} H_*(B_s^+) & \rightarrow & H_*(\mathbb{X}^+(n)) \\ \cong & & \cong \\ HF^+(Y) & \xrightarrow{f_{W_n(K)}^+} & HF^+(Y_n(K)) \end{array}$$

cobordism $W_n(K) : Y \rightarrow Y_n(K)$ が誘導する $f_{W_n(K)}^+ : HF^+(Y) \rightarrow HF^+(Y_n(K))$ に対応する.

Spin^c 構造を加味した改良

3章で述べた同一視 $\text{Spin}^c(Y_n(K) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ の同一視 ($t_i \leftrightarrow i$) を用いる. $HF(Y_n(K), t_i)$ を求めたい. $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ に対して, $\{s | s \equiv i\} = \{s \in \mathbb{Z} | s \equiv i \pmod{n}\}$ として

$$\mathbb{A}_i^+ = \bigoplus_{\{s|s \equiv i\}} A_s^+ = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} A_{i+ks}^+, \quad \mathbb{B}_i^+ = \bigoplus_{\{s|s \equiv i\}} B_s^+ = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} B_{i+ks}^+,$$

$D_{n,i}^+ : \mathbb{A}_i^+ \rightarrow \mathbb{B}_i^+$ を D_n^+ の制限とし, $\mathbb{X}_i^+(n)$ をその写像錘とする.

定理 6 (Ozsvath-Szabo [OS(int)]). 整係数ホモロジー有向球面 Y 内の knot K と整数 $n(\neq 0)$ について,

$$H_*(\mathbb{X}_i^+(n)) \cong HF^+(Y_n(K), t_i)$$

簡単な具体的な計算例は次の章で扱うことにする.

Grading と degree の調整

$B_s^+ \cong CF^+(Y)$ の方で調整する. degree を移動して v^+, h^+ の degree が -1 になるように A_s^+ の方も調整する.

[$n > 0$ のとき] $s = \sigma + \ell n \equiv i \pmod{n}$ ($0 \leq \sigma < n$) とする ($s \div n = \ell \dots \sigma$). $CF^+(Y)$ の degree d の元と $B_{\sigma+\ell n}^+$ の $d + 2\ell\sigma + n\ell(\ell-1) - 1$ の元とを対応させる. [$n < 0$ のとき] ほぼ同様 (省略).

有理係数の surgery に改良 [Ozsvath-Szabo [OS(rat)]]

少し notation が進化している.

$$\mathbb{A}_i^+ = \bigoplus_{s \in \mathbb{Z}} (s, A_{\lfloor \frac{i+ps}{q} \rfloor}^+), \quad \mathbb{B}_i^+ = \bigoplus_{s \in \mathbb{Z}} (s, B^+),$$

とし, 写像 v^+, h^+ , より正確には

$$v_{\lfloor \frac{i+ps}{q} \rfloor}^+ : (s, A_{\lfloor \frac{i+ps}{q} \rfloor}^+) \rightarrow (s, B^+), \quad h_{\lfloor \frac{i+ps}{q} \rfloor}^+ : (s, A_{\lfloor \frac{i+ps}{q} \rfloor}^+) \rightarrow (s+1, B^+),$$

も前と同様に定義し, 写像 $D_{i,p/q}^+ : \mathbb{A}_i^+ \rightarrow \mathbb{B}_i^+$ を

$$D_{i,p/q}^+(\{(s, a_s)\}_{s \in \mathbb{Z}}) = \{(s, b_s)\}_{s \in \mathbb{Z}}, \quad \text{where} \\ b_s = v_{\lfloor \frac{i+ps}{q} \rfloor}^+(a_s) + h_{\lfloor \frac{i+p(s-1)}{q} \rfloor}^+(a_{s-1})$$

で定め, $\mathbb{X}_{i,p/q}^+$ をその写像錐 (mapping cone), そのホモロジーを $H_*(\mathbb{X}_{i,p/q}^+)$ とする.

定理 7 (Ozsvath-Szabo [OS(rat)]). 整係数ホモロジー有向球面 Y 内の null-homologous knot K について

$$H_*(\mathbb{X}_{i,p/q}^+) \cong HF^+(Y_{p/q}(K), \mathfrak{t}_i)$$

$K \subset S^3$ の場合, $\mathbb{X}_{i,p/q}^+$ の absolute grading は \mathbb{B}^+ の absolute grading (これは K には依らない), つまり同型

$$H_*(\mathbb{X}_{i,p/q}^+(O)) \cong \mathcal{T}^+ \ni 1$$

の元の degree を $d(-L(p, q), \mathfrak{t}_i)$ とすること, によって定める.

例 7. $(O; 5/2) = -L(5, 2)$

$$(i=1) \mathbb{A}_1^+ = \bigoplus_{s \in \mathbb{Z}} (s, A_{\lfloor \frac{1+5s}{2} \rfloor}^+)$$

$$\cdots \oplus (-3, A_{-7}^+) \oplus (-2, A_{-5}^+) \oplus (-1, A_{-2}^+) \oplus (0, A_0^+) \oplus (1, A_3^+) \oplus (2, A_5^+) \oplus (3, A_8^+) \oplus \cdots$$

$$(i=0) \mathbb{A}_0^+ = \bigoplus_{s \in \mathbb{Z}} (s, A_{\lfloor \frac{5s}{2} \rfloor}^+)$$

$$\cdots \oplus (-3, A_{-8}^+) \oplus (-2, A_{-5}^+) \oplus (-1, A_{-3}^+) \oplus (0, A_0^+) \oplus (1, A_2^+) \oplus (2, A_5^+) \oplus (3, A_7^+) \oplus \cdots$$

$HF^+(-L(5, 2), 0) \cong \mathcal{T}^+$ の確認

表 2 の見方: 同じ行の元の和がサイクル. 例えば $(s, A_{\lfloor \frac{5s}{2} \rfloor}^+) = (-1, A_{-3}^+)$ 内の x_5 を $x_5^{(-3)}$ と表すことにすると,

$$D_{0,5/2}^+(x_5^{(-3)} + x_8^{(0)}) = h_{-1}^+(x_5^{(-3)}) + v_0^+(x_8^{(0)}) = x_8 + x_8 = 0 \in (0, B^+)$$

その右隣, そのまた隣, ... も同様に

$$D_{0,5/2}^+(x_8^{(0)} + x_8^{(2)}) = h_0^+(x_8^{(0)}) + v_1^+(x_8^{(2)}) = x_8 + x_8 = 0 \in (1, B^+)$$

$$D_{0,5/2}^+(x_8^{(2)} + x_6^{(5)}) = h_1^+(x_8^{(2)}) + v_2^+(x_6^{(5)}) = x_6 + x_6 = 0 \in (2, B^+)$$

$$D_{0,5/2}^+(x_6^{(5)} + x_3^{(7)}) = h_2^+(x_6^{(5)}) + v_3^+(x_3^{(7)}) = x_1 + x_1 = 0 \in (3, B^+)$$

最後に $D_{0,5/2}^+(x_3^{(7)}) = h_3^+(x_3^{(7)}) = 0 \in (4, B^+)$.

反対に左端では $D_{0,5/2}^+(x_{-8}^{(-3)}) = v_{-3}^+(x_{-8}^{(-3)}) = 0 \in (-3, B^+)$.

$$D_{0,5/2}^+(x_{-8}^{(-3)} + x_0^{(-5)}) = h_{-3}^+(x_{-8}^{(-3)}) + v_{-2}^+(x_0^{(-5)}) = x_0 + x_0 = 0 \in (-2, B^+)$$

$$D_{0,5/2}^+(x_0^{(-5)} + x_5^{(-3)}) = h_{-2}^+(x_0^{(-5)}) + v_{-1}^+(x_5^{(-3)}) = x_5 + x_5 = 0 \in (-1, B^+)$$

以上から $x_{-8}^{(-3)} + x_0^{(-5)} + x_5^{(-3)} + x_8^{(0)} + x_8^{(2)} + x_6^{(5)} + x_3^{(7)}$ がサイクルであることがわかる.

s	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$\lfloor \frac{5s}{2} \rfloor$	-8	-5	-3	0	2	5	7	10
	x_{-8}	x_0	x_5	x_8	x_8	x_6	x_3	
			\vdots	\vdots				
		x_{-5}	x_0	x_3	x_3	x_1		
			x_{-1}	x_2	x_2	x_0		
			x_{-2}	x_1	x_1			
			x_{-3}	x_0	x_0			

表 2: $\mathbb{X}_{0,5/2}^+$ のサイクル (($O; 5/2$) = $-L(5, 2)$) の場合)

6 簡単な計算例

(コ) ホモロジーの係数環は $\mathbb{F} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ とする.

$HF^+(-L(5, 1), 0) \cong \mathcal{T}^+$ の「計算法」 (($O; 5$) = $-L(5, 1)$) の場合). Unknot O に対して

$$CFK^\infty(S^3, O) = \{x_i = [\mathbf{x}, i, i] | i \in \mathbb{Z}\}, \quad \partial x_i = 0, \quad Ux_i = x_{i-1}$$

$$H(A_s^+) = \begin{cases} \mathcal{T}^+ x_0 & s \geq 0 \\ \mathcal{T}^+ x_{-s} & s < 0 \end{cases}, \quad H(B_s^+) = H(B^+) = \mathcal{T}^+ x_0$$

すべての元がサイクルなので, チェインがそのままホモロジーになる. なので H を省略する.

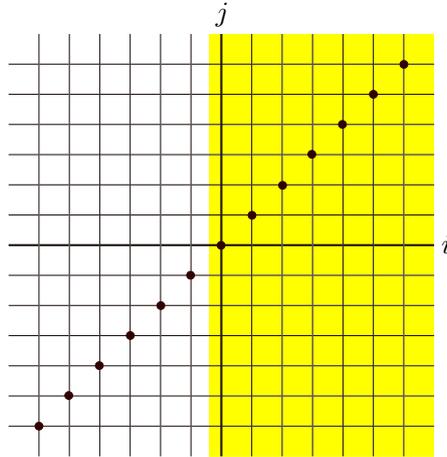


図 5: Unknot O の場合 B^+ (すべての元がサイクル)

$$D_5^+(\{a_s\}_{s \in \mathbb{Z}}) = \{b_s\}_{s \in \mathbb{Z}}, \quad \text{where } b_s = h_{s-5}^+(a_{s-5}) + v_s^+(a_s)$$

表 3 を説明する (ぜひ別表を拡大してご覧下さい). 例えば A_{-10}^+ 内の x_{-6} を $x_{-6}^{(-10)}$ と表すと, $\mathbb{A}^+ = \bigoplus_{s \in \mathbb{Z}} A_s^+$ の元 $x_{-6}^{(-10)} + x_4^{(-5)}$, つまり

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^+ &= \cdots \oplus A_{-11}^+ \oplus A_{-10}^+ \oplus A_{-9}^+ \oplus \cdots \oplus A_{-5}^+ \oplus A_{-4}^+ \cdots \\ x_{-6}^{(-10)} + x_4^{(-5)} &= (\cdots 0, 0, x_{-6}, 0, 0, 0, 0, x_4, 0, 0, \cdots) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccccccccccc}
\cdots \oplus A_{-10}^+ & \oplus & A_{-5}^+ & \oplus & A_0^+ & \oplus & A_5^+ & \oplus & A_{10}^+ & \oplus & A_{15}^+ \oplus \cdots \\
x_{-6}^{(-10)} & & x_4^{(-5)} & & x_9^{(0)} & & x_9^{(5)} & & x_4^{(10)} & & \\
\Downarrow & \searrow & \\
0 & & x_4 + x_4 & & x_9 + x_9 & & x_9 + x_9 & & x_4 + x_4 & & 0 \\
& & = 0 & & = 0 & & = 0 & & = 0 & & \\
\cdots \oplus B_{-10}^+ & \oplus & B_{-5}^+ & \oplus & B_0^+ & \oplus & B_5^+ & \oplus & B_{10}^+ & \oplus & B_{15}^+ \oplus \cdots
\end{array}$$

表 3: $x_{-6}^{(-10)} + x_4^{(-5)} + x_9^{(0)} + x_9^{(5)} + x_4^{(10)} \in \text{Ker } D_0^+(5)$

あるいは, その部分和

$$\begin{aligned}
\mathbb{A}_0^+ &= \cdots \oplus A_{-10}^+ \oplus A_{-5}^+ \oplus A_0^+ \oplus A_5^+ \oplus \cdots \\
x_{-6}^{(-10)} + x_4^{(-5)} &= (\cdots 0, x_{-6}, x_4, 0, 0, \cdots)
\end{aligned}$$

の D_0^+ による値について $h_{-10}^+ : A_{-10}^+ \rightarrow B_{-10+5}^+ = B_{-5}^+$, $v_{-5}^+ : A_{-5}^+ \rightarrow B_{-5}^+$ であり

$$D_0^+(x_{-6}^{(-10)} + x_4^{(-5)}) = h_{-10}^+(x_{-6}^{(-10)}) + v_{-5}^+(x_4^{(-5)}) = x_4 + x_4 = 0 \in B_{-5}^+$$

その右隣, そのまた隣, ... も同様に

$$\begin{aligned}
D_0^+(x_4^{(-5)} + x_9^{(0)}) &= h_{-5}^+(x_4^{(-5)}) + v_0^+(x_9^{(0)}) = x_9 + x_9 = 0 \in B_0^+ \\
D_0^+(x_9^{(0)} + x_9^{(5)}) &= h_0^+(x_9^{(0)}) + v_5^+(x_9^{(5)}) = x_9 + x_9 = 0 \in B_5^+ \\
D_0^+(x_9^{(5)} + x_4^{(10)}) &= h_5^+(x_9^{(5)}) + v_{10}^+(x_4^{(10)}) = x_4 + x_4 = 0 \in B_{10}^+
\end{aligned}$$

左端で $D_0^+(x_{-6}^{(-10)}) = v_{-10}^+(x_{-6}^{(-10)}) = 0 \in B_{-10}^+$, 右端で $D_0^+(x_4^{(10)}) = h_{10}^+(x_4^{(10)}) = 0 \in B_{15}^+$.

以上から $x_{-6}^{(-10)} + x_4^{(-5)} + x_9^{(0)} + x_9^{(5)} + x_4^{(10)} \in \text{Ker } D_0^+(5)$ がわかる. つまり $\mathbb{X}_0^+(5)$ のサイクルである. これを図にしたのが表 3.

他のサイクルをいくつか表にしたのが表 4（ぜひ別表を拡大してご覧下さい）．表 4 では同じ行の元の和がサイクルをなす．最小 degree のサイクルは一番下の $x_{-5}^{(-5)} + x_0^{(0)} + x_0^{(5)}$ で，その degree は（注意 4）

$$-\frac{c_1^2(t_0) - 2\chi - 3\sigma}{4} = -\frac{\frac{(5+0)^2}{-5} - 2 \cdot 1 - 3\sigma \cdot (-1)}{4} = 1$$

A_s^+	A_{-15}^+	A_{-10}^+	A_{-5}^+	A_0^+	A_5^+	A_{10}^+	A_{15}^+
	x_{-15}	x_0	x_{10}	x_{15}	x_{15}	x_{10}	x_0
			\vdots	\vdots			
		x_{-5}	x_5	x_{10}	x_{10}	x_5	
		x_{-6}	x_4	x_9	x_9	x_4	
			\vdots	\vdots			
		x_{-9}	x_1	x_6	x_6	x_1	
		x_{-10}	x_0	x_5	x_5	x_0	
			x_{-1}	x_4	x_4		
			\vdots	\vdots			
			x_{-5}	x_0	x_0		

表 4: $\mathbb{X}_0^+(5)$ のサイクル と degree shift

それらの degree shift について（図 6）

$s = 5(\ell - 1) > 0$ のとき

$$\text{Ker}(h_{5(\ell-1)}^+ : A_{5(\ell-1)}^+ \rightarrow B^+) = \{x_j^{(5\ell-1)} \mid 0 \leq j < 5(\ell-1)\}$$

であり $h_{5(\ell-1)}^+(x_{5(\ell-1)}^{(5\ell-1)}) = x_0^{(5\ell)}$ なので，degree shift は「 $A_{5\ell}^+$ の x_0 は $A_{5(\ell-1)}^+$ の $x_{5(\ell-1)}$ に対応する」と考えて $(x_{i+1}$ と x_i の degree 差が 2 であることも思い出せば)

$A_{5\ell}^+$ での degree shift は $2 \cdot \{5(\ell-1) + 5(\ell-2) + \dots + 5\} = 5\ell(\ell-1)$.

$s = 5\ell < 0$ のとき

$$\text{Ker}(v_{5\ell}^+ : A_{5\ell}^+ \rightarrow B^+) = \{x_j^{5\ell} \mid 5\ell \leq j < 0\}$$

であり $v_{5\ell}^+(x_{5\ell}^{(5\ell)}) = x_0^{(5\ell+5)}$ なので，degree shift は「 $A_{5\ell}^+$ の $x_{5\ell}$ は $A_{5\ell+5}^+$ の x_0 に対応する」と考えて $A_{5\ell}^+$ での degree shift は $2 \cdot \{5|\ell| + 5(|\ell|-1) + \dots + 5\} = 5|\ell|(|\ell|+1) = 5\ell(\ell-1)$.

例 8. $((O; 5), j = 0) = (-L(5, 1), t_0)$ 表 3 および表 4 の簡略化.

各 $H(A_s) \cong H(B) \cong \mathcal{T}^+$ に着目し, 最小限の情報で計算するには, 次のような表と図を書く
と良い² (別表でいえば 斜めの点の列 を縦にして最小 degree のものを下に揃える). U の作用
は「各列で 1 つ下げる」である.

$H(A_s^+) \cong \mathcal{T}^+, H(B^+) \cong \mathcal{T}^+$ である. v_s^+, h_s^+ のモデルはそれぞれ

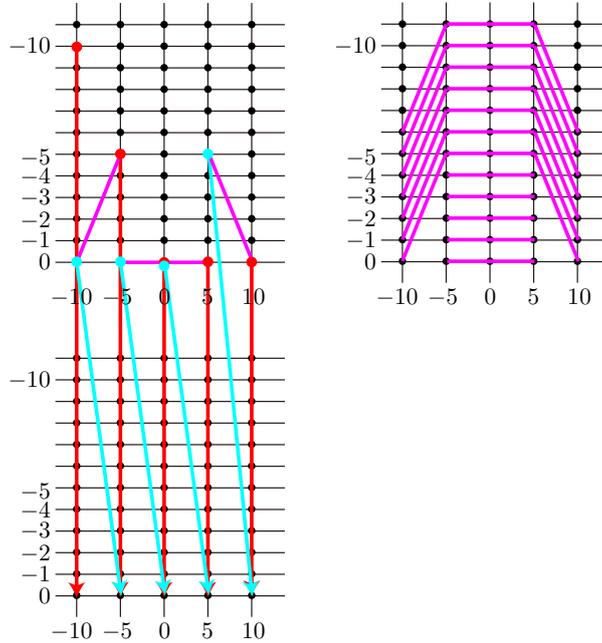
$$v_s^+ : A_s^+ \rightarrow B_s^+, \quad h_s^+ : A_s^+ \rightarrow B_{s+n}^+$$

$$\begin{cases} 1 & \text{if } s \geq 0 \\ U^{-s} & \text{if } s < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} U^s & \text{if } s \geq 0 \\ 1 & \text{if } s < 0 \end{cases}$$

これらを左上から左下に向かう矢印で表し, 像が一致するものを辺でつなぐ.

• $((O; 5), j = 0) = (-L(5, 1), t_0)$

$\cdots H(A_{-10})$	\oplus	$H(A_{-5})$	\oplus	$H(A_0)$	\oplus	$H(A_5)$	\oplus	$H(A_{10}) \cdots$
$\downarrow U^{10}$	$\searrow 1$	$\downarrow U^5$	$\searrow 1$	$\downarrow 1$	$\searrow 1$	$\downarrow 1$	$\searrow U^5$	$\downarrow 1$
$\cdots H(B_{-10})$	\oplus	$H(B_{-5})$	\oplus	$H(B_0)$	\oplus	$H(B_5)$	\oplus	$H(B_{10}) \cdots$

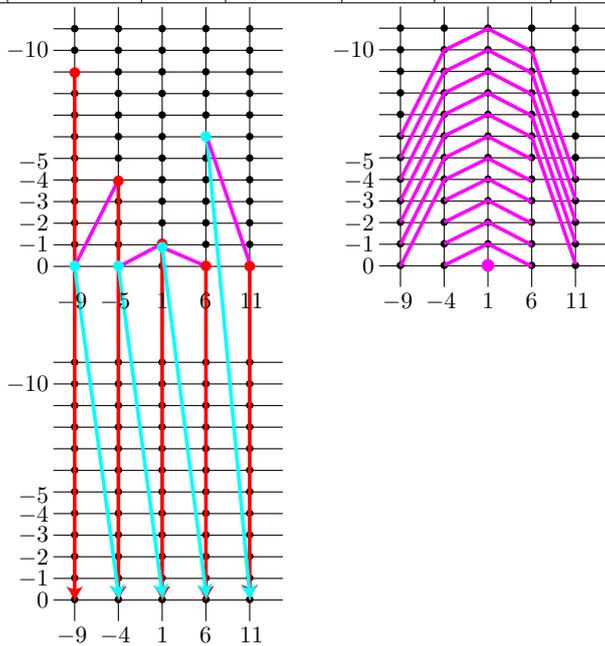


結論: $HF^+((O; 5), t_0) \cong \mathcal{T}^+$

²中央大での皆川宏之氏の集中講義の際の議論が参考になりました.

$$\bullet ((O; 5), j = 1) = (-L(5, 1), \mathfrak{t}_1)$$

$\cdots H(A_{-9})$	\oplus	$H(A_{-4})$	\oplus	$H(A_1)$	\oplus	$H(A_6)$	\oplus	$H(A_{11}) \cdots$
$\downarrow U^9$	$\searrow 1$	$\downarrow U^4$	$\searrow 1$	$\downarrow U$	$\searrow U$	$\downarrow 1$	$\searrow U^6$	$\downarrow 1$
$\cdots H(B_{-9})$	\oplus	$H(B_{-4})$	\oplus	$H(B_1)$	\oplus	$H(B_6)$	\oplus	$H(B_{11}) \cdots$



結論： $HF^+((O; 5), \mathfrak{t}_1) \cong \mathcal{T}^+$

例 9. Knot $T(3, 4)$ の Dehn surgery ³ (4-surgery $(T(3, 4); 4)$) についても計算してみたい. 各 $H(A_s^+) \cong \mathcal{T}^+$, $H(B^+) \cong \mathcal{T}^+$ に着目し, 例 8 の方法 ($\mathbb{X}_4^+(j) \cong \text{Ker } D_4^+(j)$) を利用) で考える. v_s^+, h_s^+ は例 5, 6 で求めている.

なお, $T(3, 4)$ の 4-surgery は Seifert manifold $-S(-1; (4, 1), (3, 2), (8, 1))$ であり, L-space ではない: Eisenbud-Hirsh-Neumann, Jankins-Neumann の判定法 (次の章) によると

$$\frac{1}{8} < \frac{1}{7}, \quad \frac{1}{4} < \frac{2}{7}, \quad \frac{2}{3} < \frac{5}{7}$$

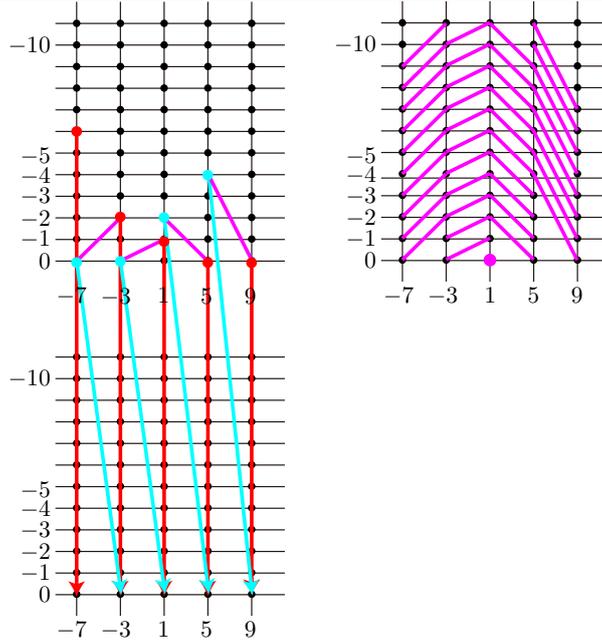
($m = 7, a = 2$) となり, Horizontal foliation を許容する. これは taut foliation である. あるいは Naimi の判定法 ⁴ ($(y_0; y_1, y_2, y_3) = (-1; \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{1}{8})$)

$$y_- = \max_{x>0} -\frac{1}{x} \left(1 + \sum_{i=0}^n [y_i x] \right) = \frac{1}{7}, \quad y_+ = \min_{x>0} -\frac{1}{x} \left(-1 + \sum_{i=0}^n [y_i x] \right) = -\frac{1}{2}$$

によると taut foliation をもつ. Taut foliation を許容する多様体は L-space ではない.

$$\bullet ((T(3, 4); 4), j = 1) = (-S(-1; (4, 1), (3, 2), (8, 1)), \mathfrak{t}_1)$$

$\cdots H(A_{-7})$	\oplus	$H(A_{-3})$	\oplus	$H(A_1)$	\oplus	$H(A_5)$	\oplus	$H(A_9) \cdots$
$\downarrow U^6$	$\searrow 1$	$\downarrow U^2$	$\searrow 1$	$\downarrow U$	$\searrow U^2$	$\downarrow 1$	$\searrow U^4$	$\downarrow 1$
$\cdots H(B_{-7})$	\oplus	$H(B_{-3})$	\oplus	$H(B_1)$	\oplus	$H(B_5)$	\oplus	$H(B_9) \cdots$

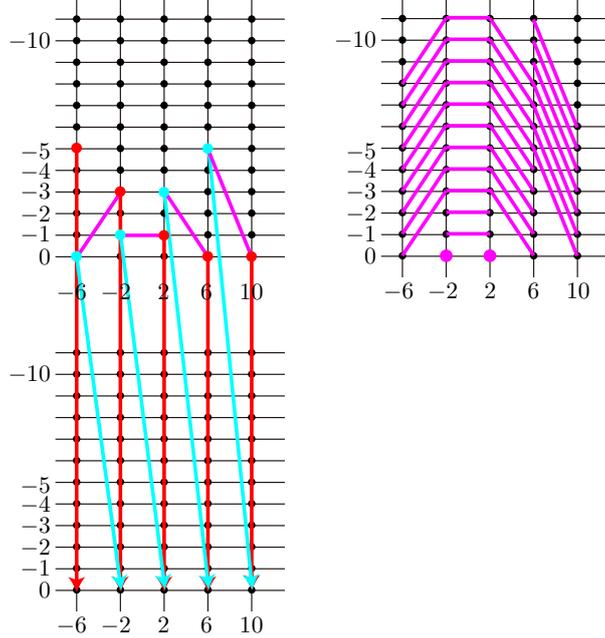


結論: $HF^+((T(3, 4); 4), \mathfrak{t}_1) \cong \mathcal{T}^+$

³Knot を鏡像に, 多様体の向きを逆にして $(T(3, 4); -4) = S(-1; (4, 1), (3, 2), (8, 1))$ と扱うべきかも知れない.
⁴ y_- と y_+ の大小が逆になる (気がする). 参考文献の誤植のはずだが, 仕方がないので書き写した.

$$\cdot ((T(3, 4), 4); j = 2) = (-S(-1; (4, 1), (3, 2), (8, 1)), \mathfrak{t}_2)$$

$\cdots H(A_{-6})$	\oplus	$H(A_{-2})$	\oplus	$H(A_2)$	\oplus	$H(A_6)$	\oplus	$H(A_{10}) \cdots$
$\downarrow U^5$	$\searrow 1$	$\downarrow U^3$	$\searrow U$	$\downarrow U$	$\searrow U^3$	$\downarrow 1$	$\searrow U^5$	$\downarrow 1$
$\cdots H(B_{-6})$	\oplus	$H(B_{-2})$	\oplus	$H(B_2)$	\oplus	$H(B_6)$	\oplus	$H(B_{10}) \cdots$



結論 : $HF^+((T(3, 4); 4), \mathfrak{t}_2) \cong \mathcal{T}^+ \oplus \mathbb{F}$

7 L-space (Seifert manifold の場合)

Seifert manifold が L-space かどうかの判定について、多くの研究者の努力の成果を1つの定理 (定理 8) として紹介する. 直接的には (新しいので⁵) S. D. Rasmussen 氏の論文「L-space intervals for graph manifolds and cables」から引用いたします.

D. Eisenbud-U. Hirsh-W. Neumann, M. Jenkins-W. D. Neumann, R. Naimi, D. Calegari-A. Walter, P. Lisca-G. Matic, P. Lisca-A. I. Stipsicz, S. Boyer-C. M. Gordon-L. Watson, J. Rasmussen-S. D. Rasmussen.

定理 8. *Let M be a closed oriented Seifert fibered manifold, then the following are equivalent*

- (1) $\pi_1(M)$ admits a non-trivial representation in $\text{Homeo}_+\mathbb{R}$.
- (2) $\pi_1(M)$ is left orderable.
- (3) M admits a co-oriented C^0 taut foliations.
- (4) M has non trivial Heegaard Floer Homology, ie, M fails to be an L-space.

S. Boyer-D. Rolfsen-B. Wiest 論文「Orderable 3-manifold groups」からの引用

定理 9. [BRW] Eisenbud-Hirsh-Neumann, Jankins-Neumann の判定法

An oriented Seifert manifold

$$M \left(0; b, \frac{\beta_1}{\alpha_1}, \dots, \frac{\beta_n}{\alpha_n} \right), \quad \text{where } n \geq 3, b \in \mathbb{Z}, 0 < \beta_i < \alpha_i.$$

admits a horizontal foliation if and only if one of the following conditions holds:

⁵適切な引用でないかも知れません. 専門家でないため すみません.

$$(1) \quad -(n-2) \leq b \leq -2$$

(2) $b = -1$ and there are relatively prime integers $0 < a < m$ such that

$$\text{for some permutation } \left(\frac{a_1}{m}, \frac{a_2}{m}, \dots, \frac{a_n}{m} \right) \quad \text{of} \quad \left(\frac{a}{m}, \frac{m-a}{m}, \frac{1}{m}, \dots, \frac{1}{m} \right)$$

we have

$$\frac{\beta_j}{\alpha_j} < \frac{a_j}{m} \quad \text{for any } j.$$

(3) [reverse the orientation] $b = -(n-1)$ and after replace $\frac{\beta_j}{\alpha_j}$ by $\frac{\alpha_j - \beta_j}{\alpha_j}$, condition (2) holds.

8 knot 不変量について少々

S^3 内の knot K が L-space surgery を許容する (L-space knot) とする. Alexander polynomial を

$$\Delta_K(t) = a_0 + \sum_{i>0} a_i(t + t^{-i})$$

と表し, t_i を次で定める

$$t_i(K) = \sum_{j=1}^{\infty} j a_{|i|+j}$$

つまり

$$\begin{aligned} t_0(K) &= a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 5a_5 + \dots \\ t_1(K) &= a_2 + 2a_3 + 3a_4 + 4a_5 + \dots \\ t_2(K) &= a_3 + 2a_4 + 3a_5 + \dots \\ t_3(K) &= a_4 + 2a_5 + \dots \end{aligned}$$

逆算には

$$t_{i-1}(K) - 2t_i(K) + t_{i+1}(K) = a_i$$

例 10. $K = T(3, 4)$ の場合 (例 5, 6) $(a_1, a_2, a_3) = (0, -1, 1)$ で, $t_0 = t_1 = t_2 = 1$ それ以降は 0.

定理 10 (Ozsvath-Szabo [OS(rat)]). L-space surgery を許容する S^3 内の knot K の $r = p/q > 0$ 係数 surgery について, Spin^c 構造 \mathfrak{t}_i が $|i| < p/2q$ の範囲で

$$d(S_{p/q}^3(K), i) - d(S_{p/q}^3(O), i) = -2t_{\lfloor \frac{|i|}{q} \rfloor}(K)$$

整数係数 surgery ($q = 1$) なら

$$d(S_p^3(K), i) - d(S_p^3(O), i) = -2t_{|i|}(K).$$

現在では, 進化して $p, q > 0, 0 \leq i \leq p-1$ として

$$d(S_{p/q}^3(K), i) - d(S_{p/q}^3(O), i) = -2 \max\{V_{\lfloor \frac{i}{q} \rfloor}, H_{\lfloor \frac{i-p}{q} \rfloor}\}$$

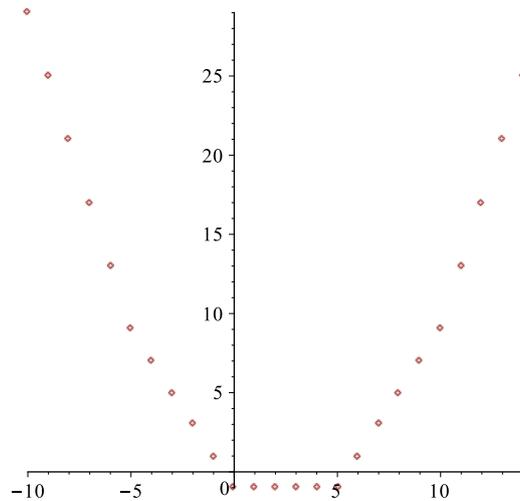
定義. Deficiency $D_{p/q}(K, i) = d(S_{p/q}^3(K), i) - d(S_{p/q}^3(O), i)$.

一言 Gibbons 氏の論文 [G] を Review する機会をいただいたのが勉強のきっかけでした. 3次元多様体と4次元多様体を行き来する議論に魅力を感じました.

謝辞 研究集会「微分トポロジー17」の共同世話人でもある丹下基生氏 (筑波大学) には初版を読んでいただき貴重な指摘をいただきました. 感謝いたします.

参考文献

- [G] J.Gibbons, *Deficiency Symmetries of Surgeries in S^3* , International Mathematics Research Notices, Vol.2015, No.22, pp.12126–12151.
- [BRW] S.Boyer-D.Rolfsen-B.Wiest, *Orderable 3-manifold groups*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble **55** 1, pp.243–288.
- [OS] P Ozsváth and Z Szabó, *Absolutely graded Floer homologies and intersection forms for 4-manifolds with boundary*, Adv. Math. **173** (2003), No.2, 179–261. (preprint Arxiv: math.SG/0110170v2.)
- [OS(int)] P. Ozsváth and Z. Szabó, *Knot Floer homology and integer surgeries*, Algebr. Geom. Topol. **8** (2008), no.1, 101–153.
- [OS(rat)] P. Ozsváth and Z. Szabó, *Knot Floer homology and rational surgeries*, (preprint Arxiv: math.SG/0504404v1.)
- [OS(plumb)] P. Ozsváth and Z. Szabó, *On the Floer homology of plumbed three-manifolds*, Geometry and Topology **7**, no.1 (2003), 185–224.



$$\begin{bmatrix} -5 & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 \cdots 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 9 & 7 & 5 & 3 & 1 & -1 & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 13 & 17 & 21 & 25 & 29 \end{bmatrix}$$

$$2\ell\sigma + n\ell(\ell - 1) - 1 \text{ for } s = \sigma + \ell n \equiv i \pmod{n} \quad (0 \leq \sigma < n)$$

図 6: $n = 5$ の場合の degree shift